ภาคผนวก 1

สัญญลักษณ์ซิกมา (Sigma Notation)

นิยาม 1.1 ให้ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ เป็นผลบวก n พจน์ เขียนแทนด้วย

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

ตัวอย่าง 1.1

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

$$\sum_{i=1}^{5} 2^{i-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$\sum_{i=1}^{5} 1/i = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5$$

$$\sum_{i=1}^{5} (i+1)i = (2)1 + (3)2 + (4)3 + (5)4 + (6)5$$

$$\sum_{i=1}^{5} c = c + c + c + c + c$$

$$= 5c$$

<u>ทฤษฎี 1.2</u> $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$

พิสูจน์ พิจารณาการกระจายไบโนเมียส(binomial expansion)

$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$ หรือ $(1+x)^2 - x^2 = 1 + 2x$

ถ้า $x = 1$ จะได้ $2^2 - 1^2 = 1 + 2(1)$ .... 1)

$x = 1$ จะได้ $3^2 - 2^2 = 1 + 2(2)$ .... 2)

$x = 1$ จะได้ $4^2 - 3^2 = 1 + 2(3)$ .... 3)

.

.

.

$x = n$ จะได้ $(1+n)^2 - n^2 = 1 + 2n$ ..... n)

สมการ 1) + 2) + 3) + ... + n)

จะได้ว่า $(1+n)^2 - 1^2 = n + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$\therefore 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = [(1+n)^2 - 1^2 - n]/2$

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$

<u>ทฤษฎี 1.3</u> $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

พิสูจน์ $\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \ldots + ca_n$

$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$

$= c \sum_{i=1}^{n} a_i$

ทฤษฎี 1.4 $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \left[n(n+1)(2n+1) \right] / 6$

พิสูจน์ พิจารณาการกระจายไบโนเมียล

$(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ หรือ

$(1 + x)^3 - x^3 = 1 + 3x + 3x^2$

ถ้า $x = 1$ จะได้ $2^3 - 1^3 = 1 + 3(1) + 3(1)^2$ ... 1)

$x = 2$ จะได้ $3^3 - 2^3 = 1 + 3(2) + 3(2)^2$ ... 2)

$x = 3$ จะได้ $4^3 - 3^3 = 1 + 3(3) + 3(3)^2$ ... 3)

.

.

.

$x = n$ จะได้ $(n + 1)^3 - n^3 = 1 + 3(n) + 3(n)^2$ .. n)

สมการ 1) + 2) + 3) + ... + n)

$$(n + 1)^3 - 1^3 = n + 3 \sum_{i=1}^{n} i + 3 \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \left[(n+1)^3 - 1^3 - n - 3 \sum_{i=1}^{n} i \right] / 3 \\ &= \left[n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 1 - n - 3n(n+1)/2 \right] / 3 \\ &= \left[n(n+1)(2n+1) \right] / 6 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัดชุดที่ 1

1. จงหาค่าของ ก) $\sum_{i=1}^{5} 2^i$

ข) $\sum_{i=1}^{5} i^i$

ค) $\sum_{i=1}^{5} 2^{i-2}$

ง) $\sum_{i=1}^{5} (2i + 1)$

2. จงหาค่าของ ก) $\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_o$

ข) $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$

ค) $\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = i^2$ (ข้อแนะนำ $2k - 1 = k^2 - (k - 1)^2$

3. จงพิสูจน์ว่า $\sum_{i=1}^{n} i^3 = [n(n + 1)/2]^2$ (ข้อแนะนำใช้ $(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$)

ภาคผนวก 2

วิธีการพิสูจน์ (Method of Proof)

สำหรับการพิสูจน์นั้นมีวิธีพิสูจน์ได้หลายชนิด การจะเข้าใจชนิดต่างๆของการพิสูจน์ ต้องอาศัยตรรกวิทยา ในหัวข้อนี้ถือว่าผู้ศึกษามีความรู้ทางตรรกวิทยามาแล้ว แต่จะกล่าวถึงสัญญลักษณ์ และความหมายเพื่อเกิดความเข้าใจเหมือนกัน

นิยาม 2.1 ประพจน์ (proposition หรือ statement) คือ ประโยคที่เป็นจริง (true) หรือ เป็นเท็จ (false) เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

ประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์

จังหวัดเชียงใหม่อยู่ทางภาคเหนือของประเทศไทย (จริง)

คณิตศาสตร์เป็นคณะหนึ่งในมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ (เท็จ)

ให้ p,q,r,... แทนประพจน์ T แทนเป็นจริง และ F แทนเป็นเท็จ

ถ้า p แทน 2 เป็นเลขคู่

และ q แทน 2 + 1 เป็นเลขคี่

$\sim p$ แทน 2 ไม่ใช่เลขคู่

$p \wedge q$ แทน 2 เป็นเลขคู่ และ 2 + 1 เป็นเลขคี่

$p \vee q$ แทน 2 เป็นเลขคู่ หรือ 2 + 1 เลขคี่

$p \Longrightarrow q$ แทน ถ้า 2 เป็นเลขคู่ จะได้ 2 + 1 เป็นเลขคี่

$p \Longleftrightarrow q$ แทน 2 เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ 2 + 1 เป็นเลขคี่

สัญญลักษณ์ $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$ และ $\Longleftrightarrow$ (และ, หรือ, ถ้า .... จะได้,... , และ ก็ต่อเมื่อ) เรียกว่า ตัวเชื่อม (connective)

จากนิยามแต่ละประพจน์ จะมี "ค่าความจริง " (truth value) ได้ 2 กรณี คือ จริง (true) หรือเท็จ (false) ดังนั้นเราสามารถเขียน" ตารางค่าความจริง" (truth table) ของประพจน์พร้อมทั้งตัวเชื่อได้ดังนี้ (ดูตาราง 2.1)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	p ===> q	p <===> q	$\sim p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

ตาราง 2.1

สำหรับประพจน์ซึ่งเป็นจริงไม่ว่า "ค่าความจริง" ของประพจน์ย่อยจะเป็นเช่นไร เรียกประพจน์นั้นว่า ทอโทโลยี่ (tautology)

<u>ตัวอย่าง 2.1</u> p ===> q <===> $\sim$ q ===> $\sim$ p เป็น "ทอโทโลยี่"

แสดงได้โดยสร้างตาราง 2.2

p	q	p ==> q	$\sim$ q==> $\sim$ p	p ===> q <===> $\sim$ q ==> $\sim$ p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

ตาราง 2.2

สำหรับประโยคในคณิตศาสตร์ เช่น สำหรับสมาชิก x ทุกตัว $x + 0 = x$ เมื่อ x เป็นสมาชิกของจำนวนจริง ใช้ $\forall$ แทน "สำหรับสมาชิกทุกตัว" เช่น

สำหรับ x ทุกตัว p(x) เขียนแทนด้วย $\forall x\,[p(x)]$; p(x)

p(x) แทน $x + 0 = x$

เรียก $\forall$ ว่า "ยูนิเวอร์สคอานติไฟเออร์" (universal quantifier)

และใช้ $\exists$ แทน "สำหรับสมาชิกบางตัว เช่น เขียนแทนประโยค

สำหรับสมาชิก x บางตัว p(x) ด้วย $\exists x\,[p(x)]$; p(x) แทน $x + 1 = 2$

เรียกว่า $\exists$ ว่า "เอ็กซีสควอนติไฟเออร์" (existential quantifier)

จะเห็นว่าประโยคบอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธซึ่งมีตัวแปร และไม่เป็นประพจน์ เรียกประโยคประเภทนี้ว่า ประโยคเปิด (open sentence) แต่ทำให้เป็นประพจน์ได้ โดยแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเซ็ทที่กำหนด หรือเติมควอนติไฟเออร์ลงหน้าประโยค

ประโยคต่อไปนี้เป็นประโยคเปิด เช่น $x + 3 = 5$, x เป็นจำนวนเต็ม

ประโยคที่มีควอนติไฟเออร์ จะเป็นจริง หรือเท็จ ต้องคำนึงถึงเซ็ทที่กำหนดซึ่งเป็นเซ็ทของค่าตัวแปร ประโยค $\forall x\,[p(x)]$ เป็นจริง เมื่อแทน x ด้วยสมาชิกในเซ็ทกำหนดทุกตัวแล้วเป็นจริง จะเป็นเท็จ เมื่อแทน x ด้วยสมาชิกบางตัวในเซ็ทกำหนด แล้วเป็นเท็จ $\exists x\; p(x)$ เป็นจริง เมื่อแทน x ด้วยสมาชิกบางตัวในเซ็ทกำหนด แล้วเป็นจริง จะเป็นเท็จเมื่อแทน x ด้วยสมาชิกทุกตัวในเซ็ทกำหนด แล้วเป็นเท็จ

