บทที่ 3

ระบบจำนวนจริง (The real number system)

การศึกษาถึงระบบจำนวนจริงในบทนี้นั้น ผู้ที่จะศึกษาต้องมีความรู้เกี่ยวกับจำนวนจริง และโอเปอเรชั่นพื้นฐาน (basic operation) ของจำนวนจริง ซึ่งได้แก่ การบวก การคูณ มาบ้าง ส่วนเนื้อหาในบทนี้เอาอาจแบ่งเป็นสามส่วน ในส่วนที่หนึ่ง จะกล่าวถึงสัจจ-พจน์ของฟิลด์ (field axiom) ส่วนที่สองกล่าวถึงสัจจพจน์ของลำดับ (Axiom of order) และส่วนที่สามจะเป็นสัจจพจน์ของคอมพลีท (Axioms of completeness)

สำหรับส่วนแรกซึ่งเป็นสัจจพจน์ของฟิลด์นั้น สามารถแบ่งตามโอเปอเรชั่นพื้นฐานได้ ซึ่งได้แก่ การบวก มี่ 5 ข้อ การคูณมี 5 ข้อ และทั้งการบวกและการคูณมี 1 ข้อ ผลที่ได้จากสัจจพจน์ก็จะเป็นทฤษฎี ซึ่งเป็นคุณสมบัติของจำนวนจริง ส่วนที่สองซึ่งเป็นสัจจพจน์ของลำดับ เป็นการเพิ่มเติมสัจจพจน์ของจำนวนจริงเกี่ยวกับลำดับ และศึกษาถึงการแทนจุดด้วยจำนวนจริงบนเส้นตรง ช่วง (interval) และค่าสมบูรณ์ (absolute valued) ซึ่งจะต้องนำไปใช้ในบทต่อๆไป และได้กล่าวย่อๆเกี่ยวกับจำนวนธรรมชาติ (natural number) จำนวนเต็ม (integer) และจำนวนตักยะ (rational number) ส่วนที่สามเป็นสัจจพจน์ของคอมพลีท ศึกษาถึงเซ็ทที่บาวด์ และคุณสมบัติของอาร์คีเมเดียน (Archimedian property) ซึ่งเป็นการเพิ่มเติม คุณ สมบัติของจำนวนจริง ที่ชี้ให้เห็นว่ามีจำนวนอตักยะในจำนวนจริง และเป็นสัจจพจน์ที่สำคัญในการศึกษาวิชานี้ ส่วนตอนท้ายได้ศึกษาถึงการแทนจำนวนจริงด้วยทศนิยม เพื่อใช้ในบทที่ 4 เกี่ยวกับการพิสูจน์การนับได้ (Countable)

สำหรับทฤษฎีบทหลังสัจจพจน์ต่างๆนั้น นอกจากจะเป็นคุณสมบัติของจำนวนจริงแล้ว จุดประสงค์ที่สำคัญเพื่อฝึกการพิสูจน์นั่นเอง

3.1 <u>สัจจพจน์ และคุณสมบัติเบื้องต้นของฟิลด์</u> (The field axioms and the elementary property of field)

โอเปอเรชั่นพื้นฐานของจำนวนจริง คือ การบวก และการคูณ เราจะตกลงกันให้ระบบจำนวนจริงประกอบด้วย เซ็ทของจำนวนจริงทุกตัว กับการบวกและการคูณ ซึ่งสอดคล้องสัจจพจน์ หรือข้อตกลง 11 ข้อ โดยเราจะเริ่มด้วยข้อตกลง 11 ข้อก่อน ซึ่งประกอบด้วยข้อตกลง A_1 ถึง A_5 ซึ่งสอดคล้องกับการบวก ข้อตกลงจาก M_1 ถึง M_5 สอดคล้องกับการคูณ และข้อตกลง D สอดคล้องทั้งการบวก และการคูณ

ถ้าให้ R แทนเซ็ทจำนวนจริง เราจะได้สัจจพจน์ต่างๆดังนี้

A_1 คุณสมบัติปิดของการบวก (Closure property for addition)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า $a + b$ จะเป็นจำนวนจริงด้วย

A_2 กฎการสลับที่ของการบวก (Commutative law for addition)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า $a + b = b + a$

A_3 กฎการจัดหมู่ของการบวก (Associative law for addition)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง แล้วจะได้ว่า $(a + b) + c = a + (b + c)$

A_4 การมีเอกลักษณ์ของการบวก (Existance of an addition identity)

สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว จะมีจำนวนจริงตัวหนึ่งคือ 0 ซึ่ง $a + 0 = a$

A_5 การมีอินเวอร์สของการบวก (Exintence of additive inverse)

สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว จะมีจำนวนจริง $-a$ ซึ่ง $a + (-a) = 0$

ผลต่าง (difference) ระหว่าง a และ b คือ $a + (-b)$ เป็นการแสดงถึงโอเปอเรชั่นอีกชนิดหนึ่ง คือ การลบ (subtraction) เรานิยมใช้ $a - b$ แทน $a + (-b)$

M_1 คุณสมบัติปิดของการคูณ (Closure property for multiplication)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า ab จะเป็นจำนวนจริงด้วย

M_2 กฎการสลับที่ของการคูณ (Commutative law for multiplication)

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า $ab = ba$

M_3 กฎการจัดหมู่สำหรับการคูณ (Associative law for multiplication)
ถ้า a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า $(ab).c = a.(b.c)$

M_4 การมีเอกลักษณ์ของการคูณ (Existence of a multiplication identity)
สำหรับจำนวน a ทุกตัว จะมีจำนวนจริงตัวหนึ่งคือ 1 ซึ่ง $1 \neq 0$
มีคุณสมบัติว่า $a.1 = a$

M_5 การมีอินเวอร์สของการคูณ (Existence of multiplicative inverse)
สำหรับจำนวนจริง a ทุกตัว ซึ่ง $a \neq 0$ จะมีจำนวนจริง a^{-1} ซึ่ง $a.a^{-1} = 1$

ผลหาร (quotient) ระหว่าง a และ b คือ ab^{-1} หรือ ba^{-1} เป็นการแสดงถึงโอเปอเรชั่นอีกชนิดหนึ่ง คือ การหาร (division) เรานิยมใช้ $\frac{a}{b}$ แทน ab^{-1} เมื่อ $b \neq 0$

1) กฎการกระจาย (The distributive law)
ถ้า a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะได้ว่า

$$a.(b + c) = ab + ac$$

ข้อสังเกต 1) จากสัจจพจน์ A_1 และ M_1 จะเห็นว่าผลบวก และผลคูณของจำนวนจริงใดๆ จะมีค่าได้ค่าเดียวเท่านั้น เช่น
ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $b = c$ แล้วจะได้ว่า

$$a + b = a + c \quad \text{และ} \quad ab = ac$$

และถ้า $a = b$ และ $c = d$ แล้วจะได้ว่า $a + c = b + d$ และ

$$ac = bd$$

2) ระบบใดๆ ซึ่งประกอบด้วยเซ็ทๆหนึ่ง กับโอเปอเรชั่น 2 โอเปอเรชั่น และมีคุณสมบัติสอดคล้องสัจจพจน์ ทั้ง 11 ข้อ ข้างต้นนั้น เราเรียกระบบนั้นว่า ฟิลด์ (field) ดังนั้นระบบจำนวนจริงเป็นฟิลด์

3) จาก A_4 $a + 0 = a$ แต่มิได้กล่าวถึง $0 + a$ เนื่องจากกฎการสลับที่สำหรับการบวกเป็นจริง ดังนั้น $a + 0 = 0 + a$ และ $0 + a = a$ ด้วย ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $(-a) + a = 0$ จาก A_5

$1.a = a$ จาก M_4

$a^{-1}.a = 1$ จาก M_5

ต่อไปเป็นคุณสมบัติเบื้องต้นของฟิลด์

<u>ทฤษฎี 3.1.1</u> กฎการตัดออกสำหรับการบวก (Cancellation law for addition)

กำหนดให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริง

ก) ถ้า $a + b = a + c$ จะได้ $b = c$

ข) ถ้า $b + a = c + a$ จะได้ $b = c$

พิสูจน์ ข้อ ก) ถ้า $a + b = a + c$ จะได้ $b = c$

1)	$a + b = a + c$	จากโจทย์
2)	$(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$	จาก A_1
3)	$((-a) + a) + b = ((-a) + a) + c$	A_3
4)	$0 + b = 0 + c$	A_2 และ A_5
5)	$b = c$	A_4

ข้อ ข) ให้เป็นแบบฝึกหัด

<u>ทฤษฎี 3.1.2</u> กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง ถ้า $a + a = a$ จะได้ว่า $a = 0$

พิสูจน์

1)	$a + a = a$	จากโจทย์
2)	$a + 0 = a$	A_4
3)	$a + a = a + 0$	จากข้อ 1) = ข้อ 2)
4)	$a = 0$	ทฤษฎี 3.1.1 ข้อ ก)

<u>ทฤษฎี 3.1.3</u> กำหนดให้ x และ a เป็นจำนวนจริง

ก) ถ้า $x + a = 0$ จะได้ว่า $x = -a$

ข) ถ้า $a + x = 0$ จะได้ว่า $x = -a$

พิสูจน์ ข้อ ก) ถ้า $x + a = 0$ จะได้ว่า $x = -a$

1)	$x + a = 0$	จากโจทย์
2)	$(-a) + a = 0$	A_5
3)	$x + a = (-a) + a$	จากข้อ 1) = ข้อ 2)
4)	$x = -a$	ทฤษฎี 3.1.1 ข)

ข้อ ข) ให้เป็นแบบฝึกหัด

<u>ทฤษฎี 3.1.4</u> กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

ก) $a \cdot 0 = 0$

ข) $0 \cdot a = 0$

พิสูจน์ ข้อ ก) จะต้องพิสูจน์ว่า $a \cdot 0 = 0$

1)	$0 + 0 = 0$	จาก A_4
2)	$a(0 + 0) = a \cdot 0$	M_1
3)	$a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$	D
4)	$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$	จากข้อ 2) = ข้อ 3)
5)	$a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0 + 0$	A_4
6)	$a \cdot 0 = 0$	ทฤษฎี 3.1.1 ข้อ ก)

ข้อ ข) ให้เป็นแบบฝึกหัด

<u>ทฤษฎี 3.1.5</u> ถ้า $a \in R$ จะได้ว่า $-(-a) = a$

พิสูจน์

1)	$a + (-a) = 0$	A_5
2)	$-(-a) + (-a) = 0$	A_5
3)	$a + (-a) = -(-a) + (-a)$	ข้อ 1) = ข้อ 2)
4)	$\therefore a = -(-a)$	ทฤษฎี 3.1.1 ข)

<u>บทแทรก 3.1.6</u> จำนวนศูนย์ไม่มีส่วนกลับ (reciprocal)

พิสูจน์ (ใช้วิธีพิสูจน์ทางอ้อม)

1) สมมติให้ 0 มีส่วนกลับ เป็น 0^{-1}

2) $\therefore$ $0^{-1}.0 = 1$ M_5

3) ขัดกับทฤษฎี 3.1.4 ข้อ ก)

$\therefore$ ศูนย์ไม่มีส่วนกลับ

<u>บทแทรก 3.1.7</u> กำหนดให้ $a \in R$ ถ้า $a \neq 0$ จะได้ว่า $a^{-1} \neq 0$

พิสูจน์ (ใช้พิสูจน์ทางอ้อม)

1) สมมติให้ $a^{-1} = 0$

2) $\therefore$ $a^{-1}.a = 0$ ทฤษฎี 3.1.4 ข้อ ก)

3) ขัดกับ M_5 $(a.a^{-1} = 1)$

$\therefore$ $a^{-1} \neq 0$

<u>ทฤษฎี 3.1.8</u> กำหนดให้ $a,b \in R$ ถ้า $ab = 0$ จะได้ว่า $a = 0$ หรือ $b = 0$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า $a = 0$ เราได้ตามต้องการ

กรณีที่ 2 ถ้า $a \neq 0$

1) $ab = 0$ โจทย์

2) $a^{-1}ab = a^{-1}0$ M_1

3) $(a^{-1}a)b = 0$ M_3

4) $1.b = 0$ M_2 และ M_3

5) $b = 0$ M_2 และ M_4

แบบฝึกหัดชุด 3.1

1). จงพิสูจน์ทฤษฎี 3.1.1 ข), 3.1.3 ข) และ 3.1.4 ข)
โดยไม่ต้องใช้กฎการสลับที่

2). ถ้า $a,b,c \in R$ จงพิสูจน์ว่า $(c - b) + (b - a) = c - a$

3). กฎการตัดออกสำหรับการคูณ (cancellation law for multiplication)

กำหนดให้ $a,b,c \in R$

ก) ถ้า $ba = ca$ และ $a \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า $b = c$

ข) ถ้า $ab = ac$ และ $a \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า $b = c$

4). กำหนดให้ $x, a \in R$

ก) ถ้า $xa = a$ จงพิสูจน์ว่า $x = 1$

ข) ถ้า $ax = a$ จงพิสูจน์ว่า $x = 1$

5). ถ้า $a \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า $(a^{-1})^{-1} = a$

6). ถ้า $\frac{a}{b} = 0$ $(b \neq 0)$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$

7). ถ้า $a,b \in R$ จงพิสูจน์ว่า $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

8). ถ้า $a,b \in R$ จงพิสูจน์ว่า $(-a)(-b) = ab$

9). ถ้า $a \in R$ จงพิสูจน์ว่า $(-1)a = -a$

10). ถ้า $a,b,c \in R$ จงพิสูจน์ว่า $a(b - c) = ab - ac$

3.2 สัจจพจน์เกี่ยวกับลำดับ (The axioms of order)

จากสัจจพจน์ 11 ข้อ ข้างต้น เราสรุปคุณสมบัติของจำนวนจริงได้หลายประการ ประการ แต่ยังมีคุณสมบัติของจำนวนจริงที่ยังไม่ได้กล่าว เช่น ความสัมพันธ์ลำดับ (order relation) คุณสมบัติจำนวนบวก ซึ่งเป็นผลมาจากสัจจพจน์ลำดับ

O_1 มีสับเซ็ท P ของเซ็ทจำนวนจริง R ซึ่งสำหรับสมาชิกทุกตัวของ R คุณสมบัติต่อไปนี้ จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

ก) $a \in P$

ข) $a = 0$

ค) $-a \in P$

สัจจพจน์ข้อนี้ เรียกว่า ไตรโคโตมีลอว์ (Trichotomy law)

O_2 ถ้า $a \in P$ และ $b \in P$ จะได้ว่า $a + b \in P$

O_3 ถ้า $a \in P$ และ $b \in P$ จะได้ว่า $ab \in P$

ระบบใดซึ่งประกอบด้วยเซ็ทหนึ่งกับโอเปอเรชั่น 2 โอเปอเรชั่น และมีคุณสมบัติสอดคล้องสัจจพจน์ 14 ข้อ ข้างต้น เราเรียกระบบนั้นว่า ฟิลด์ลำดับ (order field) ดังนั้นระบบจำนวนจริง เป็นฟิลด์ลำดับ

<u>นิยาม 3.2.1</u> ถ้า $a \in P$ เรียก a ว่า จำนวนจริงบวก

$-a \in P$ เรียก a ว่า จำนวนจริงลบ

<u>ข้อสังเกต</u> 1) จำนวนจริงลบ กับจำนวนจริงซึ่งมีเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้า ไม่เหมือนกัน เช่น a เป็นจำนวนจริงใดๆ $-a$ จะเป็นจำนวนจริงบวก จำนวนจริงลบ หรือศูนย์ ก็ขึ้นอยู่กับจำนวนจริง a และจำนวนจริงทุกตัวสามารถเขียนในรูปที่มีเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้า เช่น $1 = -(-1)$

2) <u>เซ็ทของจำนวนจริงบวก และจำนวนจริงลบไม่มีสมาชิกซ้ำกัน</u>

3) จำนวน 0 ไม่เป็นทั้งจำนวนจริงบวก และจำนวนจริงลบ

ต่อไปจะกล่าวถึงนิยามเกี่ยวกับ ความสัมพันธ์ลำดับ

<u>นิยาม 3.2.2</u> 1) สัญญลักษณ์ $<$ (อ่านว่าน้อยกว่า) และสัญญลักษณ์ $>$ (อ่านว่ามากกว่า) ถ้า $a, b \in R$ เราเขียน $a < b$ (หรือ $b > a$) ก็ต่อเมื่อ $b - a$ เป็นจำนวนจริงบวก

2) สัญญลักษณ์ $\leq$ (อ่านว่าน้อยกว่า หรือเท่ากับ) และ $\geq$ (อ่านว่ามากกว่า หรือเท่ากับ) สำหรับ $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อมีคุณสมบัติซึ่งเป็นจำนวนจริงเพียงข้อเดียวดังนี้

ก) $a = b$

ข) $a < b$

$a \geq b$ ก็ต่อเมื่อมีคุณสมบัติเป็นจริงเพียงข้อเดียวดังนี้

ก) $a = b$

ข) $a > b$

ความสัมพันธ์ลำดับ $a > b$ นี้เราจะเรียกว่า อสมการ (inequality) อสมการ $a < b$ และ $b < c$ นี้ เราสามารถเขียนได้ว่า $a < b < c$ ในทำนองเดียวกัน $a \leq b$ และ $b \leq c$ เขียนได้ว่า $a \leq b \leq c$

ต่อไปจะกล่าวถึงคุณสมบัติของฟิลด์ลำดับ

<u>ทฤษฎี 3.2.3</u> a เป็นจำนวนจริงบวก ก็ต่อเมื่อ $a > 0$

พิสูจน์ กรณี 1) ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า $a > 0$

1)	ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก	
2)	$a - 0 = a + (-0)$	ความหมายการลบ
3)	$a + (-0) = a + 0$	ทฤษฎี 3.1.4 $((-1).0 = 0)$
4)	$a + 0 = a$	A_4
5)	$a - 0 = a$	จากข้อ 2),3) และ 4)
6)	$\therefore$ $a - 0$ เป็นจำนวนจริงบวก	ข้อ 5 และ a เป็นจำนวนจริงบวก
	$\therefore$ $a > 0$	นิยาม 3.2.2 ข้อ 1

กรณี 2) ถ้า $a > 0$ จะได้ว่า a เป็นจำนวนจริงบวก

1)	ให้ $a > 0$	โจทย์
2)	$a - 0$ เป็นจำนวนจริงบวก	นิยาม 3.2.2 ข้อ 1
3)	แต่ $a - 0 = a$	จากข้อ 5 กรณีที่ 1
4)	a เป็นจำนวนจริงบวก	จากข้อ 2) และ 3)

$\therefore$ จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า a เป็นจำนวนจริงบวก ก็ต่อเมื่อ $a > 0$

<u>ทฤษฎี 3.2.4</u> กำหนดให้ $a,b,c \in R$ ถ้า $a < b$ และ $b < c$ จะได้ว่า $a<c$

พิสูจน์

1)	จาก $a < b$ $\therefore$ $b-a$ เป็นจำนวนจริงบวก	นิยาม 3.2.2 ข้อ 1
2)	จาก $b < c$ $\therefore$ $c-b$ เป็นจำนวนจริงบวก	
3)	$(c - b) + (b - a)$ เป็นจำนวนจริงบวก	จากข้อ 1),2)และ O_2
4)	$(c - b) + (b - a) = c - a$	ข้อ 3
5)	$\therefore$ $c - a$ เป็นจำนวนจริงบวก	ข้อ 3) และ 4)
	$\therefore$ $c > a$	นิยาม 3.2.2 ข้อ 1

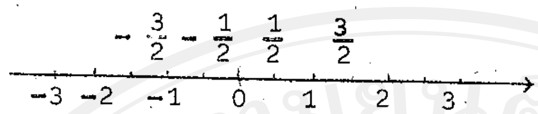
<u>แบบฝึกหัดชุด 3.2</u> กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

1) ถ้า $a > b$ จงพิสูจน์ว่า $a + c > b + c$
2) ถ้า $a > b$ และ $c > d$ จงพิสูจน์ว่า $a + c > b + d$
3) ถ้า $a > b$ และ $c > 0$ จงพิสูจน์ว่า $ac > bc$
4) ถ้า $a > b$ และ $c < 0$ จงพิสูจน์ว่า $ac < bc$
5) ถ้า $a \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า $a^2 > 0$
6) ถ้า $a > 0$ จงพิสูจน์ว่า $a^{-1} > 0$
7) ถ้า $a < 0$ จงพิสูจน์ว่า $a^{-1} < 0$
8) ถ้า $b > a > 0$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$

3.3. <u>การแทนจำนวนจริงด้วยจุดลงบนเส้นตรง</u> (Geometrical representation of real number)

ในแง่เรขาคณิตเราอาจแทนจำนวนจริงด้วยจุดบนเส้นตรงเส้นหนึ่ง ซึ่งเป็นเส้นแนวนอน (horizontal line) ในลักษณะที่ว่าจำนวนจริงแต่ละตัว แทนด้วยจุดๆเดียวบนเส้นตรงนั้น และในทางกลับกัน จุดแต่ละจุดบนเส้นตรงนี้ ก็แทนจำนวนจริงจำนวนเดียวเท่านั้น เรียกเส้นตรงนี้ว่าเส้นจำนวนจริง (real line) การแทนจำนวนจริงด้วยจุดบนเส้นจำนวนจริง กระทำโดยเลือกจุดๆหนึ่งบนเส้นตรงนี้ ให้แทนจำนวน 0 เลือกหน่วยความยาวหนึ่งหน่วย จะเป็นหน่วยอะไรก็ได้ หน่วยที่เลือกมานี้จะเป็นสเกลของเส้นจำนวนจริง จำนวนบวกแทนด้วยจุดซึ่งอยู่ทางขวาของ 0 และจำนวนลบแทนด้วยจุดทางซ้ายของ 0

ถ้า I^+ เป็นจำนวนเต็มบวก จุดที่แทน I^+ คือจุดซึ่งอยู่ห่างจาก 0 ไปทางขวาเป็นระยะทาง I^+ หน่วย จุดที่แทน $-I^+$ คือ จุดที่อยู่ห่างจาก 0 ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง I^+ (ดูจากรูปที่ 3.3.1)



รูปที่ 3.3.1

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ บนเส้นจำนวนจริงนั้น b จะอยู่ทางขวาของจุด a

3.4 ช่วง (Interval)

นิยาม 3.4.1 ช่วงจำกัด (finite interval)

ถ้า $a, b \in R$ และ $a < b$

1) ช่วงเปิด (open interval)(a,b) หมายถึง

$\{x \in R / a < x < b\}$

2) ช่วงปิด (closed interval) [a,b] หมายถึง

$\{x \in R / a \leq x \leq b\}$

3) ช่วงครึ่งเปิด (half opern interval หรือ half closed interval)(a,b] หมายถึง $\{x \in R / a < x \leq b\}$

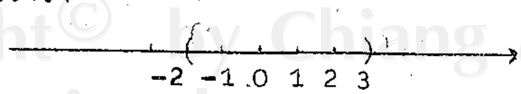
[a,b) หมายถึง $\{x \in R / a \leq x < b\}$

เรียก a และ b ว่าจุดปลาย (end point) ของช่วง และเรียกจำนวนจริงบวก b - a ว่าความยาวช่วง

เราสามารถเขียนเส้นจำนวนจริง แทนช่วงได้ดังนี้

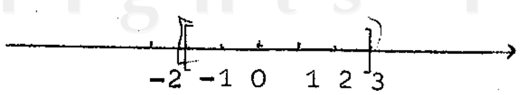
(-2,3) เขียนดังรูปที่ 3.4.1

รูปที่ 3.4.1

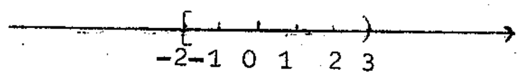


[-2,3] เขียนดังรูปที่ 3.4.2

รูปที่ 3.4.2

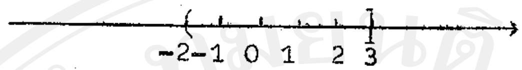


[-2,3) เขียนดังรูปที่ 3.4.3



รูปที่ 3.4.3

(-2,3] เขียนดังรูปที่ 3.4.4



รูปที่ 3.4.4

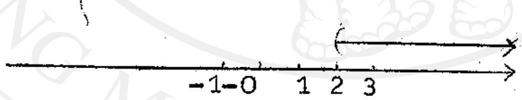
<u>นิยาม 3.4.2</u> ช่วงอนันต์ (infinite interval)

ถ้า a เป็นจำนวนจริง

(a, α)	หมายถึง	$\{x \in R / a < x\}$
$[a, \alpha)$	หมายถึง	$\{x \in R / a \leq x\}$
$(-\alpha, a)$	หมายถึง	$\{x \in R / x < a\}$
$(-\alpha, a]$	หมายถึง	$\{x \in R / x \leq a\}$
$(-\alpha, \alpha)$	หมายถึง	จำนวนจริง

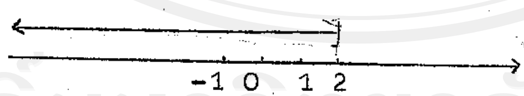
สัญลักษณ์ α ไม่ใช่เป็นจำนวน เราใช้สัญลักษณ์นี้เพื่อช่วยให้เขียนแทนข้อความได้อย่างกระทัดรัด

$(2, \alpha)$ เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนจริงดังนี้ (รูปที่ 3.4.5)



รูปที่ 3.4.5

$(-\alpha, 2]$ เขียนแทนด้วยเส้นจำนวนจริงดังนี้ รูปที่ 3.4.6



รูปที่ 3.4.6

ช่วงอื่นๆก็เขียนในลักษณะเช่นกัน

<u>ตัวอย่าง 3.4.1</u>

$[5, 12]$	=	$\{x \in R / 5 \leq x \leq 12\}$
$(4, \alpha)$	=	$\{x \in R / x > 4\}$
$(5, 12] \cap (4, \alpha)$	=	$(5, 12]$
$(5, 12] \cup (4, \alpha)$	=	$(4, \alpha)$

3.5 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value)

จากคุณสมบัติของไตรโคโตมีลอว์ (Trichotomy law) ใน O_1 ของหัวข้อ 3.2 เราทราบว่า ถ้า $a \neq 0$ จะได้ว่า a หรือ $-a$ จำนวนใดจำนวนหนึ่งต้องเป็นจำนวนบวก ดังนั้นค่าสัมบูรณ์ของ a หมายถึง จำนวนบวกจำนวนใดจำนวนหนึ่งใน $\{a, -a\}$ และถ้า $a = 0$ ค่าสัมบูรณ์ของ a คือ 0 ซึ่งให้นิยามได้ดังนี้

<u>นิยาม 3.5.1</u> ถ้า x เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ของ x ซึ่งเขียนแทนด้วย $|x|$ มีความหมายดังนี้

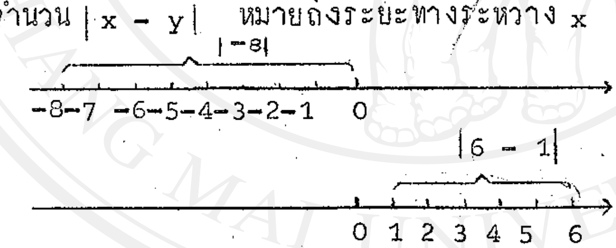
$$x = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

<u>ตัวอย่าง 3.5.1</u>

$$|5| = 5$$

$$|-8| = 8$$

ในแง่เรขาคณิต $|x|$ หมายถึงระยะทางจาก 0 ไปถึง x ถ้าค่าสัมบูรณ์ของผลต่างสองจำนวน $|x - y|$ หมายถึงระยะทางระหว่าง x และ y ดังรูปที่ 3.5.1



รูปที่ 3.5.1

คุณสมบัติที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์มีดังนี้

<u>ทฤษฎี 3.5.2</u> ให้ $x \in R$ จะได้ว่า $|x| \geq x$ และ $|x| \geq -x$

พิสูจน์ กรณี 1 ถ้า $x > 0$

1) $|x| = x$ นิยาม 3.5.1

2) จาก $x > 0$ $\therefore -x < 0$ (-1)คูณทั้งสองข้าง

3) $|x| > 0 > -x$ จากข้อ 1) และ 2)

$\therefore |x| > -x$

กรณี 2 $x = 0$

1) $|x| = x$ นิยาม 3.5.1

2) จาก $x = 0$ $\therefore -x = 0$ (-1)คูณทั้งสองข้าง

3) $\therefore |x| = x = 0$

$\therefore |x| = x$

กรณี 3 $x < 0$

1) $|x| = -x$ นิยาม 3.5.1

2) จาก $x < 0$ $\therefore -x > 0$ (-1)คูณทั้งสองข้าง

3) $|x| > 0 > x$

$\therefore |x| > x$

จากกรณี 1),2) และ 3) ดังนั้น $|x| \geq x$ และ $|x| \geq -x$

<u>ทฤษฎี 3.5.3</u> ให้ $x \in R$ จะได้ว่า $|x| = |-x|$

พิสูจน์ กรณี 1 ถ้า $x > 0$

1) $|x| = x$ นิยาม 3.5.1

2) $|-x| = -(-x) = x$ นิยาม 3.5.1

3) $|x| = |-x|$ จาก 1) = 2)

กรณี 2 ถ้า $x = 0$

$\therefore |x| = 0 = |-x|$

กรณี 3 ถ้า $x < 0$

1) $|x| = -x$ นิยาม 3.5.1

2) $|-x| = -x$ นิยาม 3.5.1

ซึ่ง $-x > 0$

จากทั้ง 3 กรณี ดังนั้น $|x| = |-x|$

<u>ทฤษฎี 3.5.4</u> ให้ $x \in R$ และ a เป็นจำนวนจริงบวก $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ

$-a < x < a$

พิสูจน์ กรณี 1 ถ้า $|x| < a$ จะได้ $-a < x < a$

1)	ให้ $|x| < a$	จากโจทย์
2)	$a > |x| \geq x$ และ $a > |x| \geq -x$	ทฤษฎี 3.5.2
3)	$\therefore a > x$ และ $a > -x$	จากข้อ 2)
4)	$a > x$ และ $-a < x$	(-1)คูณทั้งสองข้างของอสมการทางขวา
5)	$-a < x < a$	ข้อสังเกต

กรณี 2 ถ้า $-a < x < a$ จะได้ว่า $|x| < a$

1)	ให้ $-a < x < a$ ซึ่ง $a > 0$	
2)	ถ้า $x \geq 0$ จะได้ $a > x = |x|$	ข้อ 1) และนิยาม 3.5.1
3)	ถ้า $x < 0$ จะได้ $|x| = -x$	นิยาม 3.5.1
4)	แต่ $-a < x$	ข้อ 1)
5)	$\therefore a > -x = |x|$	(-1)คูณ 4) และข้อ 3)
6)	$a > |x|$	

จากทั้งสองกรณี ดังนั้น $|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$

<u>ตัวอย่าง 3.5.2</u> จงหาค่า x ซึ่งสอดคล้องกับ อสมการ $|x - 3| < 5$

$|x - 3| < 5$

$\therefore -5 < x - 3 < 5$ ทฤษฎี 3.5.4

$-2 < x < 8$

<u>ทฤษฎี 3.5.5</u> ให้ $x, y \in R$ จะได้ $|x| + |y| \geq |x + y|$

พิสูจน์

1)	$|x| \geq x$ และ $|x| \geq -x$	ทฤษฎี 3.5.2
2)	$|x| \geq x$ และ $-|x| \leq x$	(-1)คูณทั้งสองข้างอสมการทางขวา

3) $\therefore\ -|x| \leq x \leq |x|$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

4) $-|y| \leq y \leq |y|$

5) $-|x|-|y| \leq x + y \leq |x|+|y|$ ข้อ 3) + 4)

6) $-(|x|+|y|) \leq x + y \leq |x|+|y|$

7) $|x + y| \leq |x| + |y|$ ทฤษฎี 3.5.4

<u>ทฤษฎี 3.5.6</u> ถ้า $x \in R$ และ y เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

พิสูจน์ กรณี 1 ถ้า $x \geq 0$ และ $y \geq 0$

$|x/y| = x/y = |x|/|y|$ นิยาม 3.5.1

กรณี 2 ถ้า $x > 0$ และ $y < 0$

$|x/y| = -x/y$ นิยาม 3.5.1

$= x/(-y)$

$= |x|/|y|$ นิยาม 3.5.1

กรณี 3 ถ้า $x < 0$ และ $y > 0$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ กรณี 2

กรณี 4 ถ้า $x < 0$ และ $y < 0$

$|x/y| = x/y = (-x)/(-y)$

$= |x|/|y|$

จากกรณี 1,2,3 และ 4 จะได้ว่า $|x/y| = |x|/|y|$

ข้อสังเกต 1. จากนิยามจะเห็นว่าค่าสัมบูรณ์ จะไม่มีค่าเป็นจำนวนลบ ดังนั้น $|x| \geq 0$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

2. จากทฤษฎี 3.5.3 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง จะได้ $|a - b| = |b - a|$ แสดงว่าระยะทางจาก a ไป b มีค่าเท่ากับระยะทางจาก b ไป a.

3. และจากทฤษฎี 3.5.5 ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$ แสดงว่าระยะทางจาก a ไป c สั้นกว่า หรือเท่ากันกับผลรวมของระยะทางจาก a ไป b และระยะทางจาก b ไป c

แบบฝึกหัดชุด 3.5

1). จากหาค่า x ซึ่งสอดคล้องอสมการต่อไปนี้

1.1 $\lvert x - 4 \rvert < 2$ $2<x<6$	1.4. $\lvert x + 1 \rvert < \lvert x \rvert$
1.2 $\lvert 4 - 5x \rvert \leq 6$	1.5 $\lvert 3x - 2 \rvert > 5$
1.3 $\lvert 3x - 2 \rvert < 7$	1.6 $\lvert 4x + 2 \rvert \geq 4$

สำหรับข้อ 1.5 และ 1.6) ค่า x ของ $|3x - 2| > 5$ เป็นคอมพลิเมนต์ของค่า x ใน $|3x - 2| \leq 5$ กับจำนวนจริง

2) จงพิสูจน์แต่ละข้อข้างล่างนี้

2.1 $|xy| = |x||y|$

2.2 $|x| - |y| \leq |x - y|$

2.3 $|y| - |x| \leq |x - y|$

2.4 $|x| - |y| \leq |x - y|$

2.5 $|x - y| + |y - z| \geq |x - z|$

3.6 จำนวนธรรมชาติ จำนวนเต็ม และจำนวนตักยะ (Natural number Integer and Rational number)

จากสัจจพจน์ M_4 ฟิลด์นั้นมี 1 ซึ่ง $1 \neq 0$ เป็นสมาชิก และจาก A_1 ผลบวกของจำนวนจริงต้องเป็นจำนวนจริง เช่น $1 + 1$ เขียนแทนด้วย 2 3 เขียนแทน $2 + 1 = 1 + 1 + 1$ 4 เขียนแทน $3 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$ เป็นต้น จากฟิลด์ลำดับ เราทราบว่า $n + 1 > n$ เมื่อ n เป็น จำนวนจริงใดๆ และจะได้ว่า $1 < 2 < 3 < \ldots \ldots$

นิยาม 3.6.1 ให้จำนวนธรรมชาติ (Natural number) เป็นสับเซ็ทของเซ็ทจำนวนจริง จำนวนธรรมชาติประกอบด้วยสมาชิก 0 ,1 และจำนวนอื่นๆ ซึ่งได้จากการนำ 1 มาบวกซ้ำๆกัน โดยที่ผลบวกของจำนวนธรรมชาติเป็นจำนวนธรรมชาติ และผลคูณของจำนวนธรรมชาติเป็นจำนวนธรรมชาติ

เขียน N แทนเซ็ทจำนวนธรรมชาติ

นิยาม 3.6.2 จำนวนเต็ม (integer) ได้แก่เซ็ทของจำนวนธรรมชาติ และเซ็ทของอินเวอร์สของการบวก ของสมาชิกของจำนวนธรรมชาติ เขียน I แทนจำนวนเต็ม ซึ่งจำแนกได้ดังนี้

จำนวนเต็มบวก (Positive integer) ได้แก่ {1,2,3,...}เขียนแทนด้วย I^+

จำนวนเต็มศูนย์ (Zero integer) ได้แก่ { 0 }

จำนวนเต็มลบ (Negative integer) ได้แก่ {-1,-2,-3,... } เขียนแทนด้วย I^-

จำนวนเต็มคู่ (even integer) เป็นจำนวนเต็มที่เขียนในรูป 2n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่เซ็ท {..., $\boxed{-4,-2}$,0,2,4,... }

จำนวนเต็มคี่ (odd integer) เป็นจำนวนเต็มที่เขียนในรูป 2n + 1 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ได้แก่เซ็ท { ...,-3,-1,1,3,5,... }

จำนวนเฉพาะ (prime number) ถ้า p เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์ p เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $p \neq 1$ และ $p \neq -1$ และไม่มีตัวหารลงตัวอื่นใดนอกจาก 1,-1, p และ p

นิยาม 3.6.3 จำนวนจริง a จะเป็นจำนวนตักยะ (Rational number) ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม m และ $n \neq 0$ ซึ่ง $a = \frac{m}{n}$

เขียน Q แทนเซ็ทของจำนวนตักยะ

เนื่องจาก $m = \frac{m}{1}$ สำหรับจำนวนเต็ม m ทุกตัว ดังนั้นจำนวนเต็มทุกตัวเป็นจำนวนตักยะ

จำนวนตักยะกับโอเปอเรชั่น บวก และคูณ มีระบบเป็นฟิลด์ลำดับ

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย จากทฤษฎีของ ปีธากอรัส (Pythagorean Theorem) จะได้ว่าด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $\sqrt{2}$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนตักยะ แสดงได้ดังนี้

<u>เลมมา 3.6.4</u> กำหนดให้ $a \in R$ ถ้า a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ จะได้ว่า a เป็นจำนวนเต็มคู่ด้วย

พิสูจน์ ใช้ Contraposition ต้องพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคี่แล้วจะได้ว่า a^2 จะเป็นจำนวนเต็มคี่

1) ให้ a เป็นจำนวนเต็มคี่ $\therefore$ $a = 2n + 1$ $\quad n \in I$

2) $\therefore$ $a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

$= 2(2n^2 + 2n) + 1 = 2m + 1$ เมื่อ $m = 2n^2 + 2n$

$\therefore$ a^2 เป็นเลขคี่

<u>ทฤษฎี 3.6.5</u> ให้แสดงว่า $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตักยะ

พิสูจน์ (ใช้พิสูจน์ทางอ้อม)

1) ให้ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตักยะ

2) $\therefore \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ เมื่อ $p, q \in I, q \neq 0$ และ p, q ไม่มีตัวคูณร่วมนอกจาก 1 และ -1

3) $\therefore$ $2 = \frac{p^2}{q^2}$

4) $p^2 = 2q^2$

5) $\therefore$ p^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ (ความหมายของเลขคู่)

6) และ p เป็นจำนวนเต็มคู่ เลมมา 3.6.4

7) ให้ $p = 2n$; $n \in I$

8) $\therefore$ $p^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$

9) $\therefore$ $2(2n^2) = 2q^2$ จากข้อ 4) $p^2 = 2q^2$

10) $2n^2 = q^2$

11) $\therefore$ q^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

12) q เป็นจำนวนเต็มคู่ เลมม่า 3.6.4

$\therefore$ p,q มี 2 เป็นตัวคูณร่วม ซึ่งขัดกับที่สมมติ

$\therefore \sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตักยะ

<u>นิยาม 3.6.6</u> จำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตักยะ เป็นจำนวนอตักยะ (Irrational number)

ตัวอย่างของจำนวนอตักยะได้แก่ π (อัตราส่วนระหว่างเส้นรอบวง กับเส้นผ่าศูนย์กลาง)

e ฐานของลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm)

$\sqrt{p}$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

<u>แบบฝึกหัดชุด 3.6</u>

1) จงพิสูจน์แต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 ผลบวกของจำนวนเต็มคู่เป็นจำนวนเต็มคู่

1.2 ผลบวกของจำนวนเต็มคี่เป็นจำนวนเต็มคู่

1.3 ผลบวกของจำนวนเต็มคู่กับจำนวนเต็มคี่ เป็นจำนวนเต็มคี่

2) กำหนดให้ $a,b \in Q$ ซึ่ง $a<b$ จงพิสูจน์ว่า มี $x \in Q$ ซึ่ง $a<x<b$

3) จงตรวจดูว่าจำนวนตักยะกับโอเปอเรชั่นการคูณ และการบวก มีมีระบบเป็นฟิลด์

3.7 <u>สัจจพจน์ของคอมพลีท (Axioms of Completeness)</u>

<u>นิยาม 3.7.1</u> ถ้า S เป็นสับเซ็ทของ R $S \neq \emptyset$, S จะบาวด์ข้างบน (bounded above) ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง a ซึ่ง $x \leq a$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัวใน S เรียก a ว่าอัปเปอร์บาวด์ (upper bound) ของ S

<u>ตัวอย่าง 3.7.1</u> ให้ $S = [0,10]$

อัปเปอร์บาวด์ของ S ได้แก่ 10 และจำนวนจริงทุกตัวที่มากกว่า 10

<u>นิยาม 3.7.2</u> ถ้า S เป็นสับเซ็ทของ R, $S \neq \emptyset$ จำนวนจริง a จะเป็นซูปรีมัม (supremum หรือ least upper bound) ของ S ก็ต่อเมื่อ

1) a เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ S
2) ถ้า b เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ S จะได้ว่า $a \leq b$

เขียน $\sup\limits_{x \in S}$ แทนซูปรีมัม หรือ $\sup S = \sup\limits_{x \in S} x = \sup \{x / x \in S\}$

<u>ตัวอย่าง 3.7.2</u> ให้ $S = [0,10]$

$\sup S = 10$ ซึ่ง $10 \in S$

<u>ตัวอย่าง 3.7.3</u> ให้ $S = (-12,12)$

อัปเปอร์บาวด์ของ S ได้แก่ 12 และจำนวนจริงทุกตัวที่มากกว่า 12

$\therefore \sup S = 12$ ซึ่ง $12 \notin S$

<u>ตัวอย่าง 3.7.4</u> <u>R ไม่มีอัปเปอร์บาวด์</u>

เพราะถ้า a เป็นจำนวนจริงใดๆใน R ซึ่งเป็นอัปเปอร์บาวด์

$a + 1 \in R$ ซึ่ง $a + 1 > a$ ดังนั้น a ไม่เป็นอัปเปอร์บาวด์

เซ็ทใดๆที่ไม่บาวด์ก็ไม่มี sup

<u>ทฤษฎี 3.7.3</u> กำหนดให้ S เป็นสับเซ็ท R ถ้า S มี ซูปรีมัม จะมีได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ เราต้องการพิสูจน์ ถ้า x และ y ต่างก็เป็นซูปรีมัมของ S แล้ว $x = y$

$x \leq y$ เพราะ y เป็นอัปเปอร์บาวด์ และ x เป็นซูปรีมัม

$y \leq x$ เพราะ x เป็นอัปเปอร์บาวด์ และ y เป็นซูปรีมัม

$\therefore x = y$

<u>ตัวอย่าง 3.7.5</u> ให้ $S = \{x / x = \frac{n}{n+1}$, n เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$

ซึ่ง $S = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$

$\therefore n + 1 > n$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว

$\frac{n}{n+1} < 1$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว

$\therefore$ 1 เป็นอัปเปอร์บาวด์

P_{15} สัจจพจน์ของคอมพลีท (Axioms of completeness)

ถ้า S เป็นสับเซ็ทของ R, $S \neq \emptyset$ และ S บาวด์ข้างบนดังนั้น S จะมีซูปรีมัมใน R

ถ้า $S = \{x \in Q / x^2 < 2\}$ S บาวด์ข้างบน และ $S \neq \emptyset$ ดังนั้น $\sup S = \sqrt{2}$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนตักยะ จากสัจจพจน์ P_{15} ทำให้รู้จักจำนวนอตักยะและจำนวนจริงไม่มีช่องว่าง (gap) แต่จำนวนตักยะมีช่องว่าง (สัจจพจน์ P_{15} ยังสร้างความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนจริง และทศนิยม (decimal) ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

ฟิลด์ลำดับซึ่งสอดคล้องกับ P_{15} เรียกว่า ฟิลด์ลำดับคอมพลีท (Complete ordered field) ระบบจำนวนจริงเป็นฟิลด์ลำดับคอมพลีท

<u>นิยาม 3.7.4</u> ถ้า S เป็นสับเซ็ทของ R , $S \neq \emptyset$ S จะบาวด์ข้างล่าง (bounded below) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง a ซึ่ง $a \leq x$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัวใน S เรียก a ว่า โลเวอร์บาวด์ (lower bound) ของ S

<u>ตัวอย่าง 3.7.6</u> ให้ $S = [0,10]$

โลเวอร์บาวด์ได้แก่ 0 และจำนวนจริงทุกตัวที่น้อยกว่า 0

<u>นิยาม 3.7.5</u> ถ้า S เป็นสับเซ็ทของ R , $S \neq \emptyset$ จำนวนจริง a จะเป็นอินฟิมัม (infimum) หรือ greatest lower bound) ก็ต่อเมื่อ

1) a เป็นโลเวอร์บาวด์ของ S

2) ถ้า b เป็นโลเวอร์บาวด์ของ S จะได้ว่า $b \leq a$

เขียน inf แทนอินฟิมัม หรือ $\inf S = \inf_{a \in S} a = \inf\{x / x \in S\}$

ถ้าเซ็ท S บาวด์ข้างบนและบาวด์ข้างล่าง เรากล่าวว่า S เป็นเซ็ทที่บาวด์ (bounded) ดังนั้น ถ้า A บาวด์ ก็ต่อเมื่อ $A \subset [M,N]$ สำหรับช่วงจำกัดบางช่วง $[M,N]$ เช่นช่วง $[0,1]$ เป็นช่วงที่บาวด์

เซ็ทว่าง $\emptyset \subset [M,N]$ ดังนั้น $\emptyset$ เป็นเซ็ทที่บาวด์ โดยมีจำนวนจริงทุกตัวเป็นอัปเปอร์บาวด์ แต่ $\emptyset$ ไม่มี sup

ข้อสังเกต $\inf\limits_{x \in S} x = -\sup\limits_{x \in S}(-x)$

<u>ทฤษฎี 3.7.6</u> ให้ S เป็นสับเซ็ทของ R , $S \neq \emptyset$ ถ้า S บาวด์ข้างล่าง จะได้ว่า S จะมีอินฟิมัม

พิสูจน์

1) ให้ $S' = \{y \in R / y$ เป็นโลเวอร์บาวด์ของ $S\}$ $S' \not\subset S$

2) $\therefore S' \neq \emptyset$ ($\because$ S มีโลเวอร์บาวด์)

3) ฉะนั้น S' บาวด์ข้างบน อัปเปอร์บาวด์ ได้แก่สมาชิกทั้งหมดของ S

4) $\therefore S'$ มี sup จาก P_{15}

$\therefore \sup S' = \alpha$

5) $\therefore y \leq \sup S' / \leq \alpha$ สำหรับสมาชิก y ใน S' ทั้งหมด

6) และ $\sup S' \leq x$ สำหรับสมาชิก x ใน S ทั้งหมด

7) $\therefore \sup S'$ เป็นโลเวอร์บาวด์ของ S จาก 6) และนิยาม 3.7.5

α

$\alpha = \inf S$

8) ดังนั้น sup S' เป็นอินฟิมัมของ S จากข้อ 5) และ 7)

$\therefore \sup S' = \inf S.$

<u>ทฤษฎี 3.7.7</u> ให้ S เป็นสับเซ็ทของ R ถ้า S มีอินฟิมัมจะมีได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

(ให้เป็นแบบฝึกหัด)

<u>ทฤษฎี 3.7.8</u> คุณสมบัติของอาร์คีเมเดียน (Archimedean property)

ถ้า $b,c \in R$ ซึ่ง $c > 0$ จะมี $n \in N$ ซึ่ง $nc > b$

พิสูจน์ (พิสูจน์ทางอ้อม)

1) สมมติว่ามี $b,c \in R$ ซึ่ง $c > 0$ และ $nc \leq b$ สำหรับ $n \in N$ ทุกตัว

2) ให้ $S = \{x / x = nc\}$ เมื่อ $n \in N\}$

3) $\therefore$ b เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ S นิยาม 3.7.1

4) $\therefore$ จะมี $a \in R$ ซึ่ง $\sup S = a$ P_{15}

5) แต่ $a - c < a$

6) $a - c$ ไม่ใช่อัปเปอร์บาวด์ของ S

7) ดังนั้นจะมี $nc \in S$ ซึ่ง $nc > a - c$

8) และ $nc + c > a$

$\therefore$ $(n + 1)c > a$

จะได้ว่า $(n + 1)c \in S$ $\because n + 1 \in N$

ซึ่งขัดกับข้อความที่ว่า a เป็นอัปเปอร์บาวด์

$\therefore$ ถ้า $b, c \in R$ และ $c > 0$ จะมี $n \in N$ ซึ่ง $nc > b$

<u>บทแทรก 3.7.9</u> สำหรับจำนวนจริง b ทุกตัว จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $n > b$

พิสูจน์ 1) $\therefore$ $nc > b$ ทฤษฎี 3.7.8

2) ให้ $c = 1$ $\therefore$ $n > b$

บทแทรกนี้ อาจกล่าวได้ว่า เซ็ทจำนวนธรรมชาติไม่บาวด์ข้างบน

<u>บทแทรก 3.7.10</u> สำหรับจำนวนจริง b ทุกตัว จะมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $m < b$

พิสูจน์ 1) ถ้าไม่มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $m < b$

2) จะได้ว่า b เป็นโลเวอร์บาวด์ของ I

3) $\therefore$ $\inf I = c$ P_{15}

4) $\because$ $m + (-1) \in I$ เมื่อ $m \in I$

5) $\therefore$ $m - 1 \geq c$ สำหรับจำนวนเต็ม m ทุกตัว

6) $\therefore$ $m \geq c + 1$ สำหรับจำนวนเต็ม m ทุกตัว

7) $\therefore$ $c + 1$ เป็นโลเวอร์บาวด์

ซึ่งขัดกับที่ว่า c เป็น อินฟิมัมของ I

$\therefore$ สำหรับจำนวนจริง b ทุกตัว จะมีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $m < b$

<u>บทแทรก 3.7.11</u> สำหรับจำนวนจริงบวก b ทุกตัวจะมี $n \in I^+$ ซึ่ง $\frac{1}{n} < b$

พิสูจน์ 1) จะมี $n \in N$ ซึ่ง $n > \frac{1}{b}$ บทแทรก 3.7.9

2) $\therefore\ n(n^{-1}b) > b^{-1}(n^{-1}b)$ $\because\ n^{-1}b > 0$

3) $b > n^{-1}$

$\therefore\ b > \frac{1}{n}$

<u>ทฤษฎี 3.7.12</u> สำหรับ $x \in R$ ทุกตัว จะมี $k \in I$ ซึ่ง $x - 1 \leq k < x$

พิสูจน์ 1) จะมี $m, n \in I$ ซึ่ง $m < x < n$ บทแทรก 3.7.9, 3.7.10

2) $m, m+1, m+2, \ldots, n$ เป็นจำนวนเต็มที่เรียงลำดับ และมีจำนวนจำกัด

3) ให้ k เป็นจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดระหว่าง m, n แต่ $k < x$

4) $\therefore\ k + 1 \geq x$

5) ดังนั้น $k \geq x - 1$

$\therefore\ x - 1 \leq k < x$ จากข้อ 3), 4)

<u>ทฤษฎี 3.7.13</u> (The rational density theorem)

ถ้า $a, b \in R$ ซึ่ง $a < b$ จะได้ว่า จะมี $r \in Q$ ซึ่ง $a < r < b$

พิสูจน์ 1) จะมี $n \in N$ ซึ่ง $\frac{1}{n} < b - a$ บทแทรก 3.7.11

2) $\therefore\ a < b - \frac{1}{n}$

3) และจะมี $k \in I$ ซึ่ง $nb - 1 \leq k < nb$ ทฤษฎี 3.7.12 และ $nb \in R$

4) $\therefore\ b - \frac{1}{n} \leq kn^{-1} < b$ n^{-1} คูณตลอด

5) $\therefore\ a < b - \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} < b$ จากข้อ 2) และ 3)

6) ให้ $r = \frac{k}{n}$ $\therefore\ a < r < b$

<u>ทฤษฎี 3.7.14</u> ให้ $b \in R$ และ $S = \{x / x \in Q$ และ $x < b\}$ จะได้ว่า

$b = \sup S$

พิสูจน์

1) จาก $S = \{x/x \in Q$ และ $x < b\}$

2) $\therefore b$ เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ S — นิยาม 3.7.1

3) ให้ $c = \sup S \;\therefore\; c \leq b$ — P_{15} และนิยาม 3.7.2

4) ถ้า $c < b$ จะได้ว่า จะมี $r \in Q$ ซึ่ง $c<r<b$ — ทฤษฎี 3.7.13

5) แต่ $r < b$ จะได้ว่า $r \in S$ — จากข้อ 1)

6) จาก $r < b \;\therefore\; r \in S$ และ $c < r$ — ข้อ 1) และ 3)

ซึ่งขัดกับที่ว่า c เป็นอัปเปอร์บาวด์

$\therefore\; b = c = \sup S$ — $(\because\; c = \sup S)$

<u>ตัวอย่าง 3.7.7</u> ให้ $S = \{x/x = n/n+1$, n เป็นจำนวนเต็มบวก $\}$ จงพิสูจน์ว่า

$\sup S = 1$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.7.5 เราทราบว่า 1 เป็นอัปเปอร์บาวด์

1) สมมติให้ $c = \sup S$ ซึ่ง $c < 1$

2) $\therefore$ จะมี $k \in N$ ซึ่ง $1/k < 1 - c$ — บทแทรก 3.7.11

3) $\therefore\; c < 1 - 1/k = (k - 1)/k$ $\in S$

แสดงว่า c น้อยกว่าสมาชิกของ S ซึ่งขัดกับที่ว่า c เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ S

$\therefore\; c = 1$

<u>แบบฝึกหัดชุด 3.7</u>

1) จงหา sup และ inf ของเซ็ทต่อไปนี้

1.1 $A = (7,8)$

1.2 $B = \{\pi + 1, \pi + 2, \pi + 3, \ldots\}$

1.3 $C = \{\pi + 1, \pi + \frac{1}{2}, \pi + \frac{1}{3}, \pi + \frac{1}{4}, \ldots\}$

1.4 $D = (1,3] \cup (-4,-1)$

แบบฝึกหัดชุด 3.7 (ต่อ)

1)

1.5 $\quad E = \{x \in I^+ / x = \frac{1}{n}, n \in I^+\}$

1.6 $\quad F = \{x \in R / x^2 < 16\}$

1.7 $\quad G = \{x \in I^+ / x = 1 - \frac{1}{n}, n \in I^+\}$

2) จงพิสูจน์ทฤษฎี 3.7.7

3) สำหรับจำนวนจริง b ทุกตัวจงพิสูจน์ว่า จะมีจำนวนเต็ม n ซึ่ง $n > b$

4) ถ้า $a, b \in R$ และ $a > 1$ จงพิสูจน์ว่า จะมี $n \in N$ ซึ่ง $a^n > b$

5) ถ้า $x \in R$ จงพิสูจน์ว่า จะมี $n \in I$ จำนวนเดียวเท่านั้น ซึ่ง $n \leq x < n + 1$

6) ให้ $S = \{x/ = 10^n$ ซึ่ง $n \in N\}$ นั้นจะได้ว่า S ไม่บาวด์ข้างบน

7) ให้ b เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า จะมี $n \in N$ ซึ่ง $\frac{1}{10^n} < b$

3.8 การแทนจำนวนจริงด้วยทศนิยม (Representation of real number of decimal)

จำนวนจริง r ที่เขียนแทนด้วย

$$r = a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdot \quad \cdot \cdot \cdot + \frac{a_n}{10^n} \quad \ldots\ldots(1)$$

ซึ่ง $a_o \in I^+ \cup \{0\}$ และ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \leq a_i \leq 9$ หรือเขียนแทนได้ว่า

$$r = a_o . a_1 a_2 a_3 \cdot \cdot \cdot a_n$$

เรียก r ว่าทศนิยมรูจบ (terminating decimal)

ตัวอย่าง 3.8.1 $\quad 826 = 8(10^2) + 2(10) + 6$

$$15.003 = 1(10) + 5 + \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

$$4.123 = 4 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

จำนวนจริงที่สามารถเขียนได้ตามสมการ 1) หรือเขียน $r = \frac{a}{10^n}$, $n \in I$ เรียกว่าจำนวนตักยะ แต่จำนวนตักยะทุกจำนวน ไม่สามารถเขียนแทนทศนิยมรู้จบ เช่น $\frac{1}{3}$ เป็นจำนวนตักยะ แต่ไม่สามารถเขียนเป็นทศนิยมรู้จบได้

<u>ตัวอย่าง 3.8.2</u> จงแสดงว่า $\frac{1}{3}$ เป็นจำนวนตักยะที่ไม่สามารถเขียนเป็นทศนิยมรู้จบได้

วิธีทำ สมมติ $\frac{1}{3}$ เป็นจำนวนตักยะที่เขียนแทนด้วยทศนิยมรู้จบได้ จะมี $n \in I$ บางตัวซึ่งทำให้ $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$

$\therefore \; 3a = 10^n$

แต่ 3 ไม่ใช่ตัวประกอบของ 10 ดังนั้น 3 หาร 10 ไม่ลงตัว

$\therefore \; \frac{1}{3}$ เขียนแทนทศนิยมรู้จบไม่ได้

เรียก $\frac{1}{3} = .333\ldots$ ว่าเป็นทศนิยมไม่รู้จบชนิดซ้ำ (non-terminating repeating decimals ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบสมการ 1) ได้ดังนี้

$$r = a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots \text{ ซึ่ง } a_1 = a_2 = a_3 = \cdots$$

ส่วนจำนวนอตักยะนั้นเขียนในรูปทศนิยมไม่รู้จบชนิดไม่ซ้ำ (non - terminating terminating non repeating decimal เช่น $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$ ซึ่งสามารถเขียนในรูปแบบสมการ 1) ได้ ดังนี้

$$r = a_o + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \ldots\ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots\ldots$$

เมื่อ $a_o = I^+ \cup \{0\}$ และ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $0 \leq a_i \leq 9$

พิจารณาการสร้างทศนิยมรู้จบโดยประมาณ จากจำนวนจริงบวกใดๆ c จากแบบฝึกหัด 3.7 ข้อ 5 ได้ว่า

จะมี $b \in I$ ซึ่ง $b \leq c < b + 1$

แต่ $b < b + \frac{1}{10} < b + \frac{2}{10} < \ldots < b + \frac{9}{10} < b + \frac{10}{10} = b + 1$

และจะมี $a_1 \in I$ ซึ่ง $b + \frac{a_1}{10} \leq c < b + \frac{(a_1 + 1)}{10}$ ซึ่ง $0 \leq a_1 \leq 9$ .... (1)

แต่ $b+\frac{a_1}{10}<b+\frac{a_1}{10}+\frac{1}{10^2}<b+\frac{a_1}{10}+\frac{2}{10^2}<\cdots<b+\frac{a_1}{10}+\frac{9}{10^2}<b+\frac{(a_1+1)}{10}$

และจะมี $a_2 \in I$ ซึ่ง $b+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}\le c<b+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{10^2}$ เมื่อ $0 \le a_2 \le 9$ .... (2)

จากอสมการ 1) และ 2) กระทำต่อไปเรื่อยๆครั้งที่ k จะได้ว่า

$$b+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}\le c<b+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k+1}{10^k} \quad \ldots(3)$$

$$\therefore\ 0\le c-\left(b+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}\right)<\frac{1}{10^k} \quad \ldots\ldots\ldots(4)$$

จะเห็นว่าถ้าให้ k มีค่ามากๆ ค่าของ c จะเข้าใกล้ $b+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10}+\frac{a_3}{10}+\cdots+\frac{a_k}{10}$ หรือ $b.a_1a_2a_3\cdots a_k$ มากที่สุด

จากอสมการ 1),2) และ 3) ถ้าเรากระทำต่อไปถึงอนันต์ ก็จะได้เซ็ทอนันต์ดังนี้

$$S_c = \{\, b, b.a_1, b.a_1a_2, b.a_1a_2a_3, \ldots \,\}$$

<u>ตัวอย่าง 3.8.3</u> จงพิสูจน์ว่า $c = \sup Sc$.

พิสูจน์ จากสมการ $b.a_1a_2\cdots a_k \le c$ สำหรับ k ทุกตัว

จะได้ว่า c เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ Sc

ให้ $d < c$ เมื่อ $d \in R$

จะมี $k \in N$ ซึ่ง $\frac{1}{10^k} < c - d$ แบบฝึกหัด 3.7 ข้อ 7)

$\therefore\ c-(b.a_1a_2\cdots a_k)<\frac{1}{10^k}$ จากสมการ (4)

$\therefore\ c-(b.a_1a_2\cdots a_k)<\frac{1}{10^k}<c-d$

ดังนั้น $c < b.a_1a_2\cdots a_k$

$\therefore\ d$ ไม่ใช่อัปเปอร์บาวด์ของ Sc

นั่นคือ $c = \sup Sc$

ถ้าจำนวน c เป็นทศนิยมไม่รู้จบ (non-terminating decimal) เราหมายถึง $c = \sup Sc$ จากตัวอย่าง 3.8.3 เราหมายถึง จำนวนจริง $c>0$ ทุกจำนวนสามารถเขียนแทนด้วยทศนิยมไม่รู้จบ และในทางกลับกันทศนิยมไม่รู้จบทุกจำนวนเขียนแทนด้วยจำนวนจริงได้ เนื่องจาก Sc เป็นเซ็ทที่บาวด์ข้างบนด้วย $b+1$ ดังนั้นจะมี sup ซึ่งเป็นจำนวนจริงจะได้ว่า $b.a_1a_2\ \ldots$ ต้องเท่ากับจำนวนจริงจำนวนใดจำนวนหนึ่ง

ถ้า d เป็นจำนวนจริงลบ จะได้ว่า $(-d) > 0$ ซึ่ง $(-d)$ สามารถเขียนแทนด้วยทศนิยมไม่รู้จบได้ ถ้า $(-d) = b.a_1a_2a_3\ldots$

จะได้ $d = -(b.a_1a_2a_3\ldots)$.

∴ จะเห็นว่าจำนวนจริงทุกจำนวนสามารถเขียนในรูปทศนิยมไม่รู้จบได้

3.9 <u>ทศนิยมไม่รู้จบชนิดซ้ำ</u> (non - terminating repeating decimal)

ทศนิยมบางจำนวน จะมีจำนวนหลังจุดทศนิยมซ้ำกันตลอด เช่น 1.333... หรือ .21515... ทศนิยมเหล่านี้สามารถเขียนในรูปจำนวนตักยะได้

<u>ทฤษฎี 3.9.1</u> ถ้า $r \neq 1$, $a \in R$ และ $n \in N$ จะได้ว่า $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$ (เรียก $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n$ ว่าอนุกรมเรขาคณิต (geometric series))

พิสูจน์ ให้

$$x = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots + ar^n$$

$$xr = ar + ar^2 + \ldots + ar^n + ar^{n+1}$$

$$\therefore x - xr = a - ar^{n+1}$$

$$x(1-r) = a(1 - r^{n+1})$$

$$\therefore x = \frac{a(1 - 1^{n+1})}{1 - r}, \qquad 1 - r \neq 0$$

<u>ทฤษฎี 3.9.2</u> ถ้า $a > 0$ และ $0 < r < 1$

$$\frac{a}{1 - r} = \sup \{x/x = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1-r} \text{ เมื่อ } n \in N\}$$

พิสูจน์ ให้ $S = \{x/x = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$ เมื่อ $n \in N\}$

$$\therefore \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^{n+1}}{1 - r}$$

เนื่องจาก $\frac{ar^{n+1}}{1 - r} > 0$ ($\because 0 < r < 1$)

$\therefore \frac{a}{1 - r} \geq \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r}$ สำหรับ $n \in N$ ทุกตัว

$\therefore \frac{a}{1 - r}$ เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ S

ให้ $d \in R$ และ $d < \frac{a}{1-r}$ ดังนั้นจะได้ $a - d(1-r) > 0$

เนื่องจาก $\frac{1}{r} > 1$ $(\because 0 < r < 1)$

จะมี $n \in N$ ซึ่ง $(\frac{1}{r})^n > \frac{ar}{a - d(1-r)}$ แบบฝึกหัดชุด 3.7 ข้อ 4 และ

$$\frac{ar}{a - d(1-r)} \in R$$

$$r^{n+1} < \frac{a - d(1-r)}{a} = 1 - \frac{d(1-r)}{a}$$

$$1 - r^{n+1} < \frac{d(1-r)}{a}$$

$$d < \frac{d(1-r^{n+1})}{1-r} \qquad (r \neq 1)$$

$\therefore$ d ไม่เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ S

$\therefore$ $\sup S = \frac{a}{1-r}$

จากทฤษฎีข้างต้น เราอาจกล่าวได้ว่า ถ้า $a > 0$ และ $0 < r < 1$ จะได้ว่า

$$\frac{a}{1-r} = a + ar^2 + ar^3 + \ldots \qquad \ldots$$

<u>ตัวอย่าง 3.9.1</u> ทศนิยมไม่รู้จบ 3.333... สามารถเขียนรูป

$$3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \ldots$$

จาก 1) เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $a = 3$ และ $r = \frac{1}{10}$

$$\therefore \quad 3.333\ldots = \frac{3}{1 - 1/10} = \frac{30}{9}$$

สำหรับจำนวนจริงที่เขียนในรูปทศนิยม ซึ่งจำนวนหลังจุดทศนิยมเป็นศูนย์ เช่น $\frac{1}{8} = 0.12500\ldots$ ในการเขียนเป็นทศนิยมไม่รู้จบให้ลดจำนวนที่อยู่หลังจุดทศนิยมจำนวนสุดท้ายก่อนถึงศูนย์ ให้ลดลงหนึ่งแล้วต่อท้ายด้วยจำนวนเก้าเรื่อยๆไปไม่สิ้นสุด ซึ่งจะได้ว่า $\frac{1}{8} = 0.124999\ldots$ หรือ $\frac{1}{2} = .4999\ldots$ ซึ่งเราจะใช้การเขียนทศนิยมหลังนี้ตลอด

ดังนั้นจำนวนจริงทุกจำนวน สามารถเขียนแทนด้วยทศนิยมไม่รู้จบ ซึ่งแทนด้วยจำนวนเดียวเท่านั้น

<u>แบบฝึกหัด 3.7 3.8, 3.9</u>

1. จงเขียนทศนิยมข้างล่างนี้ในรูปจำนวนตักยะ

   1.1 .777...

   1.2 1.232323...

   1.3 2.3444...

   1.4 .23454545...

   1.5 2.999...

2. จงเขียนจำนวนตักยะข้างล่างนี้ในรูปทศนิยมไม่รู้จบ

   1.1 3/7

   1.2 16/3

   1.3 13/99

   1.4 7/2

   1.5 5/12