

CHAPTER 3

Main Results

In this chapter, we will employ the algorithm of Jafree et al.[5] applying with the augmented matrix $[A|B]$ to obtain a solution of the system of linear equations, $AX = B$.

3.1 Algorithm for Solving Linear System

For linear system

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

We can write linear system (3.1) in form $AX = B$, where

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

And write (3.2) in augmented matrix form as follows:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right].$$

Set $a_{is} = b_i$ and set $s = n + 1$, we get

$$A^* = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & a_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & a_{ns} \end{array} \right].$$

Algorithm 1 (for finding A^{-1} and solutions of $AX = B$)

Step 1. Set $I := \{1, 2, \dots, n\}, J := \{1, 2, \dots, n, s\}$. Construct augmented matrix $[A|B]$ say A^* .

Step 2. Choose $i \in I$ and $i \in J - \{s\}, a_{ii} \neq 0$.

Step 3. For $i \in I, i \in J$,

- (1) $a_{ij} := \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \forall j \in J - \{i\}$,
- (2) $m_k := -\frac{a_{ki}}{a_{ii}}, \forall k \in I - \{i\}, a_{ki} := m_k, \forall k \in I - \{i\}, a_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$,
- (3) $a_{kq} := a_{kq} + a_{iq}m_k, \forall k \in I - \{i\}, \forall q \in J - \{i\}$.

Step 4. Set $J := J - \{i\}$. If $J := \{s\}$, goto step 5. Otherwise, update A^* and goto Step 2.

Step 5. Solution is the s^{th} column of A^* , that is,

$$X = \begin{bmatrix} a_{1s} \\ a_{2s} \\ \vdots \\ a_{ns} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A^{-1} = [a_{ij}], \quad \forall i \in I, j \in J - \{s\}.$$

By above algorithm, we can explain in an easy way for understanding as follows:

1. Set $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Construct augmented matrix $[A|B]$ say A^* .
2. Choose $i \in I, a_{ii} \neq 0$.
3. (1) Divide row i^{th} by a_{ii} (except $a_{ii} := \frac{1}{a_{ii}}$),
 (2) Column i^{th} divided by $-a_{ii}$ (except a_{ii}),
 (3) Another rows use row operation by $r_k := r_k - \frac{a_{ki}}{a_{ii}}r_i$.
4. Set $I' = I - \{i\}$.
5. If $I' = \emptyset$, then the solution of the linear system is the last column of A^* and $A^{-1} = [a_{ij}], \forall i \in I, j \in J - \{s\}$. If $I' \neq \emptyset$, then set $I := I'$ and goto 2.

Algorithm 2 (for finding solutions of $AX = B$)

Step 1. Set $I := \{1, 2, \dots, n\}, J := \{1, 2, \dots, n, s\}$. Construct augmented matrix $A_0^* := [A|B]$. Set $l = 1$.

Step 2. Set $A_l^* := A_{l-1}^*$. Choose $i \in I \cap J, a_{ii} \neq 0$.

Step 3. For $i \in I, i \in J$, let

- (1) $a_{ij} := \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \forall j \in J - \{i\}$,
- (2) $m_k := -\frac{a_{ki}}{a_{ii}}, \forall k \in I - \{i\}$,
 $a_{kq} := a_{kq} + a_{iq}m_k, \forall k \in I - \{i\}, \forall q \in J - \{i\}$,
- (3) $a_{ki} := *, \forall k \in I$,
- (4) update A_l^* .

Step 4. Set $J := J - \{i\}$.

If $l = n - 1$, go to Step 6. If $l = n$ goto Step 5. Otherwise, set $l := l + 1$ and goto Step 2.

Step 5. Solution of $AX = B$ is the s^{th} column of A_n^* , that is $\begin{bmatrix} a_{1s}^{(n)} \\ a_{2s}^{(n)} \\ \vdots \\ a_{ns}^{(n)} \end{bmatrix}$ and exit.

Step 6. If there is an $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $a_{i_0 i_0} = 0$ and $a_{i_0 s} = 0$, then the linear system $AX = B$ has many solutions and exit.

If there is an $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $a_{i_0 i_0} = 0$ and $a_{i_0 s} \neq 0$, then the linear system $AX = B$ has no solutions and exit.

By above algorithm we can explain in an easy way for understanding as follows:

Step 1. Construct augmented matrix $[A|B]$ say A^* .

Step 2. Set $I := \{1, 2, \dots, n\}$.

Step 3. Choose $i \in I, a_{ii} \neq 0$, and

- (1) divide row i^{th} by a_{ii} (except a_{ii}),
- (2) use row operation $r_k := r_k - \frac{a_{ki}}{a_{ii}} r_i$ (except column i^{th}) for another rows,
- (3) write * in column i^{th} .
- (4) update A^* .

Step 4. Set $I := I - \{i\}$.

If $I = \emptyset$, then goto Step 5.

If $I \neq \emptyset$, then goto Step 3.

If $I = \{i_0\}$ for some $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, then goto Step 6.

Step 5. The answer of linear system is the last column of A^* .

Step 6. If there is an $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $a_{i_0 i_0} = 0$ and $a_{i_0 s} = 0$, then the linear system $AX = B$ has many solutions and exit.

If there is an $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that $a_{i_0 i_0} = 0$ and $a_{i_0 s} \neq 0$, then the linear system $AX = B$ has no solutions and exit.

Theorem 3.1.1. Let $AX = B$ be a linear system of equations of n equations and n unknowns. Let $A_0^* = [A|B]$ be an augmented matrix. Let L be the number of the last iteration of Algorithm 2.

1. If $L = n$, then the linear system $AX = B$ has exactly one solution and its solution is the s^{th} column of A_n^* .

2. If $L = n - 1$ and there is an $i_0 \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ such that the elements $a_{i_0 i_0}^{(n-1)}$ and $a_{i_0 s}^{(n-1)}$

of A_{n-1}^* are zero, then the linear system $AX = B$ has many solutions.

3. If $L = n - 1$ and there is an $i_0 \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ such that the elements $a_{i_0 i_0}^{(n-1)}$ and $a_{i_0 s}^{(n-1)}$ of A_{n-1}^* are such that $a_{i_0 i_0}^{(n-1)} = 0$ and $a_{i_0 s}^{(n-1)} \neq 0$, then the linear system $AX = B$ has no solution.

