บทที่ 4

ฟังชั่น และความสัมพันธ์ (Functions and Relations)

สำหรับในบทนี้จะกล่าวถึงฟังชั่น (function)ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการศึกษาเรื่องอื่นๆ ในวิชานี้ เช่น ซีเควนซ์ (sequence) ลิมิต (limit)ความต่อเนื่อง (continuity) และอินทิกรัล (integral) เป็นต้น เนื้อหาในบทนี้ เราสามารถแบ่งเป็นสองส่วนใหญ่ๆ ส่วนแรกได้แก่ฟังชั่น ส่วนที่สองได้แก่อีควิวาเลนซ์ และคาร์ดินัลของเซ็ท

สำหรับส่วนแรก จะกล่าวถึงคู่ลำดับ (ordered pair)และความสัมพันธ์ (relation) ก่อนเพื่อนำไปสู่ฟังชั่น ให้รู้จักการเขียนแผนภาพ และกราฟ ซึ่งจะช่วยให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้น ต่อไปกล่าวถึง ไดเรคอิมเมจ (direct image) และอินเวอร์ส-อิมเมจ (inverse image) พร้อมทั้งคุณสมบัติ สำหรับอินเวอร์สอิมเมจนั้นอาจไม่เป็นฟังชั่น ถ้าจะเป็นฟังชั่นต้องมีคุณสมบัติอื่นเพิ่มเติมได้แก่ฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่ง (one - to - one function) และจะนำไปใช้ในส่วนที่สอง สำหรับแบบฝึกหัดในหัวข้อนี้ จะเป็นฟังชั่นที่ใช้ในส่วนที่สองทั้งสิ้น หัวข้อสุดท้ายของส่วนแรกได้แก่ คอมโพสิทฟังชั่น พร้อมทั้งคุณสมบัติ ส่วนที่สองได้แก่อีควิวาเลนซ์ และคาร์ดินัลของเซ็ท การศึกษาต้องอาศัยเรื่องฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ส่วนเรื่องที่ศึกษาได้แก่การเปรียบเทียบเซ็ท ว่าเท่ากันหรือเซ็ททั้งสองมีคาร์ดินัลเท่ากัน ในเซ็ทอนันต์พร้อมทั้งคุณสมบัติ ศึกษาถึงเซ็ทอนันต์ที่นับได้ และนับไม่ได้ พร้อมทั้งคุณสมบัติ และกล่าวถึงเซ็ทที่นับไม่ได้ แต่มีคาร์ดินัลเท่ากัน ส่วนสุดท้ายของบทกล่าวถึง โมโนโทนฟังชั่น (monotonic function) ซึ่งจะนำไปใช้ในเรื่องซีเควนซ์ และอินทิกรัล

4.1 คู่ลำดับ และความสัมพันธ์ (order pair and relation)

นิยาม 4.1.1 คู่ลำดับ (ordered pair) ของ x และ y เขียนแทนด้วย $< x,y >$ เรียก x ว่าพิกัดที่หนึ่ง และเรียก y ว่าพิกัดที่สอง ซึ่งมีความหมายดังนี้

$$< x,y > = \{\{x\} , \{x,y\}\}$$

และ $< x,y > = < c,d >$ ก็ต่อเมื่อ $x = c$ และ $y = d$

คู่ลำดับ $< x,y >$ นั้น เราเน้นลำดับของ x และ y เป็นสำคัญ คู่ลำดับ $< 1,2 >$ และ $< 2,1 >$ ไม่เท่ากัน สำหรับ $< 1,2 >$ มี 1 เป็นพิกัดที่หนึ่ง แต่ $< 2,1 >$ มี 1 เป็นพิกัดที่สอง

<u>นิยาม 4.1.2</u> ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product) ของเซ็ท A และ เซ็ท B เขียนแทนด้วย $A \times B$ ซึ่งมีความหมายดังนี้

$$A \times B = \{< x,y > / \ x \in A \text{ และ } y \in B\}$$

สำหรับผลคูณคาร์ทีเซียนของ $R \times R$ เป็นเซ็ทของคู่ลำดับของจำนวนจริง ซึ่งเรียกเซ็ทนี้ว่า ระนาบ (plane)

<u>ตัวอย่าง 4.1.1</u> ถ้า $A = \{a,b,c\}$ และ $B = \{1,2\}$ จะได้

$$A \times B = \{< a,1 >,< a,2 >,< b,1 >,< b,2 >,< c,1 >,< c,2 >\}$$

$$B \times A = \{< 1,a >,< 2,a >,< 1,b >,< 2,b >,< 1,c >,< 2,c >\}$$

เนื่องจาก $< a,1 > \in A \times B$ แต่ $< a,1 > \notin B \times A$

และ $< 1,a > \notin A \times B$ แต่ $< 1,a > \in B \times A$

$$\therefore \ A \times B \neq B \times A$$

<u>นิยาม 4.1.3</u> ถ้า S เป็นสับเซ็ทของ $A \times B$ และ $S \neq \emptyset$ เรียก S ว่า เป็นความสัมพันธ์ (relation) จาก A ไป B

<u>ตัวอย่าง 4.1.2</u> ให้ $A = \{a,b,c\}$ และ $B = \{1,2\}$

$$\therefore \ A \times B = \{<a,1>,<a,2>,<b,1>,<b,2>,<c,1>,<c,2>\}$$

ถ้า $S_1 = \{<a,1>,<c,1>\}$ จะได้ S_1 เป็นความสัมพันธ์ ซึ่ง $S_1 \subset A \times B$

$S_2 = \{<a,1>, 2\}$ ไม่เป็นความสัมพันธ์ เนื่องจาก 2 ไม่ใช่คู่ลำดับ

<u>ตัวอย่าง 4.1.3</u> ถ้า $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

และ $S = \{<x,y>/ \ x>y\}$ ความสัมพันธ์ของเซ็ทของคู่ลำดับได้แก่"มากกว่า" ซึ่ง $x > y$

$$\therefore \ S = \{<2,1>,<3,1>,<3,2>\} \quad \text{เป็นความสัมพันธ์}$$

บางครั้งเราเขียน aSb แทน $<a,b> \in S$ เมื่อ S เป็นความสัมพันธ์ และกล่าวได้ว่า ความสัมพันธ์ คือ เซ็ทของคู่ลำดับ

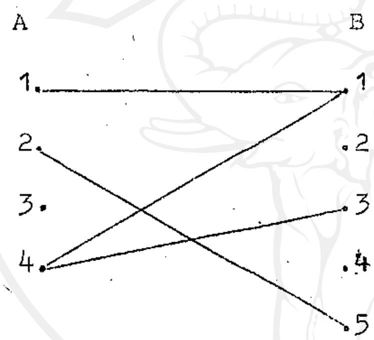
<u>ตัวอย่าง 4.1.4</u> ถ้า $A = \{1,2,3,4\}$ และ $B = \{1,2,3,4,5\}$

ให้ $S = \{<x,y> \in A \times B / \frac{(5x+1)}{(2y+1)}$ เป็นจำนวนเต็ม $\}$

$\therefore S = \{<1,1>, <2,5>, <4,1>, <4,3>\}$ เป็นความสัมพันธ์

สำหรับเซ็ทของความสัมพันธ์นั้นสามารถเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

วิธีที่ 1 ถ้าเซ็ท A และ เซ็ท B ประกอบด้วยสมาชิกไม่มาก เขียนสมาชิกของเซ็ท A และเซ็ท B ในแนวตั้ง ลากเส้นเชื่อมจุดซึ่งอยู่ในลำดับเดียวกัน จะได้ดังรูปที่ 4.1.1 ซึ่งเป็นรูปของตัวอย่าง 4.1.4



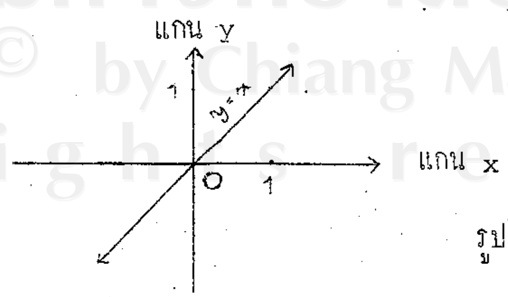
รูปที่ 4.1.1

วิธีที่ 2 ถ้าเซ็ท A และ B เป็นจำนวนจริงหรือเป็นสับเซ็ทของจำนวนจริง สามารถเขียนโดยใช้กราฟ (graph) ซึ่งมีความหมายดังนี้

<u>นิยาม 4.1.4</u> กราฟของความสัมพันธ์ คือเซ็ทของจุดในระนาบ แต่ละจุดแทนสมาชิกของความสัมพันธ์ ซึ่งเป็นสับเซ็ทของ $R \times R$

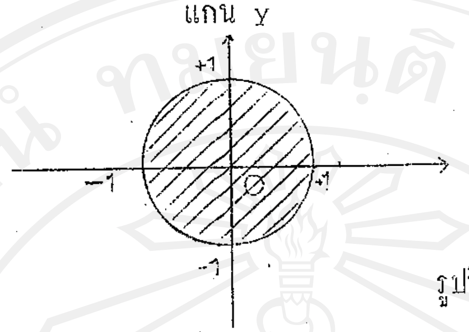
<u>ตัวอย่าง 4.1.5</u> ให้ $S = \{<x, y> \in R \times R / y = x\}$

กราฟของ S คือเส้นตรงที่ทำมุม 45 องศา กับแกน x ดังรูปที่ 4.1.2



รูปที่ 4.1.2

ตัวอย่าง 4.1.6 ให้ $S = \{<x,y> \in R \times R \;/\; x^2 + y^2 \leq 1\}$
กราฟของ S คือรูปวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด O รัศมีเป็น 1
พร้อมทั้งจุดข้างในรูปวงกลม และบนเส้นรอบวงด้วย ดังรูปที่ 4.1.3



รูปที่ 4.13

นิยาม 4.1.5 โดเมน (domain) ของความสัมพันธ์ S เขียนแทนด้วย D_S มีความหมายดังนี้

$$D_S = \{x \;/\; \text{จะมี } y \text{ ซึ่ง } <x, y> \in S\}$$

เรนจ์ (range) ของความสัมพันธ์ S เขียนแทนด้วย R_S มีความหมายดังนี้

$$R_S = \{y \;/\; \text{จะมี } x \text{ ซึ่ง } <x, y> \in S\}$$

ตัวอย่าง 4.1.7 จากตัวอย่าง 4.1.4

$D_S = \{1,2,4\}$

$R_S = \{1,3,5\}$

ตัวอย่าง 4.1.8 ให้ $f = \{<x, 2x> / x \in I^+\}$

$D_f = I^+$

$R_f =$ จำนวนเต็มคู่

<u>แบบฝึกหัดชุด 4.1</u>

1. ให้ A เป็นเซ็ทของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10 จงเขียนสัญลักษณ์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้ โดยวิธีใช้กฎ

   1.1 $\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,9\rangle\}$

   1.2 $\{\langle 9,1\rangle,\langle 8,2\rangle,\langle 7,3\rangle,\langle 6,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 4,6\rangle,\langle 3,7\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 1,9\rangle\}$

   1.3 $\{\langle 1,6\rangle,\langle 2,7\rangle,\langle 3,8\rangle,\langle 4,9\rangle\}$

   1.4 $\{\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 6,3\rangle,\langle 8,4\rangle\}$

2. จงเขียนกราฟของความสัมพันธ์ในเซ็ท R ดังต่อไปนี้

   2.1 $\{\langle x,x+2\rangle / x \in R\}$

   2.2 $\{\langle x,x^2\rangle / x \in R\}$

   2.3 $\{\langle x,y\rangle \in R \times R / \ y = |x+1|\}$

   2.4 $\{\langle x,y\rangle \in R \times R / \ x^2 = y^2 + 1\}$

4.2 <u>ฟังชั่น</u> (function)

<u>นิยาม 4.2.1</u> ถ้า A และ B เป็นเซ็ทใดๆ ความสัมพันธ์ f จาก A ไป B จะเรียกว่า ฟังชั่นจาก A ไปสู่ (into) B ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $D_f = A$
2. ถ้า $\langle x, y\rangle \in f$ และ $\langle x, z\rangle \in f$ จะได้ว่า

   $y = z$

จากนิยามจะเห็นว่า ความสัมพันธ์จะเป็นฟังชั่นต้องสอดคล้องเงื่อนไขทั้งสองข้อ เงื่อนไขข้อที่หนึ่ง หมายถึงสมาชิกของ A ทุกตัวต้องจับคู่กับสมาชิกของ B เงื่อนไขที่สอง หมายถึงสมาชิกของ A แต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกของ B ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น สำหรับโดเมน และเรนจ์ของฟังชั่น มีความหมายเหมือนกับโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

จากตัวอย่าง 4.1.8 $f = \{\langle x,2x\rangle / x \in I^+\}$ นั้น จะได้ว่า f เป็นความสัมพันธ์ที่เป็นฟังชั่น เนื่องจากสมาชิกของเซ็ทของพิกัดแรกแต่ละตัว จับคู่กับสมาชิก

ของเซ็ทของพิกัดที่สองได้ตัวเดียวเท่านั้น และฟังชั่นนี้สามารถเขียนในรูปกฎหรือสูตรการจับคู่ได้ว่า $f(x) = 2x$ เมื่อ $x \in I^+$ สำหรับฟังชั่นในบทต่อๆไปจะเขียนให้อยู่ในรูปกฎหรือสูตรการจับคู่

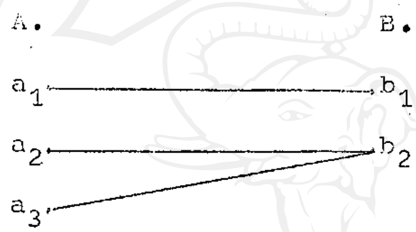
<u>ตัวอย่าง 4.2.1</u> ถ้า $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$

และ $f = \{<a_1, b_1>, <a_2, b_2>, <a_3, b_2>\}$

จะเห็นว่า 1. $D_f = A$

2. สมาชิกของ A แต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกของ B เพียงตัวเดียว

ดังนั้น f เป็นฟังชั่น เขียนดังรูปที่ 4.2.1



รูปที่ 4.2.1

จะเห็นว่า $D_f = A$ และ $R_f = B$

<u>ตัวอย่าง 4.2.2</u> ให้ $S = \{<x^2, x>/ \ x \in Q\}$

จะได้ว่า $<9, 3> \in S$ และ $<9, -3> \in S$ ซึ่งขัดกับคุณสมบัติข้อ 2 ของนิยาม 4.2.1

ดังนั้น S เป็นความสัมพันธ์ ที่ไม่เป็นฟังชั่น

ความสัมพันธ์ที่เป็นฟังชั่น เรานิยมเขียนแทนด้วย f, g, h, F, G และ H สัญลักษณ์ที่จะบอกว่า f เป็นฟังชั่นจาก A ไปสู่ B คือ $f : A \longrightarrow B$ หรือ $A \xrightarrow{f} B$ บางครั้งเขียน $y = f(x)$ แทน $<x, y> \in f$ สำหรับ $f(x)$ หมายถึงสมาชิกของเซ็ท B ซึ่งเป็นค่าของ f ที่ x หรือกล่าวว่า y เป็น อิมเมจ (image) ของ x ภายใต้ f

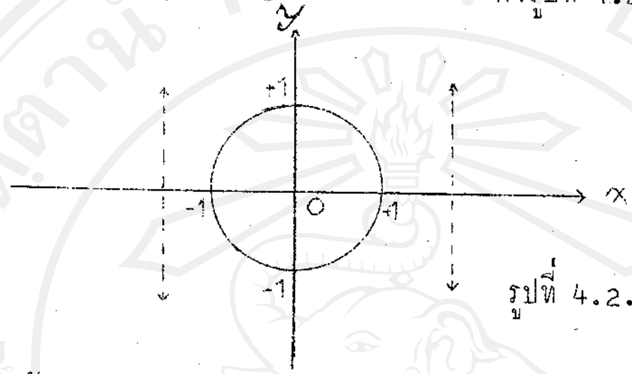
ศัพท์ภาษาอังกฤษซึ่งใช้แทนคำว่า ฟังชั่น มีหลายคำ เช่น map, mapping transformation, correspondence และ operator.

สำหรับฟังชั่นซึ่งมีโดเมน และเรนจ์เป็นจำนวนจริง ฟังชั่นนี้เรียกว่าฟังชั่นจำนวนจริง (real valued function)

<u>ตัวอย่าง 4.2.3</u> ให้ $f = \{<x, y> \in R \times R \;/\; x^2 + y^2 = 1\}$

จะเห็นว่า $D_f = [-1, 1] \neq R$

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังชั่น ดังรูปที่ 4.2.2



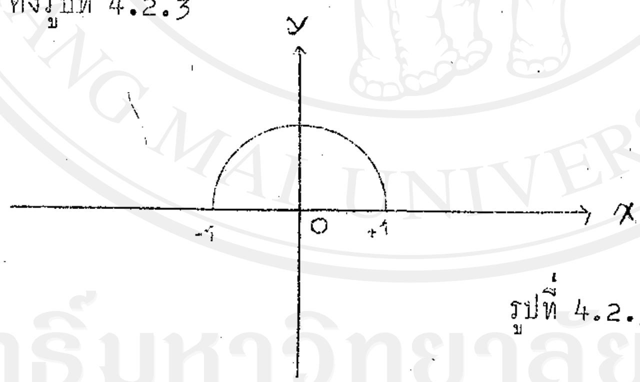
รูปที่ 4.2.2

<u>ตัวอย่าง 4.2.4</u> ให้ $A = \{x \;/\; x \in R$ และ $-1 \leq x \leq 1\}$

และ $f = \{<x, f(x)> \in A \times R \;/\; f(x) = \sqrt{1 - x^2}\}$

เป็นฟังชั่นจาก A ไป R

ดังรูปที่ 4.2.3



รูปที่ 4.2.3

4.3 <u>ไดเรคอิมเมจ และอินเวอร์สอิมเมจ</u> (Direct and Inverse Images)

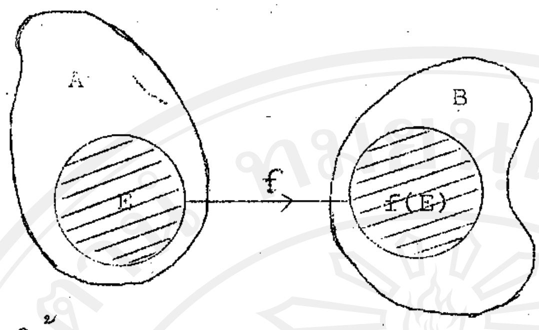
<u>นิยาม 4.3.1</u> ถ้า f เป็นฟังชั่นจาก A ไปสู่ B และ $E \subseteq A$ ให้ความหมาย f(E) ดังนี้

$f(E) = \{f(x) \;/$ จะมี $x \in E$ ซึ่ง $<x, f(x)> \in f\}$

เรียก f(E) ว่าไดเรคอิมเมจ (direct image) ของ E ภายใต้ f และ $f(E) \subseteq R_f$ ดังรูปที่ 4.3.1

จากนิยาม 4.3.1 นั้น เราสามารถให้ความหมาย $f(E)$ อีกกรณีหนึ่งดังนี้

$$f(E) = \{f(x) \ / \text{ จะมี } x \in E \text{ ซึ่ง } y = f(x)\}$$



รูปที่ 4.3.1

<u>ตัวอย่าง 4.3.1</u> ให้ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ และ $B = \{b_1, b_2, b_3\}$
ให้ $f : A \dashrightarrow B$ โดยที่ $f = \{<a_1,b_1>, <a_2,b_1>, <a_3,b_1>, <a_4,b_3>\}$ แล้วจะได้ว่า

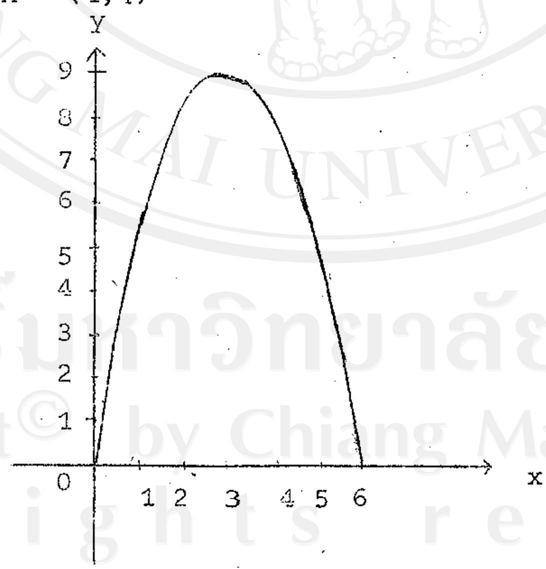
ถ้า $E = \{a_1, a_2\}$ จะได้ $f(E) = \{b_1\}$

$E = \{a_3, a_4\}$ จะได้ $f(E) = \{b_1, b_3\}$

<u>ตัวอย่าง 4.3.2</u> ให้ $f = \{<x,f(x)> \in R \times R \ / \ f(x) = 6x - x^2\}$

ถ้า $A = [0,1]$ จะได้ $f(A) = [0,5]$

$A = (1,4)$ จะได้ $f(A) = (5,9]$ ดูรูปที่ 4.3.2



รูปที่ 4.3.2

<u>ทฤษฎี 4.3.2</u> ถ้า $f : A \longrightarrow B$ ให้ $E \subseteq A$ และ $F \subseteq A$

ก) ถ้า $E \subseteq F$ จะได้ว่า $f(E) \subseteq f(F)$

ข) $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$

ค) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$

ง) $f(E - F) \subseteq f(E)$

พิสูจน์ ก) ถ้า $E \subseteq F$ จะได้ว่า $f(E) \subseteq f(F)$

1) ถ้า $x \in E$ จะได้ว่า $x \in F$ ($\because E \subseteq F$)

2) จาก $x \in E$ จะได้ว่า $f(x) \in f(E)$ (นิยาม 4.3.1)

3) $x \in F$ จะได้ว่า $f(x) \in f(F)$ สำหรับ $x \in E$ ทุกตัว นิยาม 4.3.1

$\therefore f(E) \subseteq f(F)$

ข) $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$

1) $\because E \cap F \subseteq E$ แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ข้อ 5.2)

2) $\therefore f(E \cap F) \subseteq f(E)$ ทฤษฎี 4.3.2 ข้อ ก

3) $\because E \cap F \subseteq F$ ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1)

4) $\therefore f(E \cap F) \subseteq f(F)$ ทฤษฎี 4.3.2 ข้อ ก)

5) $\therefore f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$ ข้อ 2) $\cap$ ข้อ 3)

ค) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$

กรณีที่ 1 ต้องพิสูจน์ว่า $f(E \cup F) \supseteq f(E) \cup f(F)$

1) $\because E \subseteq E \cup F$ แบบฝึกหัดชุดที่ 2 ข้อ 5.1

2) $\therefore f(E) \subseteq f(E \cup F)$ ทฤษฎี 4.3.2 ข้อ ก)

3) ในทำนองเดียวกัน $\because F \subseteq E \cup F$ จะได้ว่า $f(F) \subseteq f(E \cup F)$

$\therefore f(E) \cup f(F) \subseteq f(E \cup F)$ ข้อ 2) $\cup$ ข้อ 3)

กรณีที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า $f(E \cup F) \subset f(E) \cup f(F)$

1) ให้ $y \in f(E \cup F)$

2) $\therefore$ จะมี $x \in E \cup F$ ซึ่ง $y = f(x)$ นิยาม 4.3.1

3) จาก $x \in E \cup F$ จะได้ว่า $x \in E$ หรือ $x \in F$ นิยาม 2.2.1

4) $\therefore y = f(x) \in f(E)$ หรือ $y \in f(F)$ กรณีใดกรณีหนึ่ง นิยาม 4.3.1

5) $\therefore y \in f(E) \cup f(F)$ ข้อ 4) และนิยาม 2.2.1

$\therefore f(E \cup F) \subset f(E) \cup f(F)$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่า $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$

ง) ให้เป็นแบบฝึกหัด (ทำแบบข้อ ก)

ตัวอย่าง 4.3.3 ถ้า $f : A \dashrightarrow B$ ให้ $E \subset A$ และ $F \subset A$ จะได้ว่า

$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์

ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างตรงกันข้าม

ไม่จริงต่อไปเป็นตัวอย่างตรงกันข้าม ถ้า $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ และ $B = \{b_1, b_2\}$ ให้

$E = \{a_1, a_2\}$, $F = \{a_2, a_3\}$ และ $f = \{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \langle a_3, b_2\rangle\}$

ดังนั้น $E \cap F = \{a_2\}$

$\therefore f(E \cap F) = \{b_2\}$

$f(E) \cap f(F) = \{b_1, b_2\}$

ดังนั้น $f(E \cap F) \neq f(E) \cap f(F)$

<u>นิยาม 4.3.3</u> ให้ S เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B ให้ความหมาย S^{-1} ดังนี้

$$S^{-1} = \{\langle y, x\rangle / \langle x, y\rangle \in S\}$$

เรียกความสัมพันธ์ S^{-1} จาก B ไป A ว่าอินเวอร์สของ S

จากนิยาม 4.3.3 จะได้ว่า $[S^{-1}]^{-1} = S$

<u>ตัวอย่าง 4.3.4</u> ถ้า $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{4,5\}$

ให้ $S = \{\langle 1,4\rangle, \langle 2,4\rangle, \langle 3,5\rangle\}$

จะได้ว่า $S^{-1} = \{\langle 4,1\rangle, \langle 4,2\rangle, \langle 5,3\rangle\}$

<u>ตัวอย่าง 4.3.5</u> ให้ $S = \{\langle x,y\rangle \in R \times R \,/\, y = 2x - 1\}$

จะได้ว่า $S^{-1} = \{\langle y,x\rangle \,/\, y = 2x - 1\}$

สำหรับคู่ลำดับเรานิยมเขียน $\langle x, y \rangle$

เนื่องจาก $\langle y,x\rangle \in S^{-1}$ ก็ต่อเมื่อ $\langle x,y\rangle \in S$ ดังนั้น สมาชิกของ S^{-1}

ให้ x แทนที่ y และ y แทนที่ x

$$\therefore\ S^{-1} = \{\langle x,y\rangle \,/\, y = \frac{x+1}{2}\}$$

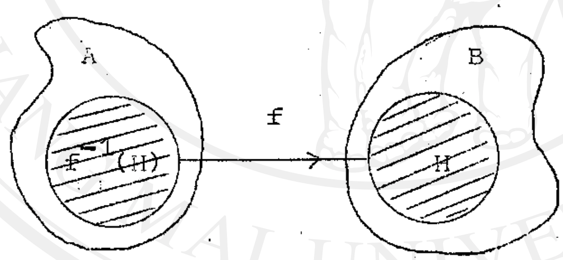
<u>นิยาม 4.3.4</u> ถ้า f เป็นฟังชั่นจาก A ไปสู่ B และ $H \subseteq B$ ให้ความหมาย $f^{-1}(H)$ ดังนี้

$$f^{-1}(H) = \{x / \text{จะมี } f(x) \in H \text{ ซึ่ง } \langle x,f(x)\rangle \in f\}$$

เรียก $f^{-1}(H)$ ว่า อินเวอร์สอิมเมจ (inverse image) ของ H ภายใต้ f และ $f^{-1}(H) \subseteq D_f$ ดังรูปที่ 4.3.3

จากนิยาม 4.3.4 นี้ เราสามารถให้ความหมาย $f^{-1}(H)$ อีกกรณีหนึ่ง ดังนี้

$$f^{-1}(H) = \{x / \text{จะมี } f(x) \in H \text{ ซึ่ง } f(x) = y\}$$



รูปที่ 4.3.3

สำหรับ f^{-1} นี้อาจจะไม่เป็นฟังชั่นก็ได้ f^{-1}จะเป็นฟังชั่นต้องมีคุณสมบัติอื่นเพิ่มเติม ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

