

APPENDIX A

Guarantee's Document From My School



บันทึกข้อความ

ส่วนราชการ โรงเรียนปล้องวิทยาคม ตำบลปล้อง อำเภอเทิง จังหวัดเชียงราย ๕๗๒๓๐
ที่ ศธ ๐๔๐๔๖.๓.๔๖/พิเศษ วันที่ ๙ เดือน มีนาคม พ.ศ. ๒๕๕๙
เรื่อง รายงานผลการใช้สื่อเอกสารประกอบการเรียนการสอน

เรียน ผู้อำนวยการโรงเรียนปล้องวิทยาคม

เนื่องด้วย ข้าพเจ้านายเอกนรินทร์ จันท์แก้วได้สร้างเอกสารประกอบการเรียนการสอน เรื่องการแก้ระบบสมการด้วยวิธีการเขียนแบบใหม่ ใช้สำหรับสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเอกสารประกอบการเรียนการสอนชิ้นนี้เป็นส่วนหนึ่งในการทำวิจัยสำหรับการศึกษาในระดับปริญญาโท สาขาการสอนคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

บัดนี้ การจัดการเรียนการสอนได้เสร็จสิ้นแล้ว

จึงเรียนมาเพื่อโปรดทราบ

ลงชื่อ.....เอกนรินทร์.....ผู้รายงาน
(นายเอกนรินทร์ จันท์แก้ว)
ตำแหน่ง ครู คศ.๑

ความคิดเห็นของรองผู้อำนวยการฝ่ายวิชาการ
.....เป็นวิทยภาพที่ สามารถผลิตสื่อเอกสารประกอบได้.....
.....ได้ เสร็จตามกำหนด ๑๗/๒๕๕๙.....

ลงชื่อ.....[Signature].....
(นายพัฒนา ห่มศรีภูมิ)
รองผู้อำนวยการฝ่ายวิชาการ

ความคิดเห็นของผู้บริหารสถานศึกษา
.....[Signature].....
.....[Signature].....

ลงชื่อ.....[Signature].....
(นายปิยะ แก้วหาญ)
ผู้อำนวยการโรงเรียนปล้องวิทยาคม

เอกสารประกอบการเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น
โดยใช้ขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

โรงเรียนปลื้มวิทยาคม
สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 36

คำนำ

เอกสารประกอบการเรียนฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการทำวิจัยเรื่อง การศึกษาวิธีการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น (Study on Methods for Solving System of Linear Equations) ใช้สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งจะประกอบไปด้วย ระบบสมการเชิงเส้น การดำเนินการตามแถวและการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยการใช้ขั้นตอนวิธีการใหม่

ข้าพเจ้าหวังเป็นอย่างยิ่งว่าเอกสารชิ้นนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาทักษะกระบวนการเรียนรู้ด้านต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์



ผู้จัดทำ

นายเอกนรินทร์ จันทร์แก้ว

ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equation)	1
เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)	2
การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation)	3
การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่	4
แบบฝึกทักษะ	8
เฉลยแบบฝึกทักษะ	12
บรรณานุกรม	13



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

1. ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)

ในหัวข้อนี้เราจะมาทำความเข้าใจในเรื่องของระบบสมการเชิงเส้นและการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

บทนิยามที่ 1 กำหนดให้ $\mathbb{R}$ เป็นจำนวนจริง สมการเชิงเส้น คือ สมการที่อยู่ในรูป

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

เมื่อ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นตัวแปรและ $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ เป็นสมาชิกที่อยู่ในจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 1 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของสมการเชิงเส้น

1. $x - 3y = 5$

2. $3x - 4y + 7z = -2$

คำตอบของสมการเชิงเส้น n ตัวแปร $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ หมายถึง ลำดับของจำนวนจริง n จำนวน $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ซึ่งเมื่อแทน $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \dots, s_n = x_n$ ลงในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริง

บทนิยามที่ 2 กำหนดให้ $\mathbb{R}$ เป็นจำนวนจริง ระบบสมการเชิงเส้น คือ ชุดของสมการที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เมื่อ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นตัวแปรและ a_{ij}, b_i เป็นสมาชิกที่อยู่ในจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 2 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของระบบสมการเชิงเส้น

1. $3x - y + 4 = 1$

$2x - 5y = 2$

2. $-2x + 6y - 3z = -5$

$x - 3y + z = 7$

$x + 4y + 2z = 2$

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ หมายถึง ลำดับของจำนวนจริง n จำนวน $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ซึ่งเมื่อแทน $s_1 = x_1, s_2 = x_2, \dots, s_n = x_n$ ลงในระบบสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริงทุกสมการ

2. เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

ถ้ากำหนดระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d_1$$

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d_2$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = d_3$$

เราสามารถนำมาเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์สัมประสิทธิ์และเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

1. เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (Coefficient Matrix)

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

2. เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & a_2 & a_3 & d_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & d_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & d_3 \end{array} \right]$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้

$$x + y - z = 1$$

$$2x - y + z = 2$$

$$4y - z = 3$$

จะได้เมทริกซ์แต่งเติม คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนเราจะใช้ r_n แทนแต่ละแถวของเมทริกซ์ เช่น แถวที่ 1 จะใช้ r_1 แถวที่ 2 จะใช้ r_2 เป็นต้น ดังนั้นเมทริกซ์แต่งเติมในตัวอย่างข้างต้น อาจเขียนให้ชัดเจนขึ้น เพื่อบ่งชี้แต่ละแถวของ

เมทริกซ์ อาจเขียนได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right] \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{matrix}$$

3. การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น (Elementary Row Operation)

ความรู้พื้นฐานในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นคือการสร้างระบบสมการเชิงเส้นขึ้นมาใหม่ที่ง่ายต่อการหาคำตอบยิ่งขึ้น โดยที่ระบบสมการเชิงเส้นที่สร้างขึ้นมามีคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเดิม ระบบสมการเชิงเส้นใหม่ที่สร้างขึ้นนี้ ซึ่งอาศัยการดำเนินการ 3 ชนิดต่อไปนี้เพื่อกำจัดตัวแปร

1. การคูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์
2. การสลับกันระหว่างสมการสองสมการ
3. การบวกสมการหนึ่งด้วยผลคูณของสมการอื่นกับค่าคงตัว

เนื่องจากแต่ละแถวของเมทริกซ์แต่งเติมเกิดจากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าคงตัวของแต่ละสมการที่สมนัยกัน ดังนั้นการดำเนินการ 3 ชนิดบนสมการดังกล่าวจะเหมือนกับการดำเนินการ 3 ชนิดต่อไปนี้บนเมทริกซ์แต่งเติม

1. การคูณแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์แต่งเติมด้วยค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์
2. การสลับกันระหว่างแถวสองแถวของเมทริกซ์แต่งเติม
3. การบวกแถวหนึ่งของเมทริกซ์แต่งเติมด้วยผลคูณของแถวอื่นกับค่าคงตัว

ซึ่งเรียกรับการดำเนินการทั้ง 3 ข้อที่กล่าวมาข้างต้นว่า “การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น” ตัวอย่างการดำเนินการตามแถวเบื้องต้น

1. การคูณด้วยค่าคงที่ $\frac{1}{3}$ กับแถวที่ 1

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad r'_1 = \frac{1}{3}r_1$$

2. การสลับกันระหว่างแถวที่ 1 และ แถวที่ 3

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} r'_1 = r_3 \\ r'_3 = r_1 \end{matrix}$$

3. การบวกแถวที่ 3 ด้วยสามเท่าของแถวที่ 1

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \\ 14 & 27 & 19 \end{bmatrix} \quad r'_3 = r_3 + 3r_1$$

4. การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่

ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นเพื่อหาคำตอบนั้นเราสามารถใช่วิธีการต่างๆ ได้หลายวิธีเช่น การกำจัดเกาส์เขียน, การกำจัดแบบเกาส์-จอร์แดน, การใช้กฎของคราเมอร์, การใช้อินเวอร์สการคูณช่วยหาคำตอบ ซึ่งวิธีการต่างๆ ที่กล่าวมาล้วนมีความยากง่ายที่แตกต่างกัน ดังนั้น วิธีการต่อไปนี้จึงเป็นแนวทางหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นอีกวิธีการหนึ่งโดยมีขั้นตอนการแก้ระบบสมการเชิงเส้นดังนี้

1. สร้างเมทริกซ์แต่งเติม $[A|B]$ ขนาด $n \times n + 1$ และให้ $A^* = [A|B]$
2. สร้าง $I = \{1, 2, \dots, n\}$
3. เลือก $i \in I, a_{ii} \neq 0$
4. หารแถวที่ i ด้วย a_{ii} (ยกเว้น a_{ii})
5. แถวที่เหลือใช้การดำเนินการตามแถว คือ $r'_k = r_k - \frac{a_{ki}}{a_{ii}}r_i$ (หลักที่ i ไม่ต้องคำนวณให้ใส่เครื่องหมาย *)
6. ให้ $I' = I - \{i\}$
ถ้า $I' = \emptyset$ จะได้คำตอบของระบบสมการอยู่ในหลักสุดท้าย
ถ้า $I' \neq \emptyset$ ให้ $I' := I$ แล้วกลับไปทำข้อ 3

ตัวอย่างที่ 4 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$2x + 6y = 3$$

$$x + 4y = 1$$

วิธีทำ ให้

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

และ $I = \{1, 2\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 1: ให้ $i = 1$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} * & 3 & \frac{3}{2} \\ * & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \quad r'_2 = r_2 - \frac{1}{2}r_1$$

จะได้ $I = \{2\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 2: ให้ $i = 2$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} * & * & 3 \\ * & * & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \quad r'_1 = r_1 - 3r_2$$

ตอบ : $x = 3, y = -\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$x - 2y + 3z = 9$$

$$-x + 3y = -4$$

$$2x - 5y + 5z = 17$$

วิธีทำ ให้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array} \right]$$

และ ให้ $I = \{1, 2, 3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 1 : ให้ $i = 1$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & -2 & 3 & 9 \\ * & 1 & 3 & 5 \\ * & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_2 = r_2 - (-1)r_1 \\ r'_3 = r_3 - 2r_1 \end{array}$$

จะได้ $I = \{2, 3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 2 : ให้ $i = 2$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & 9 & 19 \\ * & * & 3 & 5 \\ * & * & 2 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 - (-2)r_2 \\ r'_3 = r_3 - (-1)r_2 \end{array}$$

จะได้ $I = \{3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 3 : ให้ $i = 3$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & 1 \\ * & * & * & -1 \\ * & * & * & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 - \frac{9}{2}r_3 \\ r'_2 = r_2 - \frac{3}{2}r_3 \end{array}$$

ตอบ : $x = 1, y = -1, z = 2$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$y + 2z + t = -3$$

$$2x - y + z = 0$$

$$x - 4y - 3t = -2$$

$$3x + 2y - z + 4t = 9$$

วิธีทำ ให้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 9 \end{array} \right]$$

และ ให้ $I = \{1, 2, 3, 4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 1 : ให้ $i = 2$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & * & 3 & 1 & -3 \\ -2 & * & -1 & 0 & 0 \\ -7 & * & -4 & -3 & -2 \\ 7 & * & 1 & 4 & 9 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 - (-1)r_2 \\ r'_3 = r_3 - 4r_2 \\ r'_4 = r_4 - (-2)r_2 \end{array}$$

จะได้ $I = \{1, 3, 4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 2 : ให้ $i = 4$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} -\frac{2}{4} & * & \frac{11}{4} & * & -\frac{21}{4} \\ -2 & * & -1 & * & 0 \\ -\frac{7}{4} & * & -\frac{13}{4} & * & \frac{19}{4} \\ \frac{7}{4} & * & \frac{1}{4} & * & \frac{9}{4} \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 - \frac{1}{4}r_4 \\ r'_2 = r_2 - (0)r_4 \\ r'_3 = r_3 - (-\frac{3}{4})r_4 \end{array}$$

จะได้ $I = \{1, 3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 3 : ให้ $i = 1$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & 11 & * & -21 \\ * & * & 21 & * & -42 \\ * & * & 16 & * & -32 \\ * & * & -19 & * & -39 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_2 = r_2 - (-8)r_1 \\ r'_3 = r_3 - (-7)r_1 \\ r'_4 = r_4 - 7r_1 \end{array}$$