Proof. Let $A_0^* := [A|B]$ and $[A^{(0)}|B^{(0)}] = [A|B]$, let A_i^* be the matrix obtained from A_{i-1}^* by using the i^{th} iteration of Algorithm 2 and let $[A^{(i)}|B^{(i)}]$ be matrix obtained from $[A^{(i-1)}|B^{(i-1)}]$ by row operations of the i^{th} iteration of Algorithm 2, $i = 1, 2, \dots, n$.

Let $l = 1$. For convenience, we assume that $a_{11} \neq 0$, by Step 3(1), we divide the row r_1 by a_{11} and by Step 3(2), we use row operation $r_k := r_k - \frac{a_{k1}}{a_{11}}r_1, \forall k = 2, 3, \dots, n$. Then, we obtain

$$A_1^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1s}^{(1)} \\ * & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2s}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{ns}^{(1)} \end{array} \right]$$

and

$$[A^{(1)}|B^{(1)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & a_{1s}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2s}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{ns}^{(1)} \end{array} \right]$$

We note that after the Step 4 of the 1st iteration, we get $l = 2$. Next, we consider $a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(1)}, \dots, a_{nn}^{(1)}$. For convenience, we may assume that $a_{22}^{(1)} \neq 0$. By Step 3(1), we divide the row r_2 by $a_{22}^{(1)}$ and by Step 3(2), we use row operation $r_k := r_k - \frac{a_{k2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}r_2, \forall k = 1, 3, 4, \dots, n$.

Then, we obtain

$$A_2^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & a_{13}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & a_{1s}^{(2)} \\ * & * & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2s}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{ns}^{(2)} \end{array} \right]$$

and

$$[A^{(2)}|B^{(2)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & a_{1s}^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & a_{2s}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{ns}^{(2)} \end{array} \right].$$

By continuing in using Algorithms if $L = n$, then we obtain

$$A_n^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & \cdots & * & a_{1s}^{(n)} \\ * & * & * & \cdots & * & a_{2s}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & a_{ns}^{(n)} \end{array} \right]$$

and

$$[A^{(n)}|B^{(n)}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1s}^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & a_{2s}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{ns}^{(n)} \end{array} \right],$$

and the solution of $AX = B$ is

$$\begin{bmatrix} a_{1s}^{(n)} \\ a_{2s}^{(n)} \\ \vdots \\ a_{ns}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

If $L = n - 1$ and there is an $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that the elements $a_{i_0 i_0}^{(n-1)}$ and $a_{i_0 s}^{(n-1)}$ of A_{n-1}^* are zero, then we get

$$A_{(n-1)}^* = i_0 \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} * & * & \cdots & * & a_{1i_0}^{(n-1)} & * & \cdots & * & a_{1s}^{(n-1)} \\ * & * & \cdots & * & a_{2i_0}^{(n-1)} & * & \cdots & * & a_{2s}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & * & a_{(n-1)i_0}^{(n-1)} & * & \cdots & * & a_{(n-1)s}^{(n-1)} \\ * & * & \cdots & * & a_{ni_0}^{(n-1)} & * & \cdots & * & a_{ns}^{(n-1)} \end{array} \right]$$

and

$$[A^{(n-1)}|B^{(n-1)}] = i_0 \left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1s}^{(n-1)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2s}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(n-1)s}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{ns}^{(n-1)} \end{array} \right].$$

This implies that $\text{rank}[A|B] = n - 1$. By Theorem 2.1.10, we can conclude that the linear system of $AX = B$ has many solutions.

If $L = n - 1$ and there is an $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ such that the elements $a_{i_0 i_0}^{(n-1)} = 0$ and $a_{i_0 s}^{(n-1)} \neq 0$, then we obtain

$$[A^{(n-1)}|B^{(n-1)}] = i_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1s}^{(n-1)} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2s}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i_0 s}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(n-1)s}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{ns}^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Which implies that $\text{rank} A = n - 1 < \text{rank}[A|B] = n$. By Theorem 2.1.10, we can conclude that the linear system of $AX = B$ has no solutions. □

Example 3.1.2. Find the solution of the following linear system by using Algorithm 1 :

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17. \end{aligned}$$

Solution. Set $I := \{1, 2, 3\}$, $J := \{1, 2, 3, 4\}$ and set

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array} \right].$$

Iteration 1. Taking $i = 1$, we have

$$c_1 := \frac{1}{-a_{11}} c_1 \text{ except } a_{11}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \quad \begin{aligned} r_1 &:= \frac{1}{a_{11}} r_1 (\text{except } a_{11} := \frac{1}{a_{11}}) \\ r_2 &:= r_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} r_1 (\text{except } a_{21}) \\ r_3 &:= r_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} r_1 (\text{except } a_{31}) \end{aligned}.$$

So $I := \{1, 2, 3\}$, $J := \{2, 3, 4\}$.

Iteration 2. Taking $i = 2$ we have

$$c_2 := \frac{1}{-a_{22}}c_2 \text{ except } a_{22}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 9 & 19 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 - \frac{a_{12}}{a_{22}}r_2(\text{except } a_{12}) \\ r_2 := \frac{1}{a_{22}}r_2(\text{except } a_{22} := \frac{1}{a_{22}}) \\ r_3 := r_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}}r_2(\text{except } a_{32}) \end{array} .$$

So $I := \{1, 2, 3\}, J := \{3, 4\}$.

Iteration 3. Taking $i = 3$, we have

$$c_3 := \frac{1}{-a_{33}}c_3 \text{ except } a_{33}$$

$$A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 - \frac{a_{13}}{a_{33}}r_3(\text{except } a_{13}) \\ r_2 := r_2 - \frac{a_{23}}{a_{33}}r_3(\text{except } a_{23}) \\ r_3 := \frac{1}{a_{33}}r_3(\text{except } a_{33} := \frac{1}{a_{33}}) \end{array} .$$

So $I := \{1, 2, 3\}, J := \{4\}$.

Thus $x = 1, y = -1, z = 2$ and we observe that

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{15}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right] .$$

From above example we obtain an inverse of a matrix A and the solution of the linear system $AX = B$, If we are interesting to find only a solution of the linear system, we can use Algorithm 2.