<u>ตัวอย่าง 2.2</u> $x\,[x^2 = 1]$ เป็นจริง เมื่อเซ็ทกำหนดได้แก่ {1,- 1}

$\exists x\,[x^2 = 1]$ เป็นเท็จเมื่อเซ็ทที่กำหนดได้แก่ {2,3 }

ประโยคที่มีควอนติไฟเออร์ และเป็น ทอโทโลยี ได้แก่

1) $\sim\forall x\,[p(x)] \Longleftrightarrow \exists x\,[\sim p(x)]$

2) $\sim\exists x\,[p(x)] \Longleftrightarrow \forall x\,[\sim p(x)]$

3) $\forall x\,[p(x) \Longrightarrow p(t)]$ เมื่อ t เป็นสมาชิกในเซ็ทกำหนด

4) $\forall x\,[p(x)] \Longrightarrow \exists x\,[p(x)]$

5) $\forall x\,[p(x) \wedge q(x)] \Longleftrightarrow \forall x\,[p(x)] \wedge \forall x\,[q(x)]$

6) $\exists x\,[p(x)] \vee \exists x\,[q(x)] \Longleftrightarrow \exists x\,[p(x) \vee q(x)]$

สำหรับทอโทโลยี่ในประโยคที่มีควอนติไฟเออร์นั้น มีมากกว่านี้แต่ยกมาให้เป็นสังเขป

ต่อไปจะกล่าวถึงชนิดต่างๆของการพิสูจน์

1) การพิสูจน์ประพจน์ $p \Longrightarrow q$ โดยตรง

จากประพจน์ $p \Longrightarrow q$ นั้น ประพจน์ p เป็นเหตุ แล้วพิสูจน์ให้ได้ประพจน์ q โดยอาศัย สัจจพจน์ หรือทฤษฎีที่พิสูจน์มาแล้ว

<u>ตัวอย่าง 2.3</u> จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นเลขคู่ จะได้ว่า a^2 เป็นเลขคู่ด้วย

พิสูจน์ ให้ a เป็นเลขคู่

$\therefore$ $a = 2n$ สำหรับ $n \in I$ บางตัว

$a^2 = 4n$

$= 2(2n)$ ซึ่ง $2n \in I$

$\therefore$ a^2 เป็นเลขคู่

<u>แบบฝึกหัดชุดที่ 1.1</u> จงพิสูจน์แต่ละข้อต่อไปนี้

1). ถ้า a เป็นเลขคู่ จะได้ $a^2 + a$ เป็นเลขคู่

2). ถ้า a และ b ต่างเป็นเลขคี่ จะได้ว่า $a + b$ เป็นเลขคู่

3). ถ้า a และ b ต่างเป็นเลขคี่ จะได้ว่า $(a + b)^2$ เป็นเลขคู่

4). ถ้า a เป็นเลขคู่ จะได้ว่า a^4 เป็นเลขคู่

2). การพิสูจน์ประพจน์ $p \Longrightarrow q$ โดยใช้คอนทราโพซิทีพ (contrapositive)

ถ ้าเราจะพิสูจน์ประพจน์ $p \Longrightarrow q$ เราสามารถพิสูจน์ประพจน์ $\sim q \Longrightarrow \sim p$ แทน เนื่องจาก $p \Longrightarrow q \Longleftrightarrow \sim q \Longrightarrow \sim p$ เป็นทอโทโลยี่ (tautology)

<u>ตัวอย่าง 2.4</u> จงพิสูจน์ว่า ถ้า a^2 เป็นเลขคู่ จะได้ว่า a ตัวเป็นเลขคู่ด้วย

พิสูจน์ คอนทราโพซีทีพของประโยคข้างต้น " ถ้า a เป็นเลขคี่ จะได้ว่า a^2 เป็นเลขคี่ "