<u>ทฤษฎี 4.3.5</u> ถ้า $f : A \longrightarrow B$ ให้ $G \subseteq B$ และ $H \subseteq B$

ก) ถ้า $G \subseteq H$ จะได้ว่า $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$

ข) $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$

ค) $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$

ง) $f^{-1}(G - H) = f^{-1}(G) - f^{-1}(H)$

พิสูจน์ ก) ถ้า $G \subseteq H$ จะได้ว่า $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$

1) ให้ $x \in f^{-1}(G)$

2) $\therefore$ จะมี $f(x) \in G \subseteq H$ นิยาม 4.3.4

3) ดังนั้น $x \in f^{-1}(H)$ นิยาม 4.3.4

$\therefore$ $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$ ข้อ 1)และ 3)

ข) $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$

กรณีที่ 1 ต้องพิสูจน์ว่า $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$

1) $\because$ $G \cap H \subseteq G$ จะได้ว่า $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G)$ ข้อ ก)

2) $\because$ $G \cap H \subseteq H$ จะได้ว่า $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(H)$ ข้อ ก)

$\therefore$ $f^{-1}(G \cap H) \subseteq f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$ ข้อ 1)ก ข้อ 2)

กรณีที่ 2 ต้องพิสูจน์ว่า $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \cap H)$

1) ให้ $x \in f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$

2) จะได้ว่า $x \in f^{-1}(G)$ และ $x \in f^{-1}(H)$ นิยาม 2.2.2

3) ดังนั้น $f(x) \in G$ และ $f(x) \in H$ นิยาม 4.3.4

4) และ $f(x) \in G \cap H$ นิยาม 2.2.2

5) จะได้ว่า $x \in f^{-1}(G \cap H)$ นิยาม 4.3.4

$\therefore$ $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) \subseteq f^{-1}(G \cap H)$

ดังนั้นจากการณี 1) และ กรณี 2) จะได้ว่า $f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H) = f^{-1}(G \cap H)$

ข้อ ค) และ ง) ให้เป็นแบบฝึกหัด

<u>ทฤษฎี 4.3.6</u> ถ้า $f : A \dashrightarrow B$ และ $E \subseteq A$ จะได้ว่า $E \subseteq f^{-1}[f(E)]$

พิสูจน์ 1) ให้ $x \in E$

2) จะมี $y \in B$ ซึ่ง $\langle x, y \rangle \in f$ นิยาม 4.2.1, $D_f = A$

3) จาก $x \in E$ และ $\langle x, y \rangle \in f$ จะได้ว่า $y \in f(E)$ นิยาม 4.3.1

4) จาก $y \in f(E)$ และ $\langle x, y \rangle \in f$ จะได้ว่า $x \in f^{-1}[f(E)]$ นิยาม 4.3.4

$\therefore$ $E \subseteq f^{-1}[f(E)]$

<u>ตัวอย่าง 4.3.6</u> ให้ f เป็นฟังชั่นซึ่งมีความหมายดังตัวอย่าง 4.3.1 จะได้ว่า

ถ้า $H = \{b_1, b_2\}$ จะได้ว่า $f^{-1}(H) = \{a_1, a_2, a_3\}$

ถ้า $H = \{b_2\}$ จะได้ว่า $f^{-1}(H) = \emptyset$

ถ้า $H = B$ จะได้ว่า $f^{-1}(H) = A$

<u>ตัวอย่าง 4.3.7</u> ให้ f เป็นฟังชั่นซึ่งมีความหมายดังตัวอย่าง 4.3.2 จะได้ว่า

ถ้า $E = [0,5]$ จาก $f(x) = 6x - x^2$

ถ้า $f(x) = 0$ จะได้ $0 = 6x - x^2$

$\therefore \; x = 0, 6$

ถ้า $f(x) = 5$ จะได้ $5 = 6x - x^2$

$\therefore \; x = 1, 5$

$\therefore \; f^{-1}(E) = [6,1] \cup [5,6]$

ถ้า $E = (5,9]$

สำหรับ $f(x) = 5$ จะได้ $5 = 6x - x^2$

$\therefore \; x = 1, 5$

สำหรับ $f(x) = 9$ จะได้ $9 = 6x - x^2$

$\therefore \; x = 3$

$\therefore \; f(E^{-1}) = (1, 5)$

แบบฝึกหัดชุด 4.2 และ 4.3

1. จงตรวจดูว่า ความสัมพันธ์ ในข้อ 1) และ 2) ของแบบฝึกหัดชุด 4.1 ว่าเป็นฟังชั่นหรือไม่ จงอธิบาย
2. ให้ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ และ $B = \{b_1, b_2, b_3\}$

   ให้ $f : A \longrightarrow B$ ซึ่ง $f = \{\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_3\rangle, \langle a_3, b_2\rangle, \langle a_4, b_1\rangle\}$

   จงหาไดเรคอิมเมจของ $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3, a_4\}$, A

   จงหาอินเวอร์สอิมเมจของ $\{b_2, b_3\}$, $\{b_1\}$, B

3. ถ้า $f(x) = x^2 - 4x + 4$ จงเขียนกราฟ และ
   จงหาไดเรคอิมเมจ ของ $[0,1]$, $(0,3)$, $[3,4)$
   จงหาอินเวอร์สอิมเมจ ของ $[0,1]$, $(1,2)$, $[-1,0)$
4. จงพิสูจน์ ทฤษฎี 4.3.2 ข้อ ง
   จงพิสูจน์ ทฤษฎี 4.3.5 ข้อ ค และ ง
   ถ้า $f : A \longrightarrow B$ ซึ่ง $E \subseteq A, F \subseteq A$ และ $H \subseteq B$, $G \subseteq B$ ซึ่งจะใช้กับแต่ละข้อต่อไปนี้
5. $f(E - F) = f(E)$ จริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่าง
6. จงพิสูจน์ว่า $f(f^{-1}(H)) \subseteq H$

<u>นิยาม 4.3.7</u> f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน (onto) B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปสู่ B และ $f(A) = B$

สำหรับ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B นั้น อาจกล่าวอย่างง่ายๆก็คือสมาชิกใน A จับคู่กับสมาชิกของเซ็ท B ทุกตัว ตัวอย่าง 4.2.1 f เป็นความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B ตัวอย่าง 4.3.1 f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปสู่ B เนื่องจาก $b \in B$ ไม่ได้จับคู่กับสมาชิกของ A สำหรับการพิสูจน์นั้น f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $b \in B$ ทุกตัว จะมี $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = b$

<u>นิยาม 4.3.8</u> f จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (1—1) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปสู่ B และสำหรับสมาชิก a_1, a_2 ทุกตัวของ A ถ้า $f(a_1) = f(a_2)$ จะได้ $a_1 = a_2$

จากนิยาม f จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หมายถึงสมาชิกของ A แต่ละตัวที่ไม่เท่ากันจับคู่กับสมาชิกของ B ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่งอาจพิสูจน์อีกวิธีหนึ่งโดย สมมติว่า $a_1 \neq a_2$ แล้วพิสูจน์ว่า $f(a_1) \neq f(a_2)$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปบน B เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (one – to – one correspondence)

ตัวอย่าง 4.3.8 ให้ $f = \{<x,f(x)>/f(x) = 2x+1, x \in R\}$ จะเป็นฟังชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก R ไปบน R

พิสูจน์ 1. ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ ซึ่ง $x_1, x_2 \in R$

2. $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

3. $\therefore x_1 = x_2$

$\therefore$ f เป็นฟังชันหนึ่งต่อหนึ่ง

1. ให้ $b \in R$

2. $\therefore$ จะมี $\frac{b-1}{2} \in R$

3. ดังนั้น $f(\frac{b-1}{2}) = b$

$\therefore$ f เป็นฟังชันจาก R ไปบน R

/ตัวอย่าง 4.3.9. ให้ $f = \{<x,x^2>/f(x) = x^2, x \in R\}$ จะได้ว่า

1. $R_f = R^+ \cup \{0\}$, R^+ แทนเซ็ทจำนวนจริงบวก

2. เนื่องจาก $<1,1> \in f$ และ $<-1,1> \in f$ ซึ่ง $f(1) = f(-1)$ แต่ $1 \neq -1$

$\therefore$ f เป็นฟังชันที่ไม่ใช่ หนึ่งต่อหนึ่งจาก R ไปบน R

ตัวอย่าง 4.3.10 ให้ $f = \{<x,f(x)> \in R \times R^+/f(x) = e^x\}$

พิสูจน์ 1. ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ เมื่อ $x_1, x_2 \in R$

2. $\therefore e^{x_1} = e^{x_2}$

3. ดังนั้น $e^{x_1 - x_2} = 1$

4. และ $x_1 - x_2 = 0$

$\therefore x_1 = x_2$

f เป็นฟังชันหนึ่งต่อหนึ่ง

1. ถ้า $b \in R^+$

2. $\therefore$ จะมี $\ln b \in R$

3. ซึ่ง $f(\ln b) = b$

f เป็นฟังชันจาก R ไปบน R^+

$\therefore$ f เป็นฟังชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก R ไปบน R^+

<u>ทฤษฎี 4.3.9</u> ถ้า f เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ f^{-1} เป็นฟังชั่นจากเรจน์ของ f ไปบนโดเมนของ f

พิสูจน์ 1) ถ้า $\langle m, p\rangle \in f^{-1}$ และ $\langle m, g\rangle \in f^{-1}$

จะได้ $\langle p, m\rangle \in f$ และ $\langle g, m\rangle \in f$ นิยาม 4.3.3

ดังนั้น $p = g$ $\because$ f เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่ง

$\therefore$ f^{-1} เป็นฟังชั่นจากเรนจ์ของ f ไปสู่โดเมนของ f

2) ถ้า $n \in D_f$

$\therefore$ จะมี y ซึ่ง $y \in R_f$ และ $\langle n, y\rangle \in f$

ดังนั้น $\langle y, n\rangle \in f^{-1}$

$\therefore$ f^{-1} เป็นฟังชั่นจากเรจน์ของ f ไปบนโดเมนของ f

<u>แบบฝึกหัด ชุด 4.3</u>

จงตรวจดูว่าฟังชั่นจำนวนจริงข้างล่างนี้ เป็นฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

1. $f(x) = x$
2. $h(x) = x - 1$
3. $F(x) = 2x$
4. $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$ เมื่อ $x = 1, 3, 5 \ldots \ldots$
5. $g(0) = -\dfrac{x}{2}$ เมื่อ $x = 2, 4, 6, \ldots$
6. $G(\frac{1}{x}) = \dfrac{1}{x-1}$; $x \in I$ และ $x > 1$
7. $H(x) = x + 1$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มคี่
8. $f(x) = (x - \frac{1}{2})/(x - x^2)$, $x \in (0,1)$
9. ถ้า f เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปบน B จงพิสูจน์ว่า f^{-1} เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปบน A

4.4 <u>คอมโพสิทฟังชั่น (Composite function)</u>

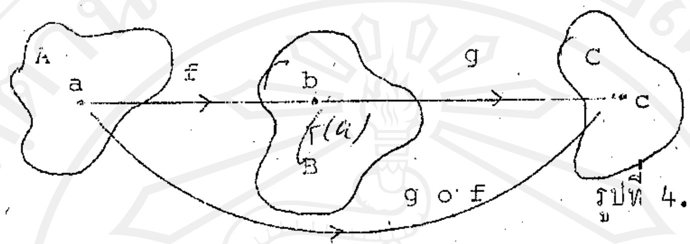
<u>นิยาม 4.4.1</u> คอมโพสิท ของฟังชั่น f และ g เขียน $g \circ f$ จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อเรนจ์ของฟังชั่น f เป็นสับเซ็ทของโดเมนของฟังชั่น g ซึ่งมีความหมายว่า

$$\langle a, c\rangle \in g \circ f \text{ ก็ต่อเมื่อ } \langle a, b\rangle \in f \text{ และ } \langle b, c\rangle \in g$$

จากนิยามเราใช้ $g \circ f = \{<a,c> / a \in A,\ c \in C$ และจะมี $b \in B$ ซึ่ง $<a,b> \in f$ และ $<b,c> \in g\}$

จาก $<a,c> \in g \circ f$ เขียนแทนด้วย $g \circ f(a) = c$ ซึ่งมีความหมายว่า $f(a) = b$ และ $g(b) = c$ ดังนั้น

$$g \circ f(a) = g[f(a)] = g(b) = c$$ ดูจากรูปที่ 4.4.1



รูปที่ 4.4.1

จะเห็นว่า $g \circ f$ เป็นฟังชั่นจากโดเมนของ f ไปสู่เรจน์ของ g

<u>ตัวอย่าง 4.4.1</u> ให้ $f : A \longrightarrow B$ และ $g : C \longrightarrow D$ ซึ่ง

$$A = \{a,b\},\ B = \{1,2,3\},\ C = \{1,2,3,4\},\ D = \{c,d\}$$

และ $f = \{<a,1>,<b,2>\}$; $g = \{<1,c>,<2,c>,<3,d>,<4,d>\}$

เนื่องจาก $R_f \subset D_g$ แต่ $R_g \not\subset D_f$ ดังนั้นจะมี $g \circ f$ แต่ไม่มี $f \circ g$

$$g \circ f(a) = g[f(a)] = g(1) = c$$

$$g \circ f(b) = g[f(b)] = g(2) = c$$

$$\therefore\ g \circ f = \{<a,c>, <b,c>\}$$

<u>ตัวอย่าง 4.4.2</u> ให้ A,B,C เป็นเซ็ทของจำนวนจริง ซึ่ง $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$

โดยที่ $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = x^{10}$

$$\therefore\ g \circ f(x) = g[f(x)] = g[x^2 + 1] = (x^2 + 1)^{10}$$

$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f[x^{10}] = x^{20} + 1$$

$$\therefore\ f \circ g \neq g \circ f$$

<u>ทฤษฎี 4.4.2</u> ถ้า $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ จะได้ว่า $g \circ f : A \longrightarrow C$ เป็นฟังชั่นจากโดเมนของ f ไปสู่เรจน์ของ g

พิสูจน์ กรณี 1 ต้องพิสูจน์ว่า $D_{g \circ f} = A$

1) ให้ a เป็นสมาชิกใดๆ ของ A

2) $\therefore$ จะมี $b \in B$ ซึ่ง $\langle a,b \rangle \in f$ $\qquad \because D_f = A$

3) $\therefore$ จะมี $c \in C$ ซึ่ง $\langle b,c \rangle \in g$ $\qquad D_g = B$

4) $\therefore$ $\langle a,c \rangle \in g \circ f$ สำหรับ $a \in A$ ทุกตัว นิยาม 4.4.1

$\therefore$ $D_{g \circ f} = A$

กรณี 2 ต้องพิสูจน์ว่า ถ้า $\langle a,c_1 \rangle \in g \circ f$ และ $\langle a,c_2 \rangle \in g \circ f$ จะได้ $c_1 = c_2$

1) ให้ $\langle a,c_1 \rangle \in g \circ f$ และ $\langle a,c_2 \rangle \in g \circ f$

2) $\therefore$ จะมี $b_1, b_2 \in B$ ซึ่ง $\langle a,b_1 \rangle \in f$ และ $\langle b_1,c_1 \rangle \in g$
และ $\langle a,b_2 \rangle \in f$ และ $\langle b_2,c_2 \rangle \in g$

3) $\therefore$ $\langle a,b_1 \rangle \in f$ และ $\langle a,b_2 \rangle \in f$
และ $\langle b_1,c_1 \rangle \in g$ และ $\langle b_2,c_2 \rangle \in g$

4) f เป็นฟังชั่น $\therefore$ $b_1 = b_2$ และ $\langle b_1,c_1 \rangle \in g$
และ $\langle b_2,c_2 \rangle \in g$

5) $b_1 = b_2$ และ $c_1 = c_2$ $\because$ g เป็นฟังชั่น

$\therefore$ $g \circ f$ เป็นฟังชั่นจากโดเมนของ f ไปสู่เรนจ์ของ g

<u>ทฤษฎี 4.4.3</u> ให้ $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง และ $g : B \longrightarrow C$ เป็นฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง จงพิสูจน์ว่า $g \circ f : A \longrightarrow C$ เป็นฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

พิสูจน์ จาก ทฤษฎี 4.4.2 $g \circ f$ เป็นฟังชั่น

1) ให้ $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$ $\qquad a_1, a_2 \in A$

$\therefore$ $f(a_1) = f(a_2)$ $\qquad \because$ g เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่ง

$a_1 = a_2$ $\quad$ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$\therefore$ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2) ถ้า $c \in C$

$\therefore$ จะมี $b \in B$ ซึ่ง $c = g(b)$ $\quad \because$ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไปบน C

และ จะมี $a \in A$ ซึ่ง $b = f(a)$ และ $c = g(b)$

$\because$ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน C

จะได้ว่า $g \circ f(a) = g[f(a)] = c$

$\therefore$ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน C

$\therefore$ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง

<u>แบบฝึกหัดชุด 4.4</u>

1). ให้ $f : R \longrightarrow R^+$ ซึ่ง $f(x) = x^2 + 1$

และ $g : R \longrightarrow R$ ซึ่ง $g(x) = 3x + 2$

จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$

2). ให้ $f : A \longrightarrow B$ และ $g : B \longrightarrow C$ และ D เป็นสับเซ็ทของ C

จงพิสูจน์ว่า $[g\ f]^{-1}(D) = f^{-1}[g^{-1}(D)]$

3). ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปบน B แล้ว จะเกิด $f \circ f^{-1}$ และ $f^{-1} \circ f$ หรือไม่ ถ้าเกิดจะได้ว่า $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ หรือไม่

4.5 <u>อีควิวาเลนซ์ และคาร์ดินัลของเซ็ท</u> (Equivalence and Cardinal of sets)

การเปรียบเทียบจำนวนสมาชิกของเซ็ทต่างๆนั้น ถ้าเป็นการเปรียบเทียบระหว่างเซ็ทจำกัด เช่น $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ เราทราบว่าจำนวนสมาชิกของเซ็ททั้งสองเท่ากัน คือ 4 หรือจะใช้วิธีจับคู่ ซึ่งสมาชิกของ A แต่ละตัวจับคู่กับสมาชิกของ B ได้เพียงตัวเดียว และต่างกันด้วย ถ้าสมาชิกทั้งสองเซ็ทจับคู่กันได้โดย

ไม่มีสมาชิกในเซ็ทใดเหลือ เรากล่าวว่าทั้งสองเซ็ทมีสมาชิกเท่ากัน การจับคู่นี้มีลักษณะเป็นการจับคู่แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง ถ้าเป็นเซ็ทอนันต์เราไม่สามารถทราบจำนวนสมาชิกได้ ทำให้เปรียบเทียบไม่ได้ แต่เราอาจใช้วิธีจับคู่ ถ้าเป็นการจับคู่แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งเราอาจกล่าวว่าทั้งสองเซ็ทมีสมาชิกเท่ากัน คำว่า "เท่ากัน"นี้ อาจจะทำให้คิดว่าเราทราบจำนวนสมาชิกที่แน่นอน ดังนั้นเราจะใช้คำว่า อีควิวาเลนซ์ (equivalent) เป็นการเปรียบเทียบจำนวนสมาชิกของเซ็ทสองเซ็ทใดๆ

<u>นิยาม 4.5.1</u> ถ้า f เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปบน B (หรือ f เป็นฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง) เรากล่าวว่า A อีควิวาเลนซ์ B เขียนแทนด้วย

$A \approx B$

$A \approx B$ นั้น อาจกล่าวแทนคำอื่นๆ เช่น " A และ B มีคาร์ดินัล (cardinality) เท่ากัน" หรือ A และ B มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

<u>ทฤษฎี 4.5.2</u> ถ้า A,B และ C เป็นเซ็ทใดๆ จะได้ว่า

ก) $A \approx A$

ข) ถ้า $A \approx B$ จะได้ว่า $B \approx A$

ค) ถ้า $A \approx B$ และ $B \approx C$ จะได้ว่า $A \approx C$

พิสูจน์ ก) $A \approx A$

1) ให้ $f : A \longrightarrow A$ โดยที่ $f(x) = x$ เมื่อ $x \in A$

2) $\therefore$ f เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปบน A แบบฝึกหัดชุด 4.3 ข้อ 1

$\therefore A \approx A$ นิยาม 4.5.1

ข) ถ้า $A \approx B$ จะได้ $B \approx A$

1) ให้ $A \approx B$

2) ดังนั้น $f : A \longrightarrow B$ เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปบน B

นิยาม 4.5.1

3) $\therefore$ มี $f^{-1} : B \longrightarrow A$ ซึ่ง f^{-1} เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปบน A — แบบฝึกหัดชุด 4.3 ข้อ 9

$\therefore$ $B \approx A$ — นิยาม 4.5.1

ค) ถ้า $A \approx B$ และ $B \approx C$ จะได้ว่า $A \approx C$

1) ให้ $A \approx B$ และ $B \approx C$

2) $\therefore$ มี f เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปบน B และมี g เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปบน C

3) ดังนั้น $g \circ f$ เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปบน C — ทฤษฎี 4.4.3

$\therefore$ $A \approx C$

ในบทที่ 2 ได้เคยกล่าวถึงเซ็ทจำกัด (finite set) และเซ็ทอนันต์แล้ว ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงนิยามของเซ็ทจำกัดโดยใช้คาร์ดินั

<u>นิยาม 4.5.3</u> ถ้า $A \neq \emptyset$, A จะเป็นเซ็ทจำกัดก็ต่อเมื่อ เซ็ท A มีคาร์ดินัลเท่ากับเซ็ทจำ นวนเต็มบวก $\{1,2,3, \ldots n\}$ ที่บาวด์

เรียกเซ็ทซึ่งไม่ใช่เซ็ทจำกัดว่า เซ็ทอนันต์ เช่น

จำนวนเต็มบวก $I = \{1,2,3,\ldots\}$

จำนวนคี่ $P = \{3,5,7,9,\ldots\}$

จำนวนคู่ $E = \{2,4,6,8,\ldots\}$

แต่เซ็ทวางเป็นเซ็ทจำกัด

<u>ทฤษฎี 4.5.4</u> จำนวนเฉพาะที่เป็นบวก มีจำนวนไม่จำกัด (infinite)

พิสูจน์ 1) สมมติให้จำนวนเฉพาะบวกมีจำนวนจำกัด

2) ดังนั้นให้จำนวนเฉพาะมี n ตัว ได้แก่ $P_1, P_2, \ldots, P_n$

3) ให้ $P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_n$

4) $P + 1 = (P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdots P_n) + 1$

5) ให้ $r \in \{P_1, P_2, \ldots P_n\}$ ซึ่ง r เป็นจำนวนเฉพาะ และ r ต้องหาร $P_1, P_2, \ldots, P_n$ บางตัวลงตัว

6) r หาร $P + 1$ ไม่ลงตัว ถ้า r หาร $P + 1$ ลงตัว r ต้องหาร 1 ลงตัวด้วย ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $P + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งมากกว่าจำนวนเฉพาะ $P_1, P_2, \ldots$ $\ldots, P_n$ ทุกตัว ขัดกับที่สมมติ

$\therefore$ จำนวนเฉพาะบวก มีจำนวนไม่จำกัด

จำนวนเฉพาะสองจำนวนใดๆ จะเรียกว่าจำนวนเฉพาะทวิน (twin prime) ถ้า $|p - g| = 2$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่งได้แก่ 3 และ 5, 5 และ 7, 11 และ 13 เป็นต้น ซึ่งนักคณิตศาสตร์ยังไม่สามารถพิสูจน์ว่าจริง ว่าจำนวนเฉพาะทวินนี้มีจำนวนอนันต์ และไม่สามารถพิสูจน์ว่าไม่จริงเช่นกัน สิ่งซึ่งนักคณิตศาสตร์ไม่สามารถพิสูจน์ว่าจริง และไม่จริงนี้ สามารถ นำมาใช้อ้างอิงได้ เรียกว่า คอนเจคเตอร์ (conjecture)

<u>ตัวอย่าง 4.5.1</u> ให้ O เป็นเซ็ทจำนวนเต็มคี่ และ E เป็นเซ็ทจำนวนเต็มคู่ ซึ่ง $f : O \longrightarrow E$ โดยที่ $f(x) = x + 1$ เมื่อ $x \in O$

จากแบบฝึกหัดชุดที่ 4.3 ข้อ 7 จะได้ว่า f เป็นฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (ดูจากรูปที่ 4.5.1)

จะได้ว่า E เป็นเซ็ทอนันต์ ซึ่งอีควิวาเลนซ์กับจำนวนเต็มคี่ หรือมีจำนวนสมาชิกเท่ากับเซ็ท O

$$\begin{array}{ccccc} O. & 1 & 3 & 5 & 7 \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ E. & 2 & 4 & 6 & 8 \ldots \end{array}$$

รูปที่ 4.5.1

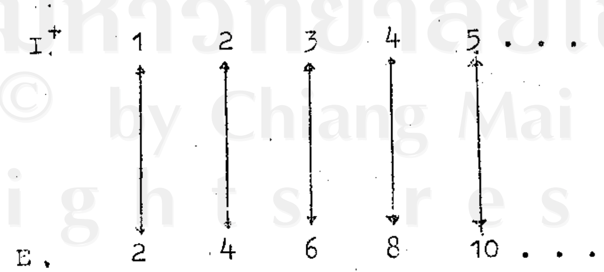
การนับสมาชิกในเซ็ทนั้น ถ้าเป็นเซ็ทจำกัด $A = \{a, b, c, d\}$ ก็นับ a เป็นหนึ่งนับ b เป็นสอง นับ c เป็นสาม และนับ d เป็นสี่ ซึ่งก็เป็นการจัดสมาชิกของ $\{a, b, c, d\}$ ให้จับคู่แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับ $\{1,2,3,4\}$ ถ้าเป็นเซ็ทอนันต์ เช่น $E = \{2,4,6,. . .\}$ การนับก็กระทำไปเรื่อยๆ โดยไม่สิ้นสุด ซึ่งก็เป็นการจับคู่แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับ I^+ จะเห็นว่าการนับจำนวนสมาชิกในเซ็ทก็คือการจับคู่แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับสับเซ็ท ของจำนวนเต็มบวก หรือกับเซ็ทจำนวนเต็มบวก แสดงว่าการนับเป็นการจับคู่ระหว่างเซ็ทที่ต้องการนับกับเซ็ทจำนวนเต็มบวก ซึ่งจะให้นิยามดังต่อไปนี้

<u>นิยาม 4.5.5</u> เซ็ท A เป็นเซ็ทนับได้ (Countable , denumerable หรือ enumerable set) ก็ต่อเมื่อ เซ็ท A อีควิวาเลนซ์ กับเซ็ทของจำนวนเต็มบวก

เซ็ท A นับไม่ได้ (uncountable set) ก็ต่อเมื่อ เซ็ท A ไม่ใช่เซ็ทจำกัด และไม่ใช่เซ็ทนับได้

<u>ตัวอย่าง 4.5.2</u> ให้ $f : I^+ \dashrightarrow E$ โดยที่ $f(x) = 2x$ เมื่อ $x \in I^+$ จากแบบฝึกหัดชุดที่ 4.3 ข้อ 3 จะได้ว่า f เป็นฟังชันที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (ดูจากรูปที่ 4.5.2)

จะได้ว่า E เป็นเซ็ทอนันต์ ที่นับได้ และอีควิวาเลนซ์กับ I^+ หรือมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ I^+ ถึงแม้ว่า $E \subset I^+$



รูปที่ 4.5.2

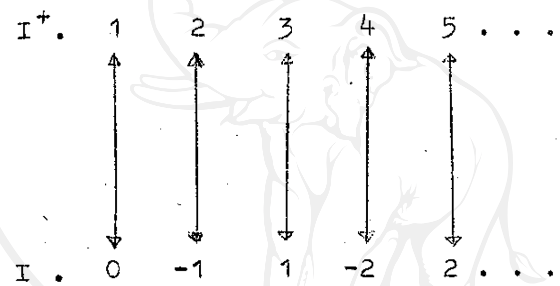
<u>ตัวอย่าง 4.5.3</u> ให้ $f : I^+ \dashrightarrow I$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & ; n = 1,3,5,\ldots \\ -\frac{n}{2} & ; n = 2,4,6\ldots \end{cases}$$

ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก I^+ ไปบน I จากแบบฝึกหัดชุด 4.3 ข้อ 4, 5

(ดูจากรูปที่ 4.5.3)

$\therefore I$ เป็นเซ็ทอนันต์ ที่นับได้ และ I มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ I^+ ถึงแม้ว่า $I \supset I^+$



รูปที่ 4.5.3

ต่อไปจะกล่าวถึงคุณสมบัติของเซ็ทที่นับได้

<u>ทฤษฎี 4.5.6</u>   เซ็ท A เป็นเซ็ทนับได้ ก็ต่อเมื่อ เราสามารถเรียงสมาชิกของเซ็ท A ได้อย่างมีหลักเกณฑ์ นั่นคือเขียนเซ็ท A ได้ว่า

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$$

พิสูจน์ กรณีที่ 1 ถ้า $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$ จะได้ว่า A เป็นเซ็ทนับได้

1) ให้ $f : A \longrightarrow I^+$ โดยที่ $f(a_i) = i$, $a_i \in A$

2) จะได้ว่า f เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปบน I^+

$\therefore$ A เป็นเซ็ทนับได้

กรณีที่ 2 ถ้า A เป็นเซ็ทนับได้ จะได้ว่า $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$

1) จะมี g เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจาก I^+ ไปบน A โดยที่

2) $g(i) = a_i$ $i \in I^+$

a_i เป็นสมาชิกของ A ซึ่ง $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$

$\therefore$ A เป็นเซ็ทนับได้ ก็คือเมื่อสามารถเรียงสมาชิกของเซ็ท A ได้อย่างมีหลักเกณฑ์

<u>บทแทรก 4.5.7</u> เซ็ทของจำนวนตักยะบวก นับได้

พิสูจน์ เราสามารถเรียงจำนวนตักยะบวกใน $\frac{a}{b}$ ซึ่ง $a, b \in I^+$ และ $b \neq 0$

ดังนั้นจำนวนตักยะทั้งหมด คือ

1/1	2/1	3/1	4/1	5/1 . . . .
1/2	2/2	3/2	4/2	5/2 . . .
1/3	2/3	3/3	4/3	5/3 . . .
1/4	2/4	3/4	4/4	5/4 . . .
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

เรียงจำนวนเหล่านี้ได้อย่างมีหลักเกณฑ์ดังนี้

1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 2/2, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, ...

นั่นคือเรียงตัวที่มีผลบวกของเศษและส่วนน้อยที่สุดก่อน ถ้าผลบวกของเศษและส่วนเท่ากัน เรียงตัวที่มีเศษน้อยที่สุดก่อนตามลำดับไปหามาก

ดังนั้น { 1/1, 1/2, 2/1, 2/2, 3/1, 1/4, . . . } เป็นเซ็ทนับได้ เมื่อตัดจำนวนตักยะที่ซ้ำกันออก

<u>ทฤษฎี 4.5.8</u> ถ้า $A_1, A_2, \ldots$ เป็นเซ็ทนับได้ จะได้ว่า $\bigcup_{i=1}^{\alpha} A_i$ เป็นเซ็ทนับได้

พิสูจน์ 1) $A_1, A_2, \ldots$ เป็นเซ็ทนับได้ เราสามารถเรียงสมาชิกของ A_i แต่ละตัวได้อย่างมีหลักเกณฑ์

2) $\therefore$ $A_1 = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \ldots\}$, $A_2 = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots\}$,

$A_3 = \{a_1^3, a_2^3, a_3^3, \ldots\}$

3) โดยที่ a_k^j เป็นสมาชิกตัวที่ k ของเซ็ท A_j

4) และให้ a_k^j มีความสูงเป็น $j + k$

5) จะได้ว่า a_1^1 เป็นสมาชิกของเซ็ทที่มีความสูง 2

6) ดังนั้นเซ็ทที่มีความสูง m จะมีสมาชิก m - 1 ตัว เมื่อ $m \in I^+$ และ $m \geq 2$ เราสามารถเขียนสมาชิกของ $\bigcup_{i=1}^{\alpha} A_i$ ได้ดังนี้

$$
\begin{array}{cccccc}
a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & a_5^1 & \ldots \\
a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 & \ldots \\
a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 & \ldots \\
a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & a_5^4 & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

เรียงสมาชิกเหล่านี้ได้อย่างมีหลักเกณฑ์ดังนี้

$$a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, a_1^4, \ldots$$

นั่นคือเรียงตัวที่มีความสูงน้อยสุดก่อน ส่วนตัวที่มีความสูงเท่ากัน ให้เรียงตามลำดับที่ของสมาชิก จากน้อยไปหามาก

ดังนั้น $\bigcup_{i=1}^{\alpha} A_i$ เป็นเซ็ทนับได้

<u>ทฤษฎี 4.5.9</u> เซ็ทอนันต์ซึ่งเป็นสับเซ็ทของเซ็ทนับได้ จะเป็นเซ็ทนับได้ด้วย

พิสูจน์ ให้ A เป็นเซ็ทนับได้

B เป็นเซ็ทอนันต์ซึ่งเป็นสับเซ็ทของเซ็ท A

$\therefore A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

จากสมาชิกของ A จะพบสมาชิกของ B เพราะ B เป็นสับเซ็ทของ A พบสมาชิกของ B ครั้งแรก เรียกสมาชิกตัวนั้นว่า a_{n1} พบครั้งที่สองเรียกว่า a_{n2} ทำดังนี้ไปเรื่อยๆ แต่ B เป็นเซ็ทอนันต์ ดังนั้นต้องใช้จำนวนเต็มบวกทุกตัว

ดังนั้น B เป็นเซ็ทนับได้

<u>ทฤษฎี 4.5.10</u> $[0,1]$ เป็นเซ็ทนับไม่ได้

พิสูจน์ สมมติว่า $[0,1]$ เป็นเซ็ทนับได้ และเรียงสมาชิกของเซ็ทนี้อย่างมีหลักเกณฑ์ดังนี้ $x_1, x_2, x_3, \ldots$

แต่จำนวนจริงทุกตัวสามารถเขียนเป็นทศนิยมไม่รู้จบได้

$$x_1 = .a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \cdots$$

$$x_2 = .a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24} \cdots$$

$$x_3 = .a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34} \cdots$$

$$x_4 = .a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44} \cdots$$

$$\vdots$$

แต่ละ $a_{ij} \in I^+$ ซึ่ง $0 \leq a_{ij} \leq 9$ (ใช้ $\frac{1}{2} = .4999 \ldots$, $\frac{1}{4} = .24999 \ldots$)

ให้ $c \in R$ ซึ่ง $0 < c < 1$ $\therefore$ $c = .c_1c_2c_3 \ldots$

โดยที่	$c_1 \in I$ ซึ่ง $1 \leq c \leq 9$	แต่ $c_1 \neq a_{11}$
	$c_2 \in I$ ซึ่ง $1 \leq c \leq 9$	แต่ $c_2 \neq a_{22}$
	$c_3 \in I$ ซึ่ง $1 \leq c \leq 9$	แต่ $c_3 \neq a_{33}$
	$\vdots$	

จะเห็นว่า $c \neq x_1$ ที่ทศนิยมตัวแรก , $c \neq x_2$ ที่ทศนิยมตัวที่สอง และ $c_i \neq x_i$ ที่ทศนิยมตัวที่ i

จะเห็นว่า $c \in (0,1)$ แต่ไม่เท่ากับ x_i ใดๆ

ดังนั้นที่สมมติไม่จริง

$\therefore$ [0,1] เป็นเซ็ทนับไม่ได้

สัญญลักษณ์ $\aleph_0$ อ่านว่า อัลเลฟ-นัล (aleph - null) แทนคาร์ดินัลของเซ็ทอนันต์ที่นับได้ สัญญลักษณ์ $\aleph_1$ อ่านว่า อัลเลฟ-วัน (aleph - one) แทนคาร์ดินัลของช่วง (0,1) และแทนคาร์ดินัลของเซ็ทอนันต์ที่อีควิวาเลนซ์กับช่วง (0,1)

จากทฤษฎี 4.5.10 จะได้ว่า ช่วง (0,1) เป็นเซ็ทที่นับไม่ได้ และเรากล่าวได้ว่า จำนวนจริงเป็นเซ็ทนับไม่ได้

เราจะเห็นความแตกต่างระหว่างเซ็ทที่อีควิวาเลนซ์กัน กับเซ็ทที่นับได้ เซ็ท A อีควิวาเลนซ์กับเซ็ท B หมายถึงสามารถสร้างฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ระหว่าง A และ B ได้ สำหรับ C จะเป็นเซ็ทที่นับได้ถ้าสามารถสร้างฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งจาก I^+ กับ C ได้ จะเห็นว่าเซ็ทที่นับได้จะอีควิวาเลนซ์กับเซ็ท I^+ เสมอ แต่เซ็ทที่อีควิวาเลนซ์กัน อาจจะนับไม่ได้ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.5.11</u> จะมีฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างช่วงเปิด(0,1) กับเส้นจำนวนจริง L

พิสูจน์ ฟังชั่น $f : (0,1) \longrightarrow L$ คือ $f(x) = \dfrac{x - 1/2}{x - x^2}$

จะได้ว่า f เป็นฟังชั่นหนึ่งต่อหนึ่งจากช่วง(0,1) ไปบน L (แบบฝึกหัดชุดที่ 4.3 ข้อ 8)

จะเห็นว่าช่วง (0,1) อีควิวาเลนซ์กับ L หรือมีคาร์ดินัลเท่ากัน

<u>ทฤษฎี 4.5.12</u> ช่วง (0,1) และช่วง (0,1] มีจำนวนคาร์ดินัลเท่ากัน

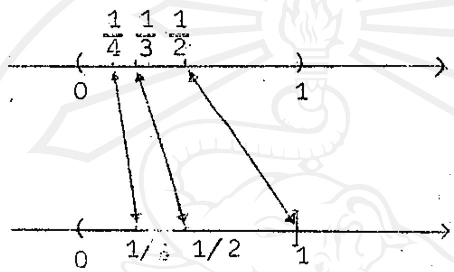
พิสูจน์ ให้ $A = \{ \frac{1}{x} / x \in I , x > 1 \}$

ฟังชั่น $f : (0,1) \longrightarrow (0,1]$ โดยมี

$$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x-1} \quad \text{สำหรับ } x \in I \text{ ทุกตัวที่ } x > 1$$

และ $f(x) = x$ เมื่อ $x \in (0,1) - A$

จะได้ว่า f เป็นฟังชั่นที่สมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (แบบฝึกหัดชุดที่ 4.3ข้อ 6)



ดูรูปที่ 4.5.4

รูปที่ 4.5.4

<u>แบบฝึกหัด 4.5</u>

1. จงพิสูจน์ว่า เซ็ทของจำนวนตักยะใน [0,1] เป็นเซ็ทนับได้
2. จงพิสูจน์ว่า เซ็ทของจำนวนอตักยะใน [0,1] เป็นเซ็ทนับไม่ได้
3. จงพิสูจน์ว่า เซ็ทของจำนวนตักยะใน [3,7] เป็นเซ็ทนับได้
4. จงพิสูจน์ว่า เซ็ทของจำนวนตักยะระหว่าง a และ b เป็นเซ็ทนับได้
5. จงพิสูจน์ว่า เซ็ทของจำนวนตักยะเป็นเซ็ทนับได้
6. (Paradox ของ Galileo)

   ให้ $A = \{x / x \in I^{+}\}$

   $B = \{x / x \in n^{2} , n \in I^{+}\}$

   จงพิสูจน์ว่า $A \approx B$
7. จงพิสูจน์ว่า สับเซ็ทของเซ็ทจำกัดจะเป็นเซ็ทจำกัด
8. ถ้า I^{+} เป็นเซ็ทนับได้ จงพิสูจน์ว่า $I^{+} \times I^{+}$ เป็นเซ็ทนับได้

4.6 <u>โมโนโทนฟังชั่น (Monotonic functions)</u>

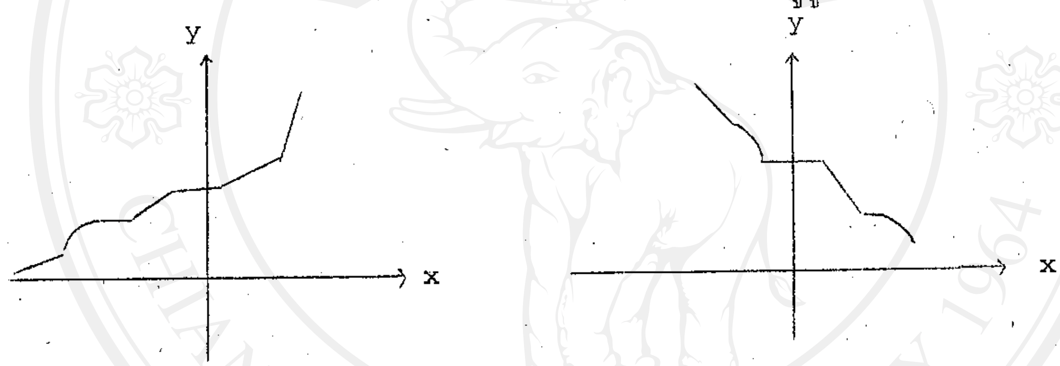
<u>นิยาม 4.6.1</u> ถ้า f เป็นจำนวนจริงบนช่วง $J \subseteq R$ เรากล่าวว่า f เป็นฟังชั่นไม่ลดลง (nondecreasing) บนช่วง J ถ้า

$$f(x) \leq f(y) \qquad (x < y \ ; \ x, y \in J)$$

และกล่าวว่า f เป็นฟังชั่นไม่เพิ่มขึ้น (nonincreasing) บนช่วง J ถ้า

$$f(x) \geq f(y) \qquad (x < y \ ; \ x, y \in J)$$

ถ้า f เป็นฟังชั่นไม่ลดลง หรือฟังชั่นไม่เพิ่มขึ้น กรณีใดกรณีหนึ่งเราเรียก f ว่าโมโนโทน (monotone) ดูรูปที่ 4.6.1)



กราฟฟังชั่นไม่ลดลง   รูปที่ 4.6.1   กราฟฟังชั่นไม่เพิ่มขึ้น

<u>ทฤษฎี 4.6.2</u> ให้ S, T เป็นสับเซ็ทของจำนวนจริง และ $f : S \longrightarrow T$ เป็นโมโนโทนฟังชั่นบนเซ็ท S สมมติ A เป็นสับเซ็ทของ S ซึ่งบรรจุอยู่ในช่วงปิด [a, b] และ $a, b \in S$

ถ้า f เป็นฟังชั่นไม่ลดลง และ $f(a) \neq f(b)$ จะได้ว่า

$f(A) \subseteq [f(a), f(b)]$ และ

ถ้า f เป็นฟังชั่นไม่เพิ่มขึ้น และ $f(a) \neq f(b)$ จะได้ว่า

$f(A) \subseteq [f(b), f(a)]$

พิสูจน์ 1) ให้ f เป็นฟังชั่นไม่ลดลงบน S และสำหรับ $x \in A$ ทุกตัวโดยที่ $a \leq x \leq b$

จะได้ว่า $f(x)$ แทนค่าทุกๆค่าใน $F(A)$ (มี $f(x)$ บางตัวไม่อยู่ใน $f(A)$

ดังนั้น $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ สำหรับ $x \in A$ ทุกตัว และ f เป็นฟังชั่นไม่ลด

$\therefore$ $f(x) \in [f(a), f(b)]$ สำหรับ $x \in A$ ทุกตัว

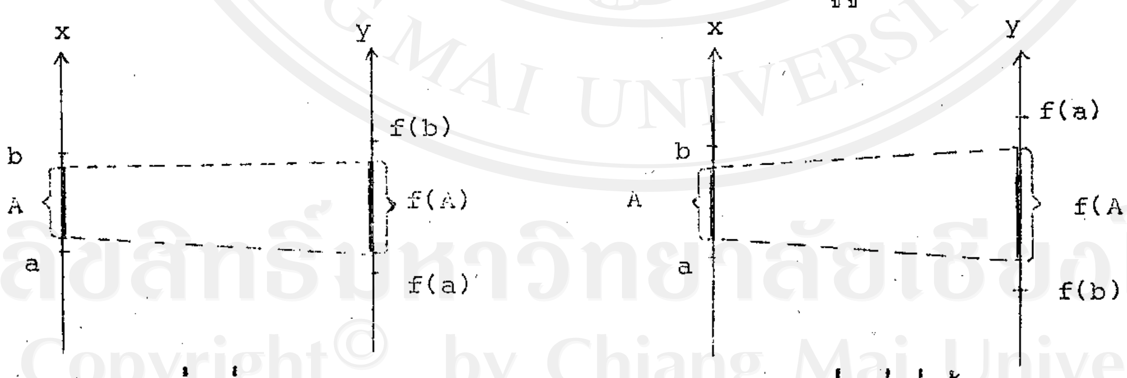
ดังนั้น $f(A) \subseteq [f(a), f(b)]$

2) ให้ f เป็นฟังชั่นไม่เพิ่มขึ้นบน S และสำหรับ $x \in A$ ทุกตัวโดยที่ $a \leq x \leq b$ จะได้ว่า $f(x)$ แทนค่าทุกๆค่าใน $f(A)$

ดังนั้น $f(b) \leq f(x) \leq f(a)$ สำหรับ $x \in A$ ทุกตัว และ f เป็นฟังชั่นไม่เพิ่มขึ้น

$\therefore$ $f(x) \in [f(b), f(a)]$ สำหรับ $x \in A$ ทุกตัว

ดังนั้น $f(A) \in [f(b), f(a)]$ (ดูรูปที่ 4.6.2)



f เป็นฟังชั่นไม่ลดลง f เป็นฟังชั่นไม่เพิ่มขึ้น

รูปที่ 4.6.2

แบบฝึกหัดชุด 4.6

1). จงพิสูจน์ว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังชั่นไม่ลดลงในช่วง $[0,\alpha)$ และไม่เพิ่มขึ้นใน $(-\alpha, 0]$

2). จงพิสูจน์ว่า $f(x) = |x|/(1+|x|)$ เป็นฟังชั่นไม่ลดลงในช่วง $[0,\alpha)$ และไม่เพิ่มขึ้นในช่วง $(-\alpha, 0]$.