Example 3.1.3. Find the solution of the following linear system by using Algorithm 2

$$x - 2y + 3z = 9$$

$$-x + 3y = -4$$

$$2x - 5y + 5z = 17.$$

Solution. Set $I := \{1, 2, 3\}, J := \{1, 2, 3, 4\}$ and set

$$A_0^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{array} \right] .$$

Iteration 1. Taking $i = 1$, we get

$$A_1^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & -2 & 3 & 9 \\ * & 1 & 3 & 5 \\ * & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 := r_2 + r_1 \\ r_3 := r_3 - 2r_1 \end{array} .$$

So $I := \{1, 2, 3\}, J := \{2, 3, 4\}$.

Iteration 2. Taking $i = 2$, we get

$$A_2^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & 9 & 19 \\ * & * & 3 & 5 \\ * & * & 2 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 + 2r_2 \\ \\ r_3 := r_3 + r_2 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3\}, J := \{3, 4\}$.

Iteration 3. Taking $i = 3$, we get

$$A_3^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & 1 \\ * & * & * & -1 \\ * & * & * & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 - \frac{9}{2}r_3 \\ r_2 := r_2 - \frac{3}{2}r_3 \\ \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3\}, J := \{4\}$.

Thus $x = 1, y = -1, z = 2$.

The following example shows what is different between the Algorithm 1 and Gauss-Jordan method.

Example 3.1.4. Find the solution of linear system

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 8 \\ 5x_1 - 4x_2 &= -3. \end{aligned}$$

Solution. Consider

$$\overbrace{\left[\begin{array}{c|c} B & A \end{array} \right]}^{\text{Algorithm 1}} \overbrace{\left[\begin{array}{c|c} A & I \end{array} \right]}^{\text{Gauss-Jordan method}} \left[\begin{array}{c|c} I & B \end{array} \right].$$

Set $I = \{1, 2\}, J = \{1, 2, 3\}$ and

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc|c} 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 5 & -4 & 5 & -4 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right].$$

Iteration 1. Taking $i = 1$, we get

$$\begin{aligned} r_1 &:= \frac{1}{2}r_1 \\ r_2 &:= r_2 - \frac{5}{2}r_1 \end{aligned} \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|c} 4 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ -23 & -\frac{5}{2} & -\frac{23}{2} & 5 & -4 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ r_2 := r_2 - 5r_1 \end{array}.$$

So $I = \{1, 2\}, J = \{2, 3\}$.

Iteration 2. Taking $i = 2$, we get

$$r_1 := r_1 + \frac{3}{23}r_2 \quad \left[\begin{array}{c|cc|c|c|c|c|c|c} 1 & \frac{4}{23} & \frac{3}{23} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 2 & \frac{5}{23} & -\frac{2}{23} & 0 & 1 & \frac{5}{23} & -\frac{2}{23} & 2 \end{array} \right] \quad r_2 := -\frac{2}{23}r_2$$

$$\left[\begin{array}{c|cc|c|c|c|c|c|c} 1 & \frac{4}{23} & \frac{3}{23} & 1 & 0 & \frac{4}{23} & \frac{3}{23} & 1 \\ 2 & \frac{5}{23} & -\frac{2}{23} & 0 & 1 & \frac{5}{23} & -\frac{2}{23} & 2 \end{array} \right] \quad r_1 := r_1 - \frac{3}{2}r_2.$$

So $I = \{1, 2\}, J = \{3\}$.

Thus $x_1 = 1, x_2 = 2$.

Example 3.1.5. Find the solution of linear system

$$5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -11$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 18$$

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 22.$$

Solution. Consider

$$\overbrace{\left[\begin{array}{c|c} B & A \end{array} \right]}^{\text{Algorithm1}} \overbrace{\left[\begin{array}{c|c|c} A & I & B \end{array} \right]}^{\text{Gauss-Jordan method}}.$$

Set $I = \{1, 2, 3\}, J = \{1, 2, 3, 4\}$ and

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c} -11 & 5 & 6 & -2 & 5 & 6 & -2 & 1 & 0 & 0 & -11 \\ 18 & 3 & -2 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ 22 & 2 & -3 & 4 & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

Iteration 1. Taking $i = 1$, we get

$$\begin{array}{l} r_1 := \frac{1}{5}r_1 \\ r_2 := r_2 - \frac{3}{5}r_1 \\ r_3 := r_3 - \frac{2}{5}r_1 \end{array} \left[\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c} -\frac{11}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{11}{5} \\ \frac{123}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{28}{5} & \frac{11}{5} & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 18 \\ \frac{132}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{27}{5} & \frac{24}{5} & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 22 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c} -\frac{11}{5} & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{11}{5} \\ \frac{123}{5} & -\frac{3}{5} & -\frac{28}{5} & \frac{11}{5} & 0 & -\frac{28}{5} & \frac{11}{5} & -\frac{3}{5} & 1 & 0 & \frac{123}{5} \\ \frac{132}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{27}{5} & \frac{24}{5} & 0 & -\frac{27}{5} & \frac{24}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & \frac{132}{5} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} r_2 := r_2 - 3r_1 \\ r_3 := r_3 - 2r_1 \end{array}$$

So $I = \{1, 2, 3\}, J = \{2, 3, 4\}$.

Iteration 2. Taking $i = 2$, we get

$$\begin{array}{l} r_1 := r_1 + \frac{3}{14}r_2 \\ r_3 := r_3 - \frac{27}{28}r_2 \end{array} \left[\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c} \frac{43}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & 1 & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & -\frac{11}{5} \\ -\frac{123}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{5}{28} & -\frac{11}{28} & 0 & 1 & -\frac{11}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{5}{28} & 0 & -\frac{123}{28} \\ \frac{75}{28} & \frac{5}{28} & -\frac{27}{28} & \frac{75}{28} & 0 & -\frac{27}{28} & \frac{24}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 & \frac{132}{5} \end{array} \right] \quad r_2 := -\frac{5}{28}r_2$$

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc|c} \frac{43}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & 1 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & 0 & \frac{43}{14} \\ -\frac{123}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{5}{28} & -\frac{11}{28} & 0 & 1 & -\frac{11}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{5}{28} & 0 & -\frac{123}{28} \\ \frac{75}{28} & \frac{5}{28} & -\frac{27}{28} & \frac{75}{28} & 0 & 0 & \frac{75}{28} & \frac{5}{28} & -\frac{27}{28} & 1 & \frac{75}{28} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} r_1 := r_1 - \frac{6}{5}r_2 \\ r_3 := r_3 + \frac{27}{5}r_2 \end{array}.$$

So $I = \{1, 2, 3\}, J = \{3, 4\}$.

Iteration 3. Taking $i = 3$, we get

$$\begin{aligned} r_1 &:= r_1 - \frac{2}{75}r_3 \\ r_2 &:= r_2 - \frac{11}{5}r_3 \end{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc|c} 3 & \frac{1}{15} & \frac{6}{25} & -\frac{2}{75} & 1 & 0 & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{14} & 0 & \frac{43}{14} \\ -4 & \frac{2}{15} & -\frac{8}{25} & \frac{11}{75} & 0 & 1 & -\frac{11}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{5}{28} & 0 & -\frac{123}{28} \\ 1 & \frac{1}{15} & -\frac{9}{25} & \frac{28}{75} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{15} & -\frac{9}{25} & \frac{28}{75} & 1 \end{array} \right] \begin{aligned} r_3 &:= \frac{28}{75}r_3 \\ r_1 &:= r_1 - \frac{1}{14}r_3 \\ r_2 &:= r_2 + \frac{11}{28}r_3 \end{aligned}$$

So $I = \{1, 2, 3\}, J = \{4\}$.

Thus $x_1 = 3, x_2 = -4, x_3 = 1$.

By example above we see that for each iteration the i^{th} columns of I_n was removed to i^{th} of A and so on. Thus we get inverse matrix and the solution of linear equation.

Next, we will use Algorithm 2 for solving solutions of the linear system.

Example 3.1.6. Find the solution of linear system

$$\begin{aligned} 10x_1 - 3x_2 + 9x_3 - 14x_4 &= 9 \\ 7x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 12x_4 &= 10 \\ 13x_1 - x_2 + 8x_3 - 19x_4 &= -15 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 &= -1. \end{aligned}$$

Solution. Set $I := \{1, 2, 3, 4\}, J := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and set

$$A_0^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 10 & -3 & 9 & -14 & 9 \\ 7 & 8 & -2 & 12 & 10 \\ 13 & -1 & 8 & -19 & -15 \\ 3 & 6 & -2 & 7 & -1 \end{array} \right].$$

Iteration 1. Taking $i = 1$, we get

$$A_1^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & -\frac{3}{10} & \frac{9}{10} & -\frac{14}{10} & \frac{9}{10} \\ * & \frac{101}{10} & -\frac{83}{10} & \frac{109}{5} & \frac{37}{10} \\ * & \frac{29}{10} & -\frac{37}{10} & -\frac{4}{5} & -\frac{267}{10} \\ * & \frac{69}{10} & -\frac{47}{10} & \frac{56}{5} & -\frac{37}{10} \end{array} \right] \begin{aligned} r_2 &:= r_2 - \frac{7}{10}r_1 \\ r_3 &:= r_3 - \frac{13}{10}r_1 \\ r_4 &:= r_4 - \frac{3}{10}r_1 \end{aligned}$$

So $I := \{1, 2, 3, 4\}$, $J := \{2, 3, 4, 5\}$.

Iteration 2. Taking $i = 2$, we get

$$A_2^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & \frac{66}{101} & -\frac{76}{101} & \frac{102}{101} \\ * & * & -\frac{83}{101} & \frac{218}{101} & \frac{37}{101} \\ * & * & -\frac{133}{101} & -\frac{713}{101} & -\frac{2804}{101} \\ * & * & \frac{98}{101} & -\frac{373}{101} & -\frac{629}{101} \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 + \frac{3}{101}r_2 \\ r_3 := r_3 - \frac{29}{101}r_2 \\ r_4 := r_4 - \frac{69}{101}r_2 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4\}$, $J := \{3, 4, 5\}$.

Iteration 3. Taking $i = 3$, we get

$$A_3^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & -\frac{566}{133} & -\frac{1698}{133} \\ * & * & * & \frac{873}{133} & \frac{2353}{133} \\ * & * & * & \frac{713}{133} & \frac{2804}{133} \\ * & * & * & -\frac{169}{19} & -\frac{507}{19} \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 + \frac{66}{133}r_3 \\ r_2 := r_2 - \frac{83}{133}r_3 \\ r_4 := r_4 + \frac{98}{133}r_3 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4\}$, $J := \{4, 5\}$.

Iteration 4. Taking $i = 4$, we get

$$A_4^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & 0 \\ * & * & * & * & -2 \\ * & * & * & * & 5 \\ * & * & * & * & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 - \frac{566}{1183}r_4 \\ r_2 := r_2 + \frac{873}{1183}r_4 \\ r_3 := r_3 + \frac{713}{1183}r_4 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4\}$, $J := \{5\}$.

Thus $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 5$, $x_4 = 3$.

Example 3.1.7. Find the solution of linear system

$$2x_1 + 8x_2 - 11x_3 - 32x_4 + 15x_5 = 11$$

$$7x_1 - 3x_2 + 10x_3 - 18x_4 - 3x_5 = 49$$

$$5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 14x_4 - 13x_5 = 34$$

$$9x_1 + 14x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 7x_5 = 38$$

$$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 12x_5 = -14.$$

Solution. Set $I := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $J := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ and set

$$A_0^* = \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 8 & -11 & -32 & 15 & 11 \\ 7 & -3 & 10 & -18 & -3 & 49 \\ 5 & 10 & 7 & 14 & -13 & 34 \\ 9 & 14 & 3 & -2 & -7 & 38 \\ 7 & 3 & -5 & -6 & 12 & -14 \end{array} \right].$$

Iteration 1. Taking $i = 1$, we get

$$A_1^* = \left[\begin{array}{ccccc|c} * & 4 & -\frac{11}{2} & -16 & \frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ * & -31 & \frac{97}{2} & 94 & -\frac{111}{2} & \frac{21}{2} \\ * & -10 & \frac{69}{2} & 94 & -\frac{101}{2} & \frac{13}{2} \\ * & -22 & \frac{105}{2} & 142 & -\frac{149}{2} & -\frac{23}{2} \\ * & -25 & \frac{67}{2} & 106 & -\frac{81}{2} & -\frac{105}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 := r_2 - \frac{7}{2}r_1 \\ r_3 := r_3 - \frac{5}{2}r_1 \\ r_4 := r_4 - \frac{9}{2}r_1 \\ r_5 := r_5 - \frac{7}{2}r_1 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4, 5\}, J := \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Iteration 2. Taking $i = 2$, we get

$$A_2^* = \left[\begin{array}{ccccc|c} * & * & \frac{47}{62} & -\frac{120}{31} & \frac{21}{62} & \frac{425}{62} \\ * & * & -\frac{97}{62} & -\frac{94}{31} & \frac{111}{62} & -\frac{21}{62} \\ * & * & \frac{1169}{62} & \frac{1974}{31} & -\frac{2021}{62} & \frac{193}{62} \\ * & * & \frac{1121}{62} & \frac{2334}{31} & -\frac{2177}{62} & -\frac{1175}{62} \\ * & * & -\frac{174}{31} & \frac{936}{31} & \frac{132}{31} & -\frac{1890}{31} \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 + \frac{4}{31}r_2 \\ r_3 := r_3 - \frac{10}{31}r_2 \\ r_4 := r_4 - \frac{22}{31}r_2 \\ r_5 := r_5 - \frac{25}{31}r_2 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4, 5\}, J := \{3, 4, 5, 6\}$.