สมมติ a เป็นเลขคี่

จะได้ว่า $a = 2n + 1$ เมื่อ $n \in I$

$a^2 = (2n + 1)^2$

$= 4n^2 + 4n + 1$

$= 2(2n^2 + 2n) + 1$ ซึ่ง $2n^2 + 2n$ เป็นจำนวนเต็ม

$\therefore$ a^2 เป็นเลขคี่

<u>แบบฝึกหัดชุดที่ 1.2</u>

จงพิสูจน์แต่ละข้อโดยใช้ คอนทราโพซิทีฟ

1). ถ้า a^2 เป็นเลขคี่ จะได้ a เป็นเลขคี่ด้วย

2). ถ้า $a + 1$ เป็นเลขคี่ จะได้ a เป็นเลขคู่

3). ถ้า a^4 เป็นเลขคี่ จะได้ a เป็นเลขคี่

4). ถ้า $a + b$ เป็นเลขคี่ จะได้ a เป็นเลขคู่ หรือ b เป็นเลขคู่

3). การพิสูจน์เป็นกรณีๆ (Proof by Cases)

ถ้าเราจะพิสูจน์ประพจน์ $p \vee q \Longrightarrow r$ เราสามารถพิสูจน์ประพจน์ $p \Longrightarrow r$ และ $q \Longrightarrow r$ แทนได้ เนื่องจาก $(p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r) \Longrightarrow (p \vee q \Longrightarrow r)$ . ..1) เป็นทอโทโลยี่ (tautology) ถ้าพิสูจน์ว่า $(p \Longrightarrow r) \wedge (q \Longrightarrow r)$ เป็นจริง จะได้ว่า $(p \vee q) \Longrightarrow r$ ต้องเป็นจริง เนื่องจาก 1) เป็นทอโทโลยี่

<u>ตัวอย่าง 2.5</u> จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้ว่า $a^2 + a$ เป็นเลขคู่

พิสูจน์ ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง a อาจจะเป็นเลขคู่หรือเลขคี่ดังนั้น จะกล่าวว่า

ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งเป็นเลขคู่ หรือเลขคี่ จะได้ว่า $a^2 + a$ เป็นเลขคู่

การพิสูจน์ต้องพิสูจน์ทั้งสองกรณี

1) ถ้า a เป็นเลขคู่ จะได้ว่า $a^2 + a$ เป็นเลขคู่

2) ถ้า a เป็นเลขคี่ จะได้ว่า $a^2 + a$ เป็นเลขคู่

1) ให้ a เป็นเลขคู่

$\therefore \; a = 2n \quad ; \; n \in I$

$a^2 + a = (2n)^2 + 2n$

$= 4n^2 + 2n$

$= 2(2n^2 + n)$ ซึ่ง $2n^2 + n \in I$

$\therefore \; a^2 + a$ เป็นเลขคู่

2) ถ้าเลขเป็นเลขคี่

$\therefore \; a = 2n + 1 \quad ; \; n \in I$

$a^2 + a = (2n + 1)^2 + (2n + 1)$

$= 4n^2 + 4n + 1 + 2n + 1$

$= 4n^2 + 6n + 2$

$= 2(2n^2 + 3n + 1)$ ซึ่ง $2n^2 + 3n + 1 \in I$

$\therefore \; a^2 + a$ เป็นเลขคู่

ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนเต็มแล้ว จะได้ว่า $a^2 + a$ เป็นเลขคู่

<u>แบบฝึกหัดชุดที่ 1.3</u>

1). ถ้า $a \in R$ จะได้ว่า $|-a| = |a|$

2). ถ้า $a \in R$ จะได้ว่า $|a^2| = |a|^2$

3). ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ $a^2 - a$ เป็นเลขคู่

4). ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม จะได้ $a^2 + a + 1$ เป็นเลขคี่

4). การพิสูจน์ประพจน์ $p \Longleftrightarrow q$

นิยามประพจน์ $p \Longleftrightarrow q$ หมายถึง $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$

ดังนั้นจะพิสูจน์ประพจน์ $p \Longleftrightarrow q$ เราพิสูจน์ $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ แทน

