บทที่ 2

บทนำเกี่ยวกับทฤษฎีเซ็ท (Introductory set Thoery)

สำหรับเซ็ท (set) นั้นจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์ ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีเซ็ทที่สำคัญ ๆ อย่างคร่าว ๆ และเป็นเนื้อหาที่จะต้องนำมาใช้เท่านั้น

2.1 เซ็ทและสัญญลักษณ์ (Set and Notation)

ในคณิตศาสตร์ เราใช้คำว่าเซ็ท (set) เป็นคำสำหรับเรียกกลุ่มของสิ่งของต่างๆ ซึ่งรู้แน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่มของสิ่งของนั้น เช่น เซ็ทของชื่อเดือน เราทราบว่า ธันวาคมอยู่ในเซ็ทของชื่อเดือน เรากล่าวว่า ธันวาคม เป็นสมาชิก(element or member) ของเซ็ทของชื่อเดือน แต่อังคารไม่ใช่ชื่อของเดือน เรากล่าวว่า อังคารไม่เป็นสมาชิกของชื่อเดือน

เรานิยมใช้อักษร A,B,C,.... แทนเซ็ท และใช้อักษร a,b,c,.... แทนสมาชิกของเซ็ท

ในการเขียนแทนเซ็ทเพื่อให้ทราบถึงสมาชิกของเซ็ท เรามีวิธีเขียนได้ 2 วิธี คือ

1. การแจกแจงสมาชิกในเซ็ท (Tabulation) ใช้วงเล็บปีกกา แสดงว่าเป็นเซ็ท เขียนสมาชิกลงไปในวงเล็บแล้วคั่นระหว่างสมาชิก ด้วยเครื่องหมายจุลภาค(,)

<u>ตัวอย่าง 2.1.1</u> ให้ A เป็นเซ็ทของจำนวน 2,4,6,8 เขียนได้ว่า

$$A = \{2,4,6,8\}$$

<u>ตัวอย่าง 2.1.2</u> ให้ A เป็นเซ็ทของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 1 กับ 50 ซึ่งรวมทั้ง 1 และ 50 ด้วย เขียนได้ว่า

$$B = \{1,2,3,\ldots,50\}$$

<u>ตัวอย่าง 2.1.3</u> ให้ C เป็นเซ็ทของจำนวนเต็มบวก เขียนได้ว่า

$$C = \{1,2,3,...\}$$

2. การเขียนเซ็ทโดยใช้สัญลักษณ์ (description) ซึ่งกำหนดเซ็ทโดยบอกคุณสมบัติที่สมาชิกทุกๆตัว มีคุณสมบัติร่วมกัน เช่น

<u>ตัวอย่าง 2.1.4</u> จากตัวอย่าง 2.1.3 เขียนได้ว่า

$C = \{x/x$ เป็น จำนวนเต็มบวก$\}$

<u>นิยาม 2.1.1</u> ให้ a เป็นสมาชิกของเซ็ท A เขียนแทนด้วย $a \in A$ ให้ b ไม่เป็นสมาชิกของเซ็ท B เขียนแทนด้วย $b \notin B$

<u>ตัวอย่าง 2.1.5</u> จะได้ว่า $a \in \{a,b,c\}$ และ $d \notin \{a,b,c\}$

สำหรับเซ็ทๆหนึ่ง นั้นจะมีจำนวนสมาชิกเท่าไรก็ได้ ถ้าจำนวนสมาชิก เป็นจำนวนจำกัด (finite number) เช่น $\{1,2,3,4\}$, $\{1,2,3,...,50\}$ เราเรียกเซ็ทประเภทนี้ว่า เซ็ทจำกัด (finite set)

แต่เซ็ทบางชนิดมีสมาชิกเป็นจำนวนนับไม่ถ้วน (infinite number) เช่น $\{2,4,6,...\}$, $\{x/0<x<1\}$ เราเรียกเซ็ทประเภทนี้ว่า เซ็ทอนันต์ (infinite set)

2.2 <u>โอเปอเรชั่นของเซ็ท (Operation on sets)</u>

เกี่ยวกับเรื่องตัวเลข (number) นั้น โอเปอเรชั่น (operation) ของจำนวนจริง (real number) ได้แก่ การบวก การลบ การคูณ และการหาร เป็นต้น ซึ่งทำให้ได้จำนวนใหม่ขึ้นมา ในเซ็ทก็เช่นเดียวกัน เมื่อเรามีเซ็ทสองเซ็ท เราสามารถสร้างเซ็ทใหม่ได้ โดยใช้โอเปอเรชั่นทางเซ็ทได้แก่ ยูเนียน (union) อินเตอเซคชั่น (intersection) และ คอมพลิเมนต์ (complement) เป็นต้น

<u>นิยาม 2.2.1</u> ถ้า A และ B เป็นเซ็ทใดๆ จะได้ว่า A ยูเนียน B คือเซ็ทที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดของ A หรือ B เซ็ทใดเซ็ทหนึ่งหรือทั้งสองเซ็ท เขียนแทนด้วย $A \cup B$ มีความหมายดังนี้

$A \cup B = \{x/x \in A$ หรือ $x \in B\}$

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u> ให้ $A = \{1,3,5\}$, $B = \{4,5,6\}$

$\therefore A \cup B = \{1,3,5,4,5,6\} = \{1,3,4,5,6\}$

<u>นิยาม 2.2.2</u> ถ้า A และ B เป็นเซ็ทใดๆ จะได้ว่า A อินเตอเซคชั่น B คือเซ็ทที่ประกอบด้วยสมาชิกที่ A และ B มีร่วมกัน เขียนแทนด้วย $A \cap B$ มีความหมายดังนี้

$$A \cap B = \{x/x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.2</u> ให้ $A = \{1,3,5\}$, $B = \{4,5,6\}$

$\therefore A \cap B = \{5\}$

<u>นิยาม 2.2.3</u> ถ้า A และ B เป็นเซ็ทใดๆ จะได้ว่า B คอมพลิเมนต์ A คือเซ็ทที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดอยู่ใน B แต่ไม่อยู่ใน A เขียนแทนด้วย $B - A$ มีความหมายดังนี้

$$B - A = \{x/x \in B \text{ และ } x \notin A\}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.3</u> ถ้า $A = \{1,3,5\}$ และ $B = \{4,5,6\}$

$\therefore B - A = \{4,6\}$

<u>นิยาม 2.2.4</u> ถ้าสมาชิกของเซ็ท A เป็นสมาชิกของเซ็ท B เรียกเซ็ท A ว่า เป็นสับเซ็ท (subset) ของเซ็ท B เขียนแทนด้วย $A \subset B$

<u>ตัวอย่าง 2.2.4</u> ถ้า $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6\}$, $C = \{5,6,7,8\}$

$\therefore A \subset B$ แต่ $B \not\subset C$

<u>นิยาม 2.2.5</u> เซ็ทสองเซ็ทใดๆจะกล่าวว่าเท่ากัน (equal) เมื่อทั้งสองเซ็ทประกอบด้วยสมาชิกที่เหมือนกัน

หรือ ถ้า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ (if and only if) $A \subset B$ และ $B \subset A$

<u>นิยาม 2.2.6</u> ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเซ็ทใดๆ ซึ่งเป็นสับเซ็ทของ S จะได้ว่า

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x/x$ เป็นสมาชิกในเซ็ทใดเซ็ทหนึ่งของ A_i }

$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x/x$ เป็นสมาชิกของเซ็ท A_i ทุกตัว }

ให้ I เป็นเซ็ทใดๆ สำหรับ $i \in I$ ทุกตัวสมนัย (corresponds) กับสับเซ็ท A_i ของเซ็ท S เราเรียกว่าเซ็ทที่ประกอบด้วย A_i ซึ่ง $i \in I$ ว่าครอบครัว (family) หรือกลุ่ม (collection) ของสับเซ็ทของ S ที่มี I เป็นเซ็ทกรรชนี (indexing set) เขียนแทนด้วย

$\{A_i / i \in I\}$ หรือ $\{A_i\}_{i \in I}$

สำหรับ $\bigcup_{i \in I} A_i$ และ $\bigcap_{i \in I} A_i$ ก็มีความหมายดังข้างต้น

เซ็ทที่กล่าวข้างต้นล้วนแต่มีสมาชิก เซ็ทที่ไม่มีสมาชิกเรียกว่าเซ็ทว่าง (empty set or null set)

ถ้า A เป็นเซ็ทว่าง เขียนได้ว่า $A = \emptyset$

<u>ตัวอย่าง 2.2.5</u> ให้ $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$

$\therefore A \cap B = \emptyset$

ถ้า $A, B, C, \ldots$ เป็นสับเซ็ทของเซ็ท S สำหรับ $S - A$ เขียนแทนด้วย A'

2.3. <u>ทฤษฎีเกี่ยวกับโอเปอเรชั่นของเซ็ท</u> (Theorems based on the set operation)

ในการพิสูจน์ทฤษฎีต่างๆในเซ็ทนั้น มีลักษณะที่แตกต่างออกไป เช่น การพิสูจน์การเป็นสับเซ็ท หรือการเท่ากันของเซ็ท

ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า $A \subset B$ ให้สมมติว่า x เป็นสมาชิกใดๆของ A แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า x เป็นสมาชิกของ B

ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า $A = B$ ให้พิสูจน์ว่า $A \subset B$ และ $B \subset A$

<u>ตัวอย่าง 2.3.1</u> ให้ A,B,C เป็นเซ็ท จงพิสูจน์ว่า $A \cap (B - C) \subset A - (B \cap C)$

พิสูจน์ 1). สมมติให้ $x \in A \cap (B - C)$

2). $\therefore x \in A$ และ $x \in B - C$ (นิยาม 2.2.2)

3). จาก $x \in B - C$ $\therefore x \in B$ และ $x \notin C$ (นิยาม 2.2.3)

4). $\therefore\ x \notin B \cap C$ จากข้อ 3 และนิยาม 2.2.2

5). $x \in A - (B \cap C)$ จากข้อ 2 และนิยาม 2.2.3

6). $\therefore\ A \cap (B - C) \subset A - (B \cap C)$

<u>ตัวอย่าง 2.3.2</u> ให้ A,B,C เป็นเซ็ทใดๆ จงพิสูจน์ว่า

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ในการพิสูจน์ให้แยกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ต้องพิสูจน์ว่า $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

กรณีที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

<u>พิสูจน์</u> กรณีที่ 1 ต้องพิสูจน์ว่า $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$x \in A$ และ $x \in B$ หรือ $x \in C$

1). ให้ $x \in A \cap (B \cup C)$

2). $\therefore\ x \in A$ และ $x \in B \cup C$ นิยาม 2.2.2

3). จาก $x \in B \cup C$ $\therefore\ x \in B$ หรือ $x \in C$ นิยาม 2.2.1

4). $x \in A \cap B$ หรือ $x \in A \cap C$ จากข้อ 2, 3) และนิยาม 2.2.2

5). $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ นิยาม 2.2.1

$\therefore\ A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

กรณีที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

1). ให้ $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2). $x \in A \cap B$ หรือ $x \in A \cap C$ นิยาม 2.2.1

3). ($x \in A$ และ $x \in B$) หรือ ($x \in A$ และ $x \in C$) นิยาม 2.2.2

4). $\therefore\ x \in A$ จากข้อ 3 และนิยาม 2.2.2

5). $x \in B$ หรือ $x \in C$ จากข้อ 3 และนิยาม 2.2.2

6). $x \in B \cup C$ นิยาม 2.2.1

7). $x \in A \cap (B \cup C)$ ข้อ 4),5) และนิยาม 2.2.2

$\therefore\ (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$

จากกรณี 1 และ 2 $\therefore\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

<u>ตัวอย่าง 2.3.3</u> ให้ B และ A_i เป็นเซ็ทซึ่ง i เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า

$$B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i)$$

การพิสูจน์แยกเป็น 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ต้องพิสูจน์ว่า $B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i)$

กรณีที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า $\bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i) \subset B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

<u>พิสูจน์</u> กรณีที่ 1 ต้องพิสูจน์ว่า $B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i)$

1). ให้ $x \in B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

2). $x \in B$ และ $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ นิยาม 2.2.3

3). $x \in B$ และ x ไม่เป็นสมาชิกของเซ็ท A_i ใดๆ นิยาม 2.2.6

4). $x \in B - A_i$ สำหรับเซ็ท A_i ทุกเซ็ท นิยาม 2.2.3

5). $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i)$ นิยาม 2.2.6

$\therefore B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i)$

กรณีที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า $\bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i) \subset B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

1). ให้ $x \in \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i)$

2). $x \in B - A_i$ สำหรับ i ทุกตัว ซึ่ง x เป็นสมาชิกของ $B - A_i$ ทุกเซ็ท นิยาม 2.2.3

3). $x \in B$ และ $x \notin A_i$ สำหรับ A_i ทุกเซ็ท

4). $x \in B$ และ $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ นิยาม 2.2.6

5). $x \in B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ นิยาม 2.2.3

$\therefore \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i) \subset B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

จากกรณีที่ 1 และ 2 $\therefore \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i) = B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

แบบฝึกหัดชุดที่ 2

1). จงตรวจดูว่า แต่ละข้อข้างล่างนี้เป็นจริงหรือไม่

ก) ให้ $A = \{1,2,\{3\},\{4,5,6\}\}$

(ก) $1 \in A$ (ข) $3 \in A$ (ค) $4,5 \notin A$

ข) ให้ P เป็นเซ็ทของชื่อวันในหนึ่งสัปดาห์

(ก) วันอาทิตย์ $\in P$ (ข) วันดี $\in P$ (ค) วันเสาร์ $\notin P$

2). ให้ $S = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $A = \{a,b,c\}$, $B = \{c,d,e,f\}$

และ $C = \{a,e,h\}$ จงหา

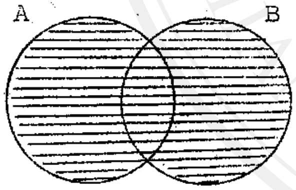
A', B', C', $A - B$, $B - C$, $A \cap B$, $B \cup C$ และ $A' - B$

3). จงแจกแจงสมาชิกของเซ็ทต่อไปนี้

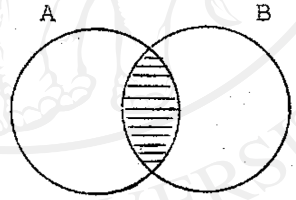
$A = \{x/x$ เป็นประเทศในเอเชียตะวันออกเฉียงใต้$\}$

$B = \{x/x$ เป็นจังหวัดในภาคเหนือของไทย$\}$

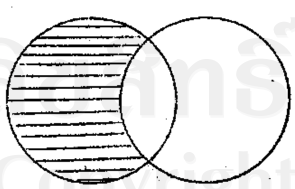
4). เวนไดอะแกรม (Venn diagram) คือ แผนภาพแสดงถึง ยูเนียน อินเตอ - เซคชั่น และคอมพลิเมนต์ของเซ็ท ดังรูปที่ 1.3.1



ส่วนแรเงาทึบแสดงถึง $A \cup B$



ส่วนแรเงาทึบแสดงถึง $A \cap B$

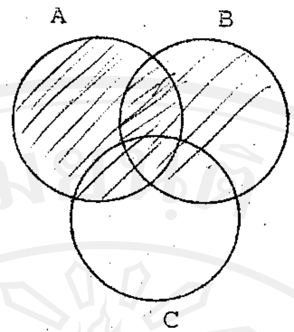


ส่วนแรเงาทึบแสดงถึง $A - B$

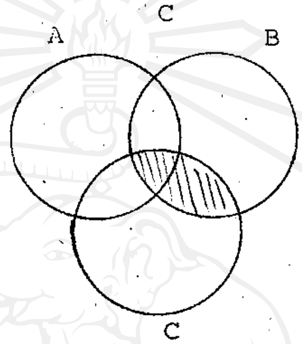
รูปที่ 1.3.1

จงลงเส้นทึบในแผนภาพที่กำหนดให้แต่ละข้อ

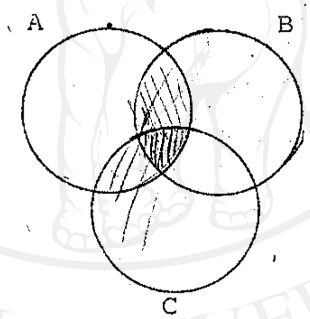
4.1) $A \cup B$



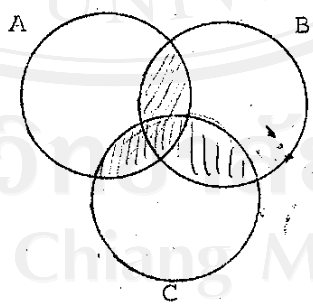
4.2) $B \cap C$



4.3) $A \cap (B \cup C)$



4.4)



$(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$

5). ถ้ากำหนดให้ว่า

$x \notin A \cup B$ หมายถึง $x \notin A$ และ $x \notin B$

$x \notin A \cap B$ หมายถึง $x \notin A$ หรือ $x \notin B$

$x \notin A - B$ หมายถึง $x \notin A$ หรือ $x \in A \cap B$ กรณีใดกรณีหนึ่ง

$x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ หมายถึง x ไม่เป็นสมาชิกของเซ็ท A_i ใดๆ

$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ หมายถึง x ไม่เป็นสมาชิกของเซ็ท A_i บางเซ็ท

จงพิสูจน์แต่ละข้อข้างล่างนี้ ถ้า A, B, C และ D เป็นเซ็ทใดๆ

5.1). $A \subseteq A \cup B$

5.2). $A \cap B \subseteq A$

5.3). $A - B = A \cap B'$

5.4). $A - (B \cup C) = (A - B) - C$

5.5). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5.6). $(A \cup B)' = A' \cap B'$

5.7). $B - \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} (B - A_i)$

6). ในวิชาตรรกวิทยา มี Truth table ดังนี้

P	Q	P V Q	P $\wedge$ Q	P ===> Q	P <===> Q
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

P	~P
T	F
F	T

จงตรวจดูว่า แต่ละข้อข้างล่างนี้เป็นจริงหรือไม่

6.1). $[(P \Longrightarrow Q) \wedge P] \Longrightarrow Q$

6.2). $[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$

6.3). ถ้า $x \in A$ ดังนั้น $x \in B$ ก็ต่อเมื่อ $x \in A$ และ $x \in B$

6.4). ถ้า $x \in A$ ดังนั้น $x \in B$ ก็ต่อเมื่อ $x \notin A$ หรือ $x \in B$