Iteration 3. Taking $i = 3$, we get

$$A_3^* = \left[\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & -\frac{1074}{167} & \frac{1928}{1169} & \frac{7867}{1169} \\ * & * & * & \frac{376}{167} & -\frac{1069}{1169} & -\frac{94}{1169} \\ * & * & * & \frac{564}{167} & -\frac{2021}{1169} & \frac{193}{1169} \\ * & * & * & \frac{2376}{167} & -\frac{4506}{1169} & -\frac{794964}{36239} \\ * & * & * & \frac{8208}{167} & -\frac{6366}{1169} & -\frac{70188}{1169} \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 - \frac{47}{1169}r_3 \\ r_2 := r_2 + \frac{97}{1169}r_3 \\ r_4 := r_4 - \frac{1121}{1169}r_3 \\ r_5 := r_5 + \frac{348}{1169}r_3 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4, 5\}, J := \{4, 5, 6\}$.

Iteration 4. Taking $i = 4$, we get

$$A_4^* = \left[\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & -\frac{43}{462} & -\frac{736}{231} \\ * & * & * & * & -\frac{211}{693} & \frac{2350}{693} \\ * & * & * & * & -\frac{188}{231} & \frac{1241}{231} \\ * & * & * & * & -\frac{751}{2772} & -\frac{2137}{1386} \\ * & * & * & * & \frac{606}{77} & \frac{1212}{77} \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 + \frac{179}{396}r_4 \\ r_2 := r_2 - \frac{47}{297}r_4 \\ r_3 := r_3 - \frac{47}{198}r_4 \\ r_5 := r_5 - \frac{38}{11}r_4 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4, 5\}, J := \{5, 6\}$.

Iteration 5. Taking $i = 5$, we get

$$A_5^* = \left[\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & * & -3 \\ * & * & * & * & * & 4 \\ * & * & * & * & * & 7 \\ * & * & * & * & * & -1 \\ * & * & * & * & * & 2 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 + \frac{43}{3636}r_5 \\ r_2 := r_2 + \frac{211}{5454}r_5 \\ r_3 := r_3 + \frac{94}{909}r_5 \\ r_4 := r_4 + \frac{751}{21816}r_5 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4, 5\}, J := \{6\}$.

Thus $x_1 = -3, x_2 = 4, x_3 = 7, x_4 = -1, x_5 = 2$.

Example 3.1.8. Find the solution of linear systems

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6$$

$$2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1.$$

Solution. Set $I := \{1, 2, 3, 4\}, J := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ and set

$$A_0^* = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right].$$

Iteration 1. Taking $i = 1$, we have

$$A_1^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{11}{2} \\ * & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ * & 2 & 5 & 2 & 5 \\ * & 0 & \frac{3}{2} & 3 & -\frac{9}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 := r_2 - \frac{1}{2}r_1 \\ r_3 := r_3 - \frac{0}{2}r_1 \\ r_4 := r_4 - \frac{1}{2}r_1 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4\}, J := \{2, 3, 4, 5\}$.

Iteration 2. Taking $i = 3$, we have

$$A_2^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & \frac{2}{5} & * & \frac{2}{5} & 4 \\ * & -\frac{1}{5} & * & \frac{4}{5} & 0 \\ * & \frac{2}{5} & * & \frac{2}{5} & 1 \\ * & -\frac{3}{5} & * & \frac{12}{5} & -6 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 - \frac{3}{10}r_3 \\ r_2 := r_2 - \frac{1}{10}r_3 \\ r_4 := r_4 - \frac{3}{10}r_3 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4\}, J := \{2, 4, 5\}$.

Iteration 3. Taking $i = 4$, we have

$$A_3^* = \left[\begin{array}{cccc|c} * & \frac{1}{2} & * & * & 5 \\ * & 0 & * & * & 2 \\ * & \frac{1}{2} & * & * & 2 \\ * & -\frac{1}{4} & * & * & -\frac{5}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 - \frac{1}{6}r_4 \\ r_2 := r_2 - \frac{1}{3}r_4 \\ r_3 := r_3 - \frac{1}{6}r_4 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3, 4\}, J := \{2, 5\}$.

Iteration 4. Taking $i_0 = 2$, we see that $a_{25} \neq 0$. By Theorem 3.1.1, we can conclude that

the system of linear equations have no solution.

Example 3.1.9. Find the solution of linear system

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 2 \\x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\3x_1 + x_2 - x_3 &= 3.\end{aligned}$$

Solution. Set $I := \{1, 2, 3\}, J := \{1, 2, 3, 4\}$ and set

$$A_0^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right].$$

Iteration 1. Taking $i = 1$, we have

$$A_1^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & 1 & 0 & 2 \\ * & 2 & 1 & 3 \\ * & -2 & -1 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 := r_2 - r_1 \\ r_3 := r_3 - 3r_1 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3\}, J := \{2, 3, 4\}$.

Iteration 2. Taking $i = 2$, we have

$$A_2^* = \left[\begin{array}{ccc|c} * & * & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ * & * & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ * & * & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 := r_1 - \frac{1}{2}r_2 \\ r_3 := r_3 + r_2 \end{array}.$$

So $I := \{1, 2, 3\}, J := \{3, 4\}$.

Iteration 3. Taking $i = 3$ we see that $a_{34} = 0$. By Theorem 3.1.1, we can conclude that the system of linear equations have many solutions.

This method can help you save time for solve linear system.

The following table shows comparison of the number of computations in each methods.

Table 1 : Comparison of number of computations for various methods.

size of A	Gaussian	Gauss-Jordan	$X = A^{-1}B$	Cramer	LU	Algorithm 2
2×2	5	10	14	11	8	6
3×3	14	27	39	39	40	18
4×4	30	56	84	109	125	40
5×5	55	100	155	251	264	75

The following table shows comparison of the time of computations between Algorithm 2 and Gauss-Jordan.

Table 2 : Comparison of time of computations for Algorithm 2 and Gauss-Jordan.

iteration\size of A	2×2		3×3	
i	Algorithm 2	Gauss-Jordan	Algorithm 2	Gauss-Jordan
1	0.000016	0.000018	0.000015	0.000019
2	0.000016	0.000017	0.000015	0.000027
3	-	-	0.000014	0.000018
Total time	0.000032	0.000035	0.000044	0.000064

iteration\size of A	4×4		5×5	
i	Algorithm 2	Gauss-Jordan	Algorithm 2	Gauss-Jordan
1	0.000017	0.000031	0.000018	0.000023
2	0.000015	0.000022	0.000020	0.000022
3	0.000014	0.000020	0.000016	0.000021
4	0.000014	0.000015	0.000015	0.000021
5	-	-	0.000014	0.000021
Total time	0.000060	0.000088	0.000083	0.000108

iteration\size of A	20×20		30×30	
i	Algorithm 2	Gauss-Jordan	Algorithm 2	Gauss-Jordan
1	0.000053	0.000101	0.000091	0.000205
2	0.000046	0.000101	0.000087	0.000199
3	0.000047	0.000099	0.000079	0.000195
4	0.000041	0.000100	0.000079	0.000260
5	0.000039	0.000100	0.000062	0.000198
6	0.000038	0.000100	0.000062	0.000199
7	0.000036	0.000100	0.000068	0.000201
8	0.000034	0.000099	0.000068	0.000197
9	0.000035	0.000099	0.000064	0.000198
10	0.000033	0.000099	0.000072	0.000198
11	0.000030	0.000118	0.000060	0.000195
12	0.000029	0.000099	0.000059	0.000198
13	0.000029	0.000100	0.000057	0.000222

iteration\size of A	20×20		30×30	
i	Algorithm 2	Gauss-Jordan	Algorithm 2	Gauss-Jordan
14	0.000027	0.000099	0.000055	0.000195
15	0.000027	0.000112	0.000053	0.000201
16	0.000024	0.000037	0.000072	0.000201
17	0.000023	0.000100	0.000050	0.000199
18	0.000024	0.000100	0.000047	0.000197
19	0.000019	0.000102	0.000046	0.000199
20	0.000021	0.000101	0.000043	0.000202
21	-	-	0.000041	0.000201
22	-	-	0.000039	0.000198
23	-	-	0.000036	0.000204
24	-	-	0.000033	0.000198
25	-	-	0.000032	0.000195
26	-	-	0.000030	0.000198
27	-	-	0.000030	0.000195
28	-	-	0.000025	0.000195
29	-	-	0.000024	0.000198
30	-	-	0.000021	0.000204
Total Time	0.000655	0.001966	0.00001585	0.006045

3.2 Instructional Lesson On Solving System of Linear Equations

In this section, we construct instructional lesson study on solving system of linear equations by introducing the Algorithm 2 for 30 students of Matthayom 4/1 from Plong Wittayakhom School and we taught this method by using the constructed material. We also have evaluated those students and obtain their opinions on the instructional lesson study.

Objective of the Study

1. To provide a new method for solving the system of linear equations for MS.4 students by using the constructed teaching material.
2. To develop mathematical skill for students for solving system of linear equations.
3. To encourage students for having motivation in studying and good attitude on mathematics.

The Quipments for the study

1. Teaching and learning Material.
2. Pre-Test and Post-Test.
3. Questionnaire on student opinions.

The results of the study are written in Thai as follows:

แบบรายงานผลการใช้สื่อเอกสารประกอบการเรียนการสอน
เรื่อง การแก้ระบบสมการด้วยวิธีการเขียนแบบใหม่
รายวิชาคณิตศาสตร์ (ค31202) ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

1. ที่มาของปัญหา

การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์มีจุดมุ่งหมายเพื่อให้ผู้เรียนได้ทั้งความรู้ กระบวนการและเจตคติ ผู้เรียนทุกคนควรได้รับการกระตุ้นส่งเสริมให้สนใจและกระตือรือร้นที่จะเรียนรู้คณิตศาสตร์ มีความสงสัยเกิดคำถามในสิ่งต่าง ๆ มีความมุ่งมั่นและมีความสุขที่จะศึกษาค้นคว้าสืบเสาะหาความรู้เพื่อรวบรวมข้อมูล วิเคราะห์ผล นำไปสู่คำตอบของคำถาม สามารถตัดสินใจด้วยการใช้ข้อมูลอย่างมีเหตุผล สามารถสื่อสารคำถาม คำตอบ ข้อมูลและสิ่งที่ค้นพบจากการเรียนรู้ให้ผู้อื่นเข้าใจได้ (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2537:5) ดังนั้นในกระบวนการจัดการเรียนรู้จำเป็นต้องผ่านกระบวนการขั้นหนึ่งที่สำคัญคือ การใช้สื่อเป็นตัวกลาง ซึ่งจะช่วยให้การเรียนรู้มีประสิทธิภาพ เอกสารประกอบการเรียนการสอนถือได้ว่าเป็นสื่อที่นิยมของคนทั่วไป ผู้เรียนสามารถเรียนรู้ด้วยตนเอง มีความสุขกับการเรียน จากการจัดการเรียนการสอนที่ผ่านมาพบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนในรายวิชาคณิตศาสตร์ค่อนข้างต่ำ ขำพเจ้าในฐานะครูผู้สอนจึงสนใจที่จะพัฒนาสื่อการเรียนการสอนโดยใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอน ซึ่งข้าพเจ้าคิดว่าน่าจะส่งผลให้ผู้เรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

2. แนวคิด หรือทฤษฎี

ปรีชา ช้างขวัญยืน และคณะ (2539 : 130) กล่าวถึงความหมายของแบบฝึกไว้ว่า แบบฝึก คือหนังสือที่ผู้เรียนใช้ควบคู่ไปกับสื่ออื่นๆ ที่ทำหน้าที่แทนครูหรือตำรา