ตัวอย่าง 2.6 จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นเลขคู่ก็ต่อเมื่อ a + 2 เป็นเลขคู่

พิสูจน์ ต้องพิสูจน์ว่า 1) ถ้า a เป็นเลขคู่ จะได้ว่า a + 2 เป็นเลขคู่

และ 2) ถ้า a + 2 เป็นเลขคู่ จะได้ว่า a เป็นเลขคู่

1) ให้ a เป็นเลขคู่

$\therefore\ a = 2n$ เมื่อ $n \in I$

$a + 2 = 2n + 2$

$= 2(n + 1)$ ซึ่ง $(n + 1) \in I$

$\therefore\ a + 2$ เป็นเลขคู่

2) $a + 2$

$\therefore\ a + 2 = 2n$ เมื่อ $n \in I$

$a = 2n - 2$

$= 2(n - 1)$ ซึ่ง $(n - 1) \in I$

$\therefore\ a$ เป็นเลขคู่

ดังนั้น ถ้า a เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ a + 2 เป็นเลขคู่

แบบฝึกหัดชุด 1.4

1) a เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นเลขคู่

2) a เป็นเลขคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นเลขคี่

3) a เป็นเลขคี่ ก็ต่อเมื่อ a^4 เป็นเลขคี่

5). การพิสูจน์โดยยกตัวอย่างตรงข้าม (Counter Example)

เนื่องจาก $\forall x\,[p(x)] \Longleftrightarrow \exists x\,[\sim p(x)]$ เป็น tautology จะพิสูจน์ว่า $\forall x\,[p(x)]$ เป็นเท็จ เราต้องพิสูจน์ว่า $\exists x\,[\sim p(x)]$ จึงจะทำให้ประโยคข้างต้น เป็นทอโทโลยี

ตัวอย่าง 2.7 จงพิสูจน์ ประโยค $\forall x[x + 2 = 2]$ เป็นเท็จ

วิธีทำ negation ของประโยคข้างต้น ได้แก่ $\exists x[x + 2 \neq 2]$

$\therefore$ $1 + 2 \neq 1$

$\therefore$ $\exists x[x + 2] \neq 2$ เป็นจริง

จะเห็นว่าการพิสูจน์ประโยค ในตัวอย่างเป็นเท็จนั้น เราต้องหาตัวอย่างซึ่งขัดแย้งกับโจทย์ในตัวอย่าง เพียงกรณีเดียวก็พอ เพียง

แบบฝึกหัดชุด 1.5 จงพิสูจน์แต่ละข้อ เป็นเท็จ

1) $\forall x[x^2 + 1]$

2) $\forall x[x \geq 0$ หรือ x เป็นจำนวนตักยะ]

3) จำนวนเฉพาะทุกตัว เป็นเลขคี่

4) เลขคี่ทุกตัว เป็นจำนวนเฉพาะ

5) จำนวนจริงทุกตัว เป็นจำนวนเต็ม

6) การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof หรือ Proof by contradiction)

เราจะพิสูจน์ประพจน์ p โดยสมมติ $\sim p$ แล้วได้ผลสรุป $(q \wedge \sim q)$ เราใช้วิธีพิสูจน์เช่นนี้ได้เนื่องจาก $\sim p \wedge (q \wedge \sim q) \Longrightarrow p$ เป็นทอโทโลยี่ ดังนั้นเมื่อได้ $\sim p \wedge (q \wedge \sim q)$ ก็จะได้ p

หรืออาจกล่าวว่าจะพิสูจน์ว่า p เป็นจริง เราต้องพิสูจน์ว่า $\sim p$ เป็นเท็จ โดยสมมติว่า $\sim p$ เป็นจริง แล้วดำเนินการพิสูจน์เพื่อให้เกิดข้อขัดแย้ง ก็จะได้ว่า $\sim p$ ไม่จริง ดังนั้น p เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.8 ให้ A เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $A < \varepsilon$ สำหรับ $\varepsilon \leq 0$ ทุกตัว

จะได้ว่า $A \leq 0$

พิสูจน์ สมมติว่า $A \geq 0$ เช่นเดียว

จะได้ว่า สำหรับ $A = \varepsilon$

จะขัดแย้งกับ $A < \varepsilon$

$\therefore$ $A \leq 0$