จะได้ $I = \{3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 4 : ให้ $i = 3$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & 1 \\ * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & -2 \\ * & * & * & * & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 - \frac{11}{16}r_3 \\ r'_2 = r_2 - \frac{21}{6}r_3 \\ r'_4 = r_4 - (-\frac{19}{16})r_3 \end{array}$$

ตอบ : $x = 1, y = 0, z = -2, t = 1$

จากตัวอย่างที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นได้ว่าเราสามารถเลือก a_{ii} ตัวไหนก่อนก็ได้ ไม่จำเป็นต้องเลือกเรียงจาก $1, 2, \dots, n$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบฝึกทักษะ

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้วิธีการของเกาส์-จอร์แดนและขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่เพื่อเปรียบเทียบกัน

1. $x - y = 1$

$$2x + y = 6$$

2. $5x - 2y = -4$

$$2x - 4y = 3$$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

$$3. \ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

4. $x + y + 2z = 9$

$2y - 7z = -17$

$3x + 6y - 5z = 0$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

5. $3x - y + z + 7w = 13$
 $-2x + y - z - 3w = -9$
 $-2x + y - 7w = 8$
 $x - y + 2z - w = 3$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เฉลยแบบฝึกทักษะ

1. $x = \frac{7}{3}, y = \frac{4}{3}$

2. $x = -\frac{11}{8}, y = -\frac{23}{16}$

3. $x_1 = \frac{17}{5}, x_2 = \frac{7}{5}, x_3 = -\frac{9}{5}$

4. $x = 1, y = 2, z = 3$

5. $x = 23, y = \frac{83}{4}, z = -2, w = -\frac{19}{4}$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

บรรณานุกรม

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน. หนังสือเรียนคณิตศาสตร์เพิ่มเติม คณิตศาสตร์
เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6(ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2557). พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพมหานคร :
โรงพิมพ์ สกสค.ลาดพร้าว

Hafsa Athar Jafree, Muhammad Imtiaz, Syed Inayatullah, Fozia Hanif Khan, Tajuddin Nizami. A
Space Efficient Flexible Pivot Selection Approach to Evaluate Determinant and Inverse
of a Matrix. Journal PLOS ONE. Volume 9, Issue 2, February 2014.

Deaw Jaibun, Mahidol Wittayanusorn school.



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบทดสอบก่อนเรียน - หลังเรียน

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้ขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่

1. $2a + 3b = 8$

$$4a - b = 2$$

2. $a - 4b + 5c = -22$

$$3a + 2b - c = 10$$

$$2a + 5b + 3c = 3$$

3. $3a + 4b - c = -2$

$$-2a + b - 5c = 5$$

$$a + 7b + 9c = 5$$

4. $a + 2b - c + d = 9$

$$2a + c - 3d = -8$$

$$-a - b - 2c + d = 2$$

$$b + c - 2d = -5$$

5. $a + 3b - 2c + 4d = 3$

$$3a - 5b - c + 2d = 3$$

$$-a + b + 3c - d = -1$$

$$3a + 2b - 3c + 3d = -2$$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

เฉลยแบบทดสอบก่อน-หลังเรียน

คำชี้แจง ให้นักเรียนหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้ขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่

1. $2a + 3b = 8$ (2 คะแนน)

$4a - b = 2$

วิธีทำ ให้

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 8 \\ 4 & -1 & 2 \end{array} \right] \dots\dots\dots 0.5 \text{ คะแนน}$$

และ $I = \{1, 2\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 1: ให้ $i = 1$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} * & \frac{3}{2} & 4 \\ * & -7 & -14 \end{array} \right] \quad r'_2 = r_2 - 2r_1 \dots\dots\dots 0.5 \text{ คะแนน}$$

จะได้ $I = \{2\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 2: ให้ $i = 2$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cc|c} * & * & 1 \\ * & * & 2 \end{array} \right] \quad r'_1 = r_1 + \frac{3}{14}r_2 \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

ตอบ : $a = 1, b = 2$

2. $a - 4b + 5c = -22$ (4 คะแนน)

$3a + 2b - c = 10$

$2a + 5b + 3c = 3$

วิธีทำ ให้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 5 & -22 \\ 3 & 2 & -1 & 10 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \end{array} \right] \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

และ ให้ $I = \{1, 2, 3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 1: ให้ $i = 1$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & -4 & 5 & -22 \\ * & 14 & -16 & 76 \\ * & 13 & -7 & 47 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} r'_2 = r_2 - 3r_1 \\ r'_3 = r_3 - 2r_1 \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

จะได้ $I = \{2, 3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 2: ให้ $i = 2$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ * & * & -\frac{8}{7} & \frac{38}{7} \\ * & * & \frac{55}{7} & -\frac{165}{7} \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 + \frac{2}{7}r_2 \\ \\ r'_3 = r_3 - \frac{13}{14}r_2 \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

จะได้ $I = \{3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 3 : ให้ $i = 3$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & 1 \\ * & * & * & 2 \\ * & * & * & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 - \frac{3}{35}r_3 \\ r'_2 = r_2 + \frac{8}{55}r_3 \\ \\ \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

ตอบ : $a = 1, b = 2, c = -3$

3. $3a + 4b - c = -2$ (4 คะแนน)

$$-2a + b - 5c = 5$$

$$a + 7b + 9c = 5$$

วิธีทำ ให้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -5 & 5 \\ 1 & 7 & 9 & 5 \end{array} \right] \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

และ ให้ $I = \{1, 2, 3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 1 : ให้ $i = 1$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ * & \frac{11}{3} & -\frac{17}{3} & \frac{11}{3} \\ * & \frac{17}{3} & \frac{28}{3} & \frac{17}{3} \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r'_2 = r_2 + \frac{2}{3}r_1 \\ r'_3 = r_3 - \frac{1}{3}r_1 \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

จะได้ $I = \{2, 3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 2 : ให้ $i = 2$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & \frac{19}{11} & -2 \\ * & * & -\frac{17}{11} & 1 \\ * & * & \frac{199}{11} & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 - \frac{4}{11}r_2 \\ \\ r'_3 = r_3 - \frac{17}{11}r_2 \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

จะได้ $I = \{3\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 3 : ให้ $i = 3$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & -2 \\ * & * & * & 1 \\ * & * & * & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 - \frac{19}{199}r_3 \\ r'_2 = r_2 + \frac{17}{199}r_3 \\ \\ \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

ตอบ : $a = -2, b = 1, c = 0$

4. $a + 2b - c + d = 9$ (5 คะแนน)

$$2a + c - 3d = -8$$

$$-a - b - 2c + d = 2$$

$$b + c - 2d = -5$$

วิธีทำ ให้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 9 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & -8 \\ -1 & -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right] \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

และ ให้ $I = \{1, 2, 3, 4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 1 : ให้ $i = 1$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & 2 & -1 & 1 & 9 \\ * & -4 & 3 & -5 & -26 \\ * & 1 & -3 & 2 & 11 \\ * & 1 & 1 & -2 & -5 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_2 = r_2 - 2r_1 \\ r'_3 = r_3 + r_1 \\ r'_4 = r_4 \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

จะได้ $I = \{2, 3, 4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 2 : ให้ $i = 2$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -4 \\ * & * & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{13}{12} \\ * & * & -\frac{9}{4} & \frac{3}{4} & \frac{9}{2} \\ * & * & \frac{7}{4} & -\frac{13}{4} & -\frac{23}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 + \frac{1}{2}r_2 \\ r'_3 = r_3 + \frac{1}{4}r_2 \\ r'_4 = r_4 + \frac{1}{4}r_2 \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

จะได้ $I = \{3, 4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 3 : ให้ $i = 3$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & -\frac{4}{3} & -3 \\ * & * & * & 1 & 5 \\ * & * & * & -\frac{1}{3} & -2 \\ * & * & * & -\frac{8}{3} & -8 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 + \frac{2}{9}r_3 \\ r'_2 = r_2 - \frac{1}{3}r_3 \\ r'_4 = r_4 + \frac{7}{9}r_3 \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

จะได้ $I = \{4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 4 : ให้ $i = 4$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & 1 \\ * & * & * & * & 2 \\ * & * & * & * & -1 \\ * & * & * & * & 3 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} r'_1 = r_1 - \frac{1}{2}r_4 \\ r'_2 = r_2 + \frac{3}{8}r_4 \\ r'_3 = r_3 - \frac{1}{8}r_4 \end{array} \quad \text{..... 1 คะแนน}$$

ตอบ : $a = 1, b = 2, c = -1, d = 3$

5. $a + 3b - 2c + 4d = 3$ (5 คะแนน)

$$3a - 5b - c + 2d = 3$$

$$-a + b + 3c - d = -1$$

$$3a + 2b - 3c + 3d = -2$$

วิธีทำ ให้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -5 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 & 3 & -2 \end{array} \right] \quad \text{..... 1 คะแนน}$$

และ ให้ $I = \{1, 2, 3, 4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 1 : ให้ $i = 1$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & 3 & -2 & 4 & 9 \\ * & -14 & 5 & -10 & -6 \\ * & 4 & 1 & 3 & 2 \\ * & -7 & 3 & -9 & -11 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} r'_2 = r_2 - 3r_1 \\ r'_3 = r_3 + r_1 \\ r'_4 = r_4 - 3r_1 \end{array} \quad \text{..... 1 คะแนน}$$

จะได้ $I = \{2, 3, 4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 2 : ให้ $i = 2$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & -\frac{13}{14} & \frac{13}{7} & \frac{12}{7} \\ * & * & -\frac{5}{14} & \frac{5}{7} & \frac{3}{7} \\ * & * & \frac{17}{7} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ * & * & \frac{1}{2} & -4 & -8 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} r'_1 = r_1 + \frac{3}{4}r_2 \\ r'_3 = r_3 + \frac{2}{7}r_2 \\ r'_4 = r_4 - \frac{1}{2}r_2 \end{array} \quad \text{..... 1 คะแนน}$$

จะได้ $I = \{3, 4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 3 : ให้ $i = 3$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & \frac{65}{34} & \frac{31}{17} \\ * & * & * & \frac{25}{34} & \frac{8}{17} \\ * & * & * & \frac{1}{17} & \frac{2}{17} \\ * & * & * & -\frac{137}{34} & -\frac{137}{17} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} r'_1 = r_1 + \frac{13}{134}r_3 \\ r'_2 = r_2 + \frac{5}{34}r_3 \\ r'_4 = r_4 - \frac{7}{34}r_3 \end{array} \quad \text{..... 1 คะแนน}$$

จะได้ $I = \{4\}$

การทำซ้ำครั้งที่ 4 : ให้ $i = 4$ จะได้

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & -2 \\ * & * & * & * & -1 \\ * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 + \frac{65}{137}r_4 \\ r'_2 = r_2 + \frac{25}{137}r_4 \\ r'_3 = r_3 + \frac{2}{137}r_4 \end{array} \dots\dots\dots 1 \text{ คะแนน}$$

ตอบ : $a = -2, b = -1, c = -0, d = 2$



ลิขสิทธิ์มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
Copyright© by Chiang Mai University
All rights reserved

แบบสอบถาม
เปรียบเทียบการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น
โดยใช้วิธีการของเกาส์-จอร์แดนและขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่

ส่วนที่ 1 ข้อมูลส่วนบุคคลทั่วไป

คำชี้แจง โปรดทำเครื่องหมาย ✓ ลงใน ☐ หรือเติมข้อความลงในช่องว่างตรงตามความเป็นจริง

1. เพศ

☐ ชาย ☐ หญิง

2. อายุ.....ปี

3. ระดับการศึกษา

☐ มัธยมศึกษาปีที่ 4 ☐ มัธยมศึกษาปีที่ 5 ☐ มัธยมศึกษาปีที่ 6

☐ อื่น ๆ โปรดระบุ.....

ส่วนที่ 2 เปรียบเทียบการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

คำชี้แจง โปรดทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องที่ตรงตามความคิดเห็นของท่านมากที่สุด

ที่	รายการ	5	4	3	2	1
1	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่สามารถหาคำตอบไววกว่าการหาคำตอบด้วยวิธีการของเกาส์-จอร์แดน					
2	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่ช่วยลดขั้นตอนในการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีการของเกาส์-จอร์แดน					
3	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่ไม่ยุ่งยาก ซับซ้อนเมื่อเทียบกับวิธีการของเกาส์-จอร์แดน					
4	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่ประหยัดพื้นที่ในการเขียนการแก้สมการเมื่อเทียบกับวิธีการของเกาส์-จอร์แดน					
5	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่ช่วยลดข้อผิดพลาดในการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีการของเกาส์-จอร์แดน					

ข้อเสนอแนะ.....

.....

.....

.....

.....

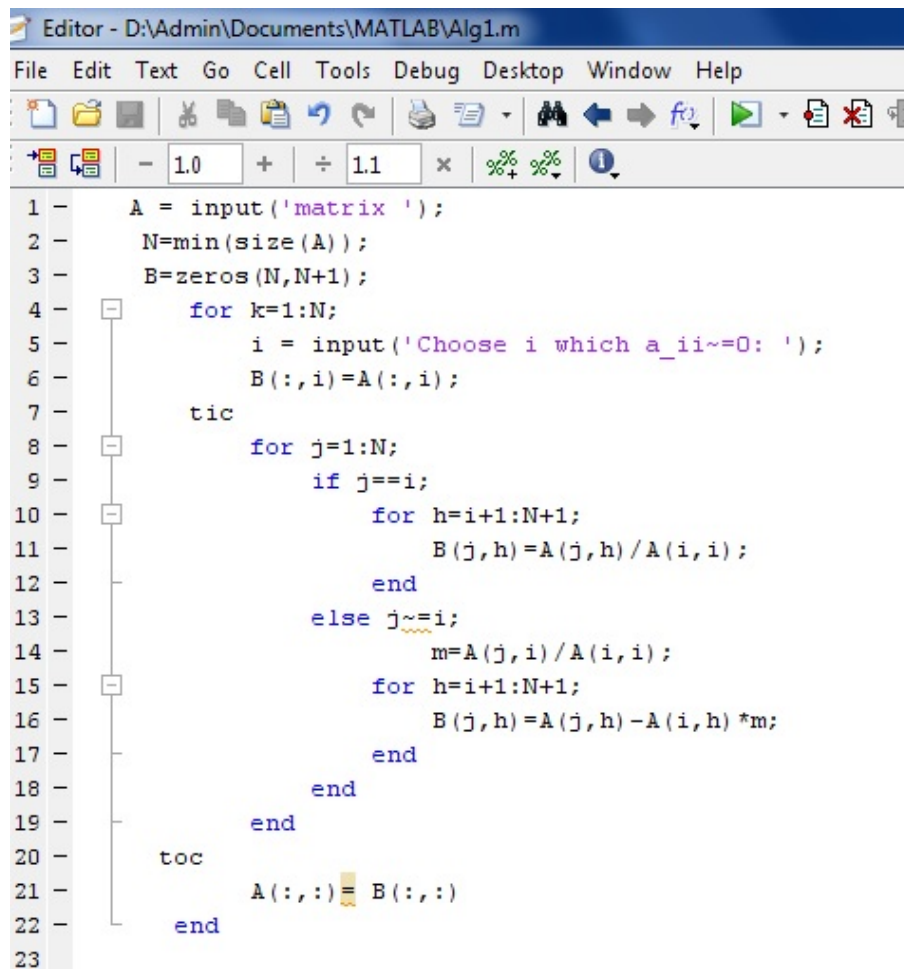
.....

.....

APPENDIX B

Computer Programs of the Studied Algorithms by MATLAB

Program of Algorithm 2 in MATLAB



```
1 - A = input('matrix ');
2 - N=min(size(A));
3 - B=zeros(N,N+1);
4 - for k=1:N;
5 -     i = input('Choose i which a_ii~=0: ');
6 -     B(:,i)=A(:,i);
7 -     tic
8 -     for j=1:N;
9 -         if j==i;
10 -             for h=i+1:N+1;
11 -                 B(j,h)=A(j,h)/A(i,i);
12 -             end
13 -         else j~=i;
14 -             m=A(j,i)/A(i,i);
15 -             for h=i+1:N+1;
16 -                 B(j,h)=A(j,h)-A(i,h)*m;
17 -             end
18 -         end
19 -     end
20 -     toc
21 -     A(:, :) = B(:, :)
22 - end
23 -
```

Program of Gauss-Jordan in MATLAB

```

1 - A = input('matrix ');
2 - N=min(size(A));
3 - B=zeros(N,N+1);
4 - for k=1:N;
5 -     i = input('Choose i which a_ii~=0: ');
6 -     tic
7 -     for j=1:N;
8 -         if j==i;
9 -             for h=1:N+1;
10 -                 B(j,h)=A(j,h)/A(i,i);
11 -             end
12 -         else j~=i;
13 -             m=A(j,i)/A(i,i);
14 -             for h=1:N+1;
15 -                 B(j,h)=A(j,h)-A(i,h)*m;
16 -             end
17 -         end
18 -     end
19 -     toc
20 -     A(:, :) = B(:, :)
21 - end
22 -

```

We use these two computer programs for comparisons of time used in each algorithm. Note that these two programs can be used with the linear system such that for each i^{th} iteration, $a_{ii} \neq 0$ when $i = 1, 2, 3, \dots, n$ respectively.

Algorithm 2

```

1 - format rat
2 - M = input('matrix ');
3 - SizeM = min(size(M));
4 - ZM = zeros(SizeM,SizeM+1);
5 - j = 0;
6 - i = input('Choose i which a_ii~=0: ');
7 - j = j+1;
8 - PC(j) = i;
9
10 - while i > 0
11 -     ZM(:,i) = M(:,i);
12 -     % tic
13 -     for r = 1:SizeM;
14 -         if r == i
15 -             for c = 1:SizeM+1;
16 -                 l=0;
17 -                 k=1;
18 -                 while l<j && k>0
19 -                     l = l+1;
20 -                     if c == PC(l)
21 -                         k = 0;
22 -                     end
23 -                 end
24 -                 if k > 0
25 -                     ZM(r,c)=M(r,c)/M(i,i);
26 -                 end
27 -             end
28 -         else
29 -             m=M(r,i)/M(i,i);
30 -             for c = 1:SizeM+1;
31 -                 l=0;
32 -                 k=1;
33 -                 while l<j && k>0
34 -                     l = l+1;
35 -                     if c == PC(l)
36 -                         k = 0;
37 -                     end
38 -                 end
39 -                 if k > 0
40 -                     ZM(r,c)=M(r,c)-M(i,c)*m;
41 -                 end
42 -             end
43 -         end
44 -     end
45 -     M(:,i) = ZM(:,i);
46 -     % toc
47 -     if j < SizeM
48 -         i = input('Choose i which a_ii~=0: ');
49 -         j = j+1;
50 -         PC(j) = i;
51 -     else
52 -         i = 0;
53 -     end
54 - end

```

Note that the above program can be used with any linear system such that each iteration, there is $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $a_{i_0 i_0} \neq 0$

Example B.0.1. Find the solution of linear system

$$x - 2y + 3z = 9$$

$$-x + 3y = 4$$

$$2x - 5y + 5z = 17$$

by used program for solving the answer.

Solution

```
matrix [1,-2,3,9;-1,3,0,-4;2,-5,5,17];
Choose i which a_ii~=0: 2
```

M =

1/3	-2	3	19/3
-1/3	3	0	-4/3
1/3	-5	5	31/3

```
Choose i which a_ii~=0: 3
```

M =

2/15	-2	3	2/15
-1/3	3	0	-4/3
1/15	-5	5	31/15

```
Choose i which a_ii~=0: 1
```

M =

2/15	-2	3	1
-1/3	3	0	-1
1/15	-5	5	2

All rights reserved

Hence $x = 1, y = -1, z = 2$.

CURRICULUM VITAE

Author's Name	Mr. Eknarin Jankaew
Date of Birth	November 8, 1984
Place of Birth	Chiang Rai Province, Thailand
Education Background	In 2002: Mathayom Suksa 6, Thoeng Wittayakhom School, Chiang Rai, Thailand In 2006: Bachelor of Science in Mathematics, Naresuan University, Phitsanulok, Thailand
Scholarship	The Promotion of Science and Mathematics Talent Teacher (PSMT)