ศศิธร ธัญลักษณ์นันท์ (2542 : 375) ให้ความหมายแบบฝึกเสริมทักษะว่า หมายถึง แบบฝึกเสริมทักษะที่ใช้ฝึกความเข้าใจ ฝึกทักษะต่าง ๆ และทดสอบความสามารถของนักเรียนตามบทเรียนที่ครูสอนว่า นักเรียนเข้าใจและสามารถนำไปใช้ได้มากน้อยเพียงใด

ชัยยงค์ พรหมวงศ์ (2543 : 490) กล่าวว่า แบบฝึกปฏิบัติ หมายถึง สิ่งที่นักเรียนจะต้องใช้ควบคู่ไปกับการเรียน มีลักษณะเป็นแบบฝึกครอบคลุมกิจกรรมการเรียนรู้ที่ผู้เรียนพึงกระทำจะแยกเป็นแต่ละหน่วย หรือรวมเป็นเล่มก็ได้

กุศยา แสงเดช (2545 : 5) ที่สรุปไว้ว่า แบบฝึกหัดหรือแบบฝึก คือ สื่อการเรียนการสอนอย่างหนึ่งที่ใช้ฝึกทักษะให้กับผู้เรียนหลังจากเรียนจบเนื้อหา

วศกร ดีชัยยา (2550) สรุปความหมาย แบบฝึก คือ งานหรือกิจกรรมที่ครูสร้างขึ้น โดยมีรูปแบบกิจกรรมที่หลากหลาย มีจุดมุ่งหมายเพื่อฝึกให้นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจบทเรียน ได้ดียิ่งขึ้น และช่วยฝึกทักษะต่าง ๆ ให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างแท้จริง อาจจะทำให้ให้นักเรียนทำแบบฝึกขณะเรียนหรือหลังจากจบบทเรียนไปแล้วก็ได้

กระทรวงศึกษาธิการ (ถวัล มาศจรัส 2548 : 18) ให้คำจำกัดความของแบบฝึกทักษะไว้ว่า กิจกรรมพัฒนาทักษะการเรียนรู้ที่ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสม มีความหลากหลายและปริมาณเพียงพอที่สามารถตรวจสอบและพัฒนาทักษะกระบวนการคิด กระบวนการเรียนรู้ สามารถนำผู้เรียนสู่การสรุปความ

คิดรวบยอดและหลักการสำคัญของสาระการเรียนรู้ รวมทั้งทำให้ผู้เรียนสามารถตรวจสอบความเข้าใจในบทเรียนด้วยตนเองได้

ทักษะทางคณิตศาสตร์

หน่วยศึกษานิเทศก์ สำนักงานการประถมศึกษาจังหวัดพิษณุโลก (2541 : 1) กล่าวว่า ในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์แต่ละครั้งนักเรียนย่อมมีโอกาสฝึกทักษะในด้านต่างๆ ทักษะที่สำคัญและจำเป็นจะต้องมีอยู่หลายประการ ได้แก่

- 1) ทักษะการอ่านเพื่อวิเคราะห์โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์
- 2) ทักษะการเขียนรูปหรือแผนภาพ
- 3) ทักษะการหาความสัมพันธ์ในปฏิกิริยาที่กำหนด
- 4) ทักษะการนำหลักการหรือทฤษฎีที่เรียนรู้แล้วมาใช้
- 5) ทักษะการแปลภาษาโจทย์เป็นภาษาคณิตศาสตร์
- 6) ทักษะการคิดคำนวณ
- 7) ทักษะการตรวจสอบผลลัพธ์

จากการศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับการจัดทำสื่อการเรียนการสอนในรูปชุดฝึกทักษะ ทำให้ผู้รายงานได้แนวคิดนำไปพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ โดยการสร้างสื่อการเรียนการสอน เรื่อง การแก้ระบบสมการโดยวิธีการแบบใหม่ เพื่อให้นักเรียนที่เจตคติที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และให้มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้น

3. วัตถุประสงค์ของการรายงาน

1. เพื่อพัฒนาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนและหลังการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอน
2. เพื่อศึกษาความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อเอกสารประกอบการเรียนการสอน

4. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ประโยชน์ต่อผู้เรียน

1. นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น
2. นักเรียนสามารถเรียนรู้ได้ตามความสนใจและความสามารถของตนเอง บทเรียนมีความยืดหยุ่นสามารถเรียนซ้ำได้ตามที่ต้องการ
3. เพื่อแก้ปัญหานักเรียนเรียนซ้ำ ได้ใช้สื่อประกอบการเรียนการสอน ทำให้นักเรียนมีความรู้ตามความต้องการของตนเอง นักเรียนมีความสุขในการเรียน
4. นักเรียนสามารถนำสื่อประกอบการเรียนการสอนไปศึกษาด้วยตนเอง หรือนอกเวลาเรียน เป็นการศึกษาค้นพบด้วยตนเอง
5. นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนคณิตศาสตร์

ประโยชน์ต่อครู

1. เป็นแนวในการปรับปรุงการเรียนการสอน วิชาคณิตศาสตร์ ที่ดีและมีคุณภาพ
2. ครุมีสื่อสำหรับการใช้ในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์
3. สามารถเผยแพร่และแนะนำแก่เพื่อนครูในโรงเรียนและต่างโรงเรียนได้
4. ใช้ในการสอนแทนได้

ประโยชน์ต่อโรงเรียน

1. โรงเรียนมีสื่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น
2. เป็นพื้นฐานในผลิตสื่อของโรงเรียนและวิชาอื่น ๆ

5. วิธีการศึกษา

5.1 กลุ่มนักเรียนที่ศึกษา คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2558 จำนวน 30 คน

5.2 ตัวแปรในการศึกษา

- ตัวแปรต้น ได้แก่ เอกสารประกอบการเรียนการสอน เรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้

วิธีการเขียนแบบใหม่

- ตัวแปรตาม ได้แก่ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปีการศึกษา 2558

และความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อเอกสารประกอบการเรียนการสอน

5.3 เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา

1) เอกสารประกอบการเรียนการสอน เรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้วิธีการเขียนแบบใหม่

2) แบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน จำนวน 5 ข้อ

3) แบบแสดงความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อ เอกสารประกอบการเรียนการสอน เรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้วิธีการเขียนแบบใหม่

5.4 วิธีดำเนินการ/ขั้นตอนการพัฒนานวัตกรรม

ขั้นตอนในการพัฒนานวัตกรรมมีขั้นตอนการสร้างดังนี้

ขั้นที่ 1 ศึกษาหลักสูตรเพื่อกำหนดผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง และเนื้อหา

ขั้นที่ 2 สร้างแบบทดสอบ

ขั้นที่ 3 กำหนดโครงสร้างเนื้อหา เพื่อกำหนดเวลาเรียน

ขั้นที่ 4 กำหนดโครงสร้างเนื้อหา โดยการกำหนดผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง กำหนด จุดประสงค์
นำทาง รวมทั้งกำหนดเนื้อหา ลำดับเนื้อหา ก่อนหลังจากง่ายไปหายาก ไม่ซับซ้อน ไปหาเนื้อหาที่มีความ
ซับซ้อน

ขั้นที่ 5 ตรวจสอบโดยผู้เชี่ยวชาญ

ขั้นที่ 6 ทดลองใช้กับนักเรียนกลุ่มเล็ก

ขั้นที่ 7 รวบรวมข้อมูลจากการทดลองใช้กับนักเรียน ในขั้นที่ 6

ขั้นที่ 8 วิเคราะห์ข้อมูลแล้วนำผลที่ได้ไปปรับปรุงใช้กับนักเรียนทั้งหมด

5.5 การเก็บรวบรวมข้อมูล

- 1) ให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน เพื่อเปรียบเทียบ คะแนนความก้าวหน้า
- 2) ให้นักเรียนประเมินการใช้สื่อโดยใช้แบบแสดงความคิดเห็น

5.6 การวิเคราะห์ข้อมูล

- 1) วิเคราะห์ข้อมูลโดยการหาค่าเฉลี่ยของคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียน แล้วหาค่าร้อยละเปรียบเทียบความก้าวหน้าในการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอน
- 2) หาคะแนนเฉลี่ยจากแบบแสดงความคิดเห็นการใช้สื่อ

6. ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1) จากการให้นักเรียนได้ทดลองใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนโดยรวบรวมข้อมูลจากการทำแบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน แล้ววิเคราะห์ข้อมูลโดยการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของคะแนนสอบก่อนการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนและหลังเรียนการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอน ปรากฏดังตาราง

ตารางที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบคะแนนเฉลี่ยก่อนและหลังการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอน

คะแนนเฉลี่ยก่อนเรียน	คะแนนเฉลี่ยหลังเรียน	ร้อยละความก้าวหน้า
12.08	16.74	23.3

จากตาราง พบว่า โดยภาพรวมคะแนนเฉลี่ยก่อนเรียน และคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนเท่ากับ 12.08 และ 16.74 ตามลำดับ โดยมีค่าร้อยละความก้าวหน้าของการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนร้อยละ 23.3 โดยทั่วไปกำหนดเกณฑ์แปลผลความก้าวหน้าของผลการเรียนรู้หรือผลการพัฒนาไว้ที่ร้อยละ 20 หรือ 25 ขึ้นไป (พิชิต ฤทธิ์จรูญ, 2544:79) ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนด แสดงว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ดีขึ้น

2) ผู้สอนได้ให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นต่อการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอน ปรากฏดังตารางเกณฑ์ในการแปลความหมาย คะแนนเฉลี่ยความคิดเห็นและกำหนดระดับความคิดเห็นไว้ 5 ระดับ โดยใช้มาตรวัดของ Likert (likert scale) (ชาคริต ชมชื่น, 2544:61) ดังตาราง

คะแนนเฉลี่ย	ระดับคุณภาพ
4.50 – 5.00	มากที่สุด
3.50 – 4.49	มาก
2.50 – 3.49	ปานกลาง
1.50 – 2.49	น้อย
1.00 – 1.49	น้อยที่สุด

ตารางที่ 2 ตารางแสดงค่าและการแปลผลระดับความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อเอกสารประกอบการเรียนการสอน

ที่	ประเด็นการประเมิน	$\bar{X}$	ระดับคุณภาพ
1	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่สามารถหาคำตอบไววกว่าการหาคำตอบด้วยวิธีการของเกาส์-จอร์แดน	4.26	มาก
2	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่ช่วยลดขั้นตอนในการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีการของเกาส์-จอร์แดน	4.13	มาก
3	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่ไม่ยุ่งยาก ซับซ้อนเมื่อเทียบกับวิธีการของเกาส์-จอร์แดน	3.94	มาก
4	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่ประหยัดพื้นที่ในการเขียนการแก้สมการเมื่อเทียบกับวิธีการของเกาส์-จอร์แดน	4.93	มาก
5	การคำนวณด้วยขั้นตอนวิธีการเขียนแบบใหม่ช่วยลดข้อผิดพลาดในการคำนวณเมื่อเทียบกับวิธีการของเกาส์-จอร์แดน	3.94	มาก
	เฉลี่ยรวม	4.16	มาก

จากตาราง แสดงให้เห็นว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนมีความคิดเห็นว่าบทเรียนมีความเหมาะสม ผลการประเมินอยู่ในระดับคุณภาพมาก

7. สรุปอภิปรายผล

จากการใช้เอกสารประกอบการเรียนการสอนเรื่อง การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการเขียนแบบใหม่ วิชาคณิตศาสตร์ ค42201 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ปรากฏว่า เอกสารประกอบการเรียนการสอนเอื้อต่อการเรียนการสอนทำให้นักเรียนส่วนใหญ่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีขึ้น ได้รับความสนใจ ไม่น่าเบื่อ ทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

8. ประโยชน์/คุณค่าของนวัตกรรมและการพัฒนาต่อยอด

1. ทำให้ผู้สอนได้แนวคิดที่จะสร้างเอกสารประกอบการเรียนการสอนในหลาย ๆ เนื้อหาและเผยแพร่แก่ครูในโรงเรียนและต่างโรงเรียน
2. ครูผู้สอนเกิดความภาคภูมิใจมากที่นักเรียนส่วนใหญ่มีการพัฒนาการเรียนรู้ดีขึ้น
3. จากการนำเอกสารประกอบการเรียนการสอนมาช่วยในการเรียนการสอนในครั้งนี้ทำให้ครูผู้สอนได้ข้อคิดว่าการจัดการเรียนการสอนนั้นจำเป็นต้องมีสื่อการเรียนการสอนที่หลากหลาย

ลงชื่อ.....ผู้รายงาน

(นายเอกนรินทร์ จันทร์แก้ว)

ตำแหน่ง ครู