บทที่ 5

เมตริกซ์เซ็ท (Metric Set) ซีเควนซ์จำนวนจริง (Sequence of real Number) และ ลิมิตฟังชั่น (Limit of Function)

ในบทนี้เป็นบทที่มีเนื้อหามาก และมีความสำคัญในวิชาวิเคราะห์(analysis) ได้แก่เรื่องลิมิต (limit) ซึ่งกล่าวถึงซีเควนซ์ลู่เข้า (convergence sequence) และความต่อเนื่อง (continuity) สำหรับความต่อเนื่องจะกล่าวในบทต่อไป.

เนื้อหาในบทนี้อาจจำแนกเป็นสามส่วน ส่วนแรกได้แก่ เมตริกซ์เซ็ท - (metric set) ส่วนที่สองได้แก่ ซีเควนซ์ (sequence) และส่วนที่สามได้แก่ **ลิมิตของฟังชั่น** (limit of function)

ส่วนแรก เป็นนิยามของเมตริกซ์เซ็ท ให้ความหมายฟังชั่นเป็น ฟังชั่นระยะทาง (distance function)ซึ่งจะเขียนในรูปเนเบอร์ฮูด (neighborhood) โดยจะนำไปใช้ในเรื่องลิมิตของเซ็ท ลิมิตของซีเควนซ์ และลิมิตของฟังชั่น สำหรับ-ลิมิตของเซ็ทนั้นเป็นเรื่องสำคัญเรื่องหนึ่งซึ่งจะนำไปใช้ในหัวข้อต่อไปโดยตลอด และให้ทราบว่าจำนวนจริงเป็นเซ็ทที่สอดคล้องตามคุณสมบัติของเมตริกซ์เซ็ท ซึ่งเรียกว่า - ยูคลิเดียนหนึ่งมิติ (E^1) และขยายถึง n มิติ ก็สอดคล้องคุณสมบัติของเมตริกซ์เซ็ท และยังมีเซ็ทอื่น ๆ ที่สอดคล้องคุณสมบัติของเมตริกซ์เซ็ท ทฤษฎีต่าง ๆ ในเมตริกซ์เซ็ท จะกล่าวคลุมไปถึงเรื่องซีเควนซ์ลู่เข้า และความต่อเนื่องที่จะศึกษาทั้งหมด จะกล่าวถึงเพียงในระบบจำนวนจริงเท่านั้น ซึ่งเป็นส่วนย่อยที่สามารถแสดงให้เห็นและเกิดความเข้าใจได้ง่าย แต่การพิสูจน์ใช้ในรูปเนเบอร์ฮูดตลอด เมื่อผู้ศึกษามีความเข้าใจเป็นอย่างดี ก็จะจินตนาการเป็นเมตริกซ์เซ็ทในเซ็ททั่ว ๆ ไปได้โดยง่าย สำหรับตอนท้ายของเมตริกซ์กล่าวถึงเรื่องเซ็ทที่คอนเนค (connected)และคอมแพคต์ (compact) สำหรับเซ็ทที่คอมแพคต์จะนำไปใช้ในเรื่องความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ (uniformly continuous) ซึ่งมีเพียงส่วนน้อย.

ส่วนที่สอง เป็นซีเควนซ์ของจำนวนจริง (sequence of real - numbers) ซึ่งกล่าวในเมตริกซ์เซ็ท E^1 กล่าวถึงนิยามของซีเควนซ์ ซีเควนซ์ย่อย (subsequence) และลิมิตของซีเควนซ์ และทฤษฎีซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างจุด-ลิมิตในเซ็ทกับลิมิตของซีเควนซ์ กล่าวถึงการลู่เข้า (convergence) การลู่ออก - (divergence) และซีเควนซ์ออสซิเลท (oscillates) โดยอาศัยลิมิตของซีเควนซ์ ให้รู้จักซีเควนซ์ที่บาวด์ เพื่อให้รู้คุณสมบัติการลู่เข้าโดยไม่ต้องทราบลิมิตของซีเควนซ์ และทฤษฎีที่สำคัญได้แก่ บัลซาโน-ไวเออร์สแตรส (Balzano-Weierstrass Theorem) ทั้งของเซ็ทและของซีเควนซ์ ซึ่งจะนำไปใช้ในการพิสูจน์ซีเควนซ์โคชี (Cauchy sequence) ในตอนท้ายกล่าวถึงเงื่อนไขโคชี (Cauchy criteria) ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่สำคัญทำให้ทราบว่าซีเควนซ์ลู่เข้าโดยไม่ต้องทราบลิมิตของซีเควนซ์

ส่วนที่สาม กล่าวถึงลิมิตของฟังซ์ชัน จากลิมิตของซีเควนซ์จะช่วยให้เข้าใจลิมิตของฟังซ์ชันยิ่งขึ้น สำหรับจุดที่ถูกเข้าใกล้ในลิมิตของฟังซ์ชันจะเป็นจุดลิมิต กล่าวถึง - ความสัมพันธ์ระหว่างลิมิตของฟังซ์ชันและลิมิตของซีเควนซ์ คุณสมบัติของซีเควนซ์และลิมิตข้างเดียว สำหรับลิมิตของฟังซ์ชันและนำไปใช้ในเรื่องความต่อเนื่อง และลิมิตข้างเดียวจะทำให้ทราบชนิดของฟังซ์ชันไม่ต่อเนื่องและอนุพันธ์ข้างเดียว

จะเห็นว่าเรื่องลิมิตเป็นเรื่องที่สำคัญในบทนี้ สำหรับลิมิตที่กล่าวในบทนี้นั้นเราแบ่งได้เป็นลิมิตของเซ็ท ลิมิตของซีเควนซ์และลิมิตของฟังซ์ชัน และในแต่ละหัวข้อได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของลิมิตทั้งสาม สำหรับลิมิตในเซ็ทหรือจุดลิมิตนั้น จะกล่าวในเรื่องฟังซ์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ต่อไป

5.1 เมตริกซ์เซ็ท (Metric sets)

นิยาม 5.1.1 ให้ M เป็นเซ็ทใด ๆ จะเรียกฟังซ์ชัน $d: M \times M \to R$ ว่าเมตริกซ์หรือฟังซ์ชันระยะทาง (distance function) บน M ถ้า d สอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้.

ก. $d(x, y) \geq 0$ สำหรับ $x, y \in M$ ทุกตัว

ข. $d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ สำหรับ $x, y \in M$ ทุกตัว

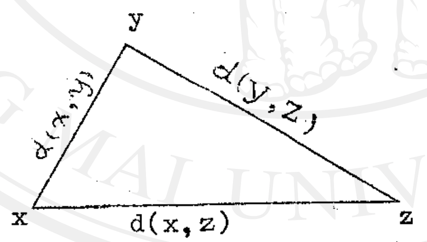
ค. $d(x,y) = d(y, x)$ สำหรับ $x, y \in M$ ทุกตัว

ง. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ สำหรับ $x, y, z \in M$ ทุกตัว

ถ้า d เป็นเมตริกซ์สำหรับเซ็ท M เรียกคู่ลำดับ $<M, d>$ ว่าเมตริกซ์-เซ็ท

จำนวนจริง $d(x, y)$ เรียกว่าระยะทางจาก x ไป y สำหรับสมาชิกในเซ็ท M เรามักเรียกว่าจุด (point)

จากนิยาม ข้อ ก. หมายถึงระยะทางระหว่างจุดสองจุดต้องไม่เป็นลบ ข้อ ข. ระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่เป็นศูนย์นั้นแสดงว่า จุดสองจุดนั้นเป็นจุดเดียวกัน ข้อ ค. หมายถึงระยะทางระหว่างจุด x กับจุด y จะเท่ากับระยะทางระหว่างจุด y และจุด x และข้อ ง. ซึ่งเราเรียกว่าอสมการสามเหลี่ยม (triangle inequality) ถ้าเปรียบเทียบกับรูปสามเหลี่ยมหมายถึงผลบวกของด้านสองด้านย่อมยาวกว่าด้านที่สาม ดังรูปที่ 5.1.1



รูปที่ 5.1.1

เราเคยกล่าวถึงระยะทางมาแล้วในเรื่องค่าสัมบูรณ์ ซึ่งค่าสัมบูรณ์มีคุณสมบัติสอดคล้องตามนิยาม 5.1.1 ทุกประการ แต่ค่าสัมบูรณ์ใช้กับเรื่องจำนวน ส่วนเมตริกซ์เซ็ทใช้กับเซ็ททั่ว ๆ ไป ซึ่งกล่าวได้กว้างกว่า

<u>ตัวอย่าง 5.1.1</u> ถ้า $M = \{x / x \in R\}$ ฟังชั่น $d : M \times M \to R$ คือ $d(x,y) = |x-y|$ เมื่อ $x, y \in R$ จงพิสูจน์ว่า $<M, d>$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท

พิสูจน์

1. ถ้า $x, y \in M$ จะได้ว่า $d(x,y) = |x-y| \geq 0$

$\therefore d(x,y) \geq 0$ สำหรับ $x, y, \in M$ ทุกตัว

2. ถ้า $x, y \in M$ ให้ $d(x,y) = 0$

$\therefore d(x,y) = |x-y| = 0$

จาก $|x-y| = 0$

$\therefore x - y = 0$

$x = y$

ถ้า $x = y$

$\therefore d(x,y) = |x-y| = |x-x| = 0$

$\therefore d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ สำหรับ $x, y \in M$ ทุกตัว

3. ถ้า $x, y \in M$

$$
\begin{aligned}
\therefore d(x,y) &= |x-y| \\
&= |-(y-x)| \\
&= |y-x| \\
&= d(y,x)
\end{aligned}
$$

$\therefore d(x,y) = d(y,x)$ สำหรับ $x, y \in M$ ทุกตัว

4. ถ้า $x, y, z \in M$

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= |x-z| \\
&= |x-y+y-z| \\
&= |(x-y) + (y-z)| \\
&\leq |x-y| + |y-z| \\
&\leq d(x,y) + d(y,z)
\end{aligned}
$$

$\therefore d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ สำหรับ $x, y, z \in M$ ทุกตัว

$\therefore$ $<M, d>$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท เรานิยมเขียนแทนเซ็ทนี้ด้วย E^1 เรียกเซ็ทนี้ว่า ยูคลิเดียนหนึ่งมิติ (Euclidean one-dimension) ถ้ากล่าวในแง่เรขาคณิต E^1 แทนเส้นจำนวนจริง

<u>ตัวอย่าง 5.1.2</u> ให้ $M = \{<x,y> / x,y \in R\}$ และ

$d(p, q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ สำหรับ $p, q, \in M$ ทุกตัว โดยที่ $p = <x_1, y_1>$, $q = <x_2, y_2>$ เมื่อ x_i, $y_i \in R$, $i = 1, 2$ จงพิสูจน์ว่า $<M, d>$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท

<u>วิธีทำ</u> 1. $d(p,q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \geq 0$, $p = <x_1, y_1>$,

$q = <x_2, y_2>$ และ $x_1, x_2, y_1 y_2 \in R$

$\therefore$ $d(p,q) \geq 0$ สำหรับ $p, q \in M$ ทุกตัว

2. ให้ $d(p,q) = 0$

ก็ต่อเมื่อ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 0$

ก็ต่อเมื่อ $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $(x_1 - x_2)^2 = 0$ และ $(y_1 - y_2)^2 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $x_1 - x_2 = 0$ และ $y_1 - y_2 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$

ก็ต่อเมื่อ $<x_1, y_1> = <x_2, y_2>$

ก็ต่อเมื่อ $p = q$

$\therefore$ $d(p, q) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $p = q$ สำหรับ $p, q \in M$ ทุกตัว

3. $$d(p,q) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$
$$= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$
$$= d(q,p)$$

$\therefore\ d(p,q) = d(q,p)$ สำหรับ $p,q \in M$ ทุกตัว

4. ให้ $p = \langle x_1, y_1\rangle$, $q = \langle x_2, y_2\rangle$ และ $r = \langle x_3, y_3\rangle$

ต้องพิสูจน์ว่า $d(p,q) + d(q,r) \geq d(p,r)$

(หรือ $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} + \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2} \geq \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}$

ให้ $$\left.\begin{array}{lll} a = |x_1-x_2|, & b = |y_1-y_2|, & c = |x_2-x_3| \\ d = |y_2-y_3|, & e = |x_1-x_3|, & f = |y_1-y_3| \end{array}\right\} \text{--(1)}$$

(หรือ ต้องพิสูจน์ว่า $\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2} \geq \sqrt{e^2+f^2}$)

$$\because\ (bc - ad)^2 \geq 0$$
$$b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 \geq 0$$
$$b^2c^2 + a^2d^2 \geq 2abcd$$
$$b^2c^2 + a^2d^2 + a^2c^2 + b^2d^2 \geq a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$$
$$b^2(c^2+d^2) + a^2(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$$
$$(c^2+d^2)(b^2+a^2) \geq (ac+bd)^2$$
$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq (ac+bd)$$
$$2(\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}) \geq 2(ac+bd) \quad \text{-----(2)}$$

แต่
$$a + c = |x_1-x_2| + |x_2-x_3|$$
$$a + c \geq |x_1-x_2+x_2-x_3|$$
$$a + c \geq |x_1-x_3| = e \quad \text{-----(3)}$$
$$b + d = |y_1-y_2| + |y_2-y_3|$$
$$b + d \geq |y_1-y_2+y_2-y_3|$$
$$b + d \geq |y_1-y_3| = f \quad \text{-----(4)}$$

3)^2 $\quad a^2 + 2ac + c^2 \geq e^2$

4)^2 $\quad b^2 + 2bd + d^2 \geq f^2$

$\therefore (a^2+ 2ac+ c^2)+ (b^2+ 2bd + d^2) \geq e^2 + f^2$

$(a^2+ b^2)+ (c^2+d^2)+ 2(ac+ bd) \geq e^2 + f^2$

นำ 2) มาแทนค่า $(a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2(\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}) \geq e^2+f^2$

$$\{\sqrt{(a^2+b^2)}+\sqrt{(c^2+d^2)}\}^2 \geq e^2 + f^2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{e^2 + f^2}$$

แทนค่า a, b, c, d, e และ f

$$\therefore d(p,q) + d(q,r) \geq d(p,r)$$

$\therefore$ < M, d > เป็นเมตริกซ์เซ็ท ใช้ E^2 เป็นสัญญลักษณ์

เรียกเซ็ทนี้ว่า ยูคลิเดียนสองมิติ (Euclidean two-dimension) ถ้ากล่าวในแง่เรขาคณิต E^2 แทนระนาบ (plane)

ถ้าเซ็ท $M = \{< x,y,z >/ x,y,z \in R\}$ และ $d(p, q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1- y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ สำหรับ $p, q, \in M$ ทุกตัว โดยที่ $p = < x_1, y_1, z_1 >$, $q = <x_2, y_2, z_2)$ เมื่อ $x_i, y_i, z_i \in R$ $i = 1, 2,$ จะได้ว่า < M, d > เป็นเมตริกซ์เซ็ท ซึ่งเซ็ทนี้คือยูคลิเดียนสามมิติ เขียนแทนด้วย E^3 ในแง่เรขาคณิต E^3 แทนสเปซสามมิติ (space of three dimension) และเราสามารถขยายถึงยูคลิเดียน n มิติ (Euclidean n-dimension) โดยที่ $M = \{<x_1, x_2,\ldots,x_n>/ x_1, x_2,\ldots,x_n \in R\}$ สำหรับสมาชิก $p = < x_1, x_2,\ldots,x_n >$, $q = < y_1, y_2,\ldots,y_n >$ ในเซ็ท M ทุกตัว และ $d(p,q) = \sqrt{(x_1- y_1)^2 + (x_2- y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$

แบบฝึกหัดชุด 5.1

1. ให้ X เป็นเซ็ทใด ๆ และ $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x = y \\ 1 & \text{ถ้า } x \neq y \end{cases}$

สำหรับ $x, y \in X$ ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า $< X, d >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท

2. ให้ R เป็นเซ็ทของจำนวนจริง และ

2.1 $d_1(p,q) = |p^2 - q^2|$

2.2 $d_2(p,q) = 2|p - q|$

สำหรับ $p, q \in R$ ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า $< R, d_1 >$, $< R, d_2 >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท

3. ให้ R เป็นเซ็ทของจำนวนจริง และ $d(a,b) = \dfrac{|a - b|}{1 + |a - b|}$ สำหรับ $a, b \in R$ ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า $<R, d>$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท

(ข้อแนะนำ ให้พิสูจน์ว่า $\dfrac{|a - b|}{1 + |a - b|} + \dfrac{|b - c|}{1 + |b - c|} \geq \dfrac{|a - b|}{1 + |a - b| + |b - c|} + \dfrac{|b - c|}{1 + |a - b| + |b - c|} \geq \dfrac{|a - c|}{1 + |a - c|}$)

4. ถ้า $< M, d >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท และ $k \in R^+$ ให้ $d_k(x,y) = k.d(x, y)$ สำหรับ $x, y \in M$ ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า $< M, d_k >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท

5.2 เนเบอร์ฮูด (Neighborhoods)

นิยาม 5.2.1 ให้ $< M, d >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท ซึ่ง p เป็นจุดในเซ็ท M และ ε เป็นจำนวนจริงบวก เนเบอร์ฮูดของจุด p มีรัศมียาว ε เขียนแทนด้วย $N(p, \varepsilon)$ มีความหมายดังนี้

$$N(p,\varepsilon) = \{q \in M / d(p,q) < \varepsilon\}$$

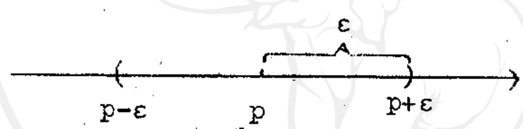
<u>ตัวอย่าง 5.2.1</u> ใน E^1 เราทราบว่า $d(p,q) = |p-q|$ สำหรับ $p,q \in M$ ทุกตัว

แต่ $N(p,\varepsilon) = \{q / d(p,q) < \varepsilon\}$

$$\therefore N(p,\varepsilon) = \{q / |p-q| < \varepsilon\}$$
$$= \{q / |q-p| < \varepsilon\}$$
$$= \{q / -\varepsilon < q - p < \varepsilon\}$$
$$= \{q / p - \varepsilon < q < p + \varepsilon\}$$
$$= (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$$

นั่นคือ ใน E^1 เนเบอร์ฮูด $N(p,\varepsilon)$ ก็คือช่วงเปิด $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$

จาก E^1 จะได้เนเบอร์ฮูดก็คือช่วงเปิด ดังนั้นจุด $p-\varepsilon$ และจุด $p+\varepsilon$ ไม่อยู่ในเนเบอร์ฮูด $N(p,\varepsilon)$ (ดูจากรูปที่ 5.2.1)



รูปที่ 5.2.1

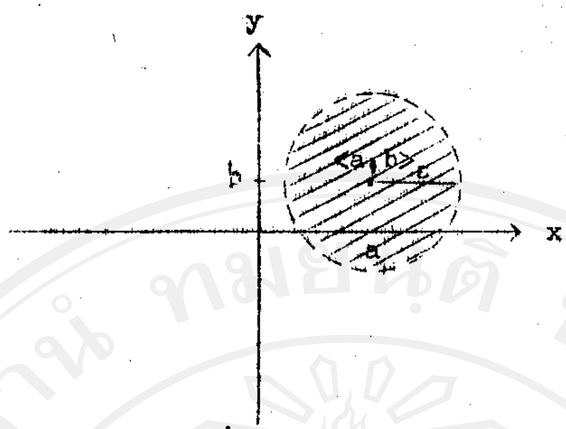
<u>ตัวอย่าง 5.2.2</u> ใน E^2 เราทราบว่า $d(p,q) = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$;

$p = \langle a, b \rangle$, $q = \langle x, y \rangle$

แต่ $N(p,\varepsilon) = \{q = \langle x,y \rangle / d(p,q) < \varepsilon\}$

$$= \{\langle x, y \rangle / \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} < \varepsilon\}$$
$$= \{\langle x, y \rangle / (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}$$

นั่นคือใน E^2 เนเบอร์ฮูด $N(p,\varepsilon)$ คือเซ็ทของจุดที่อยู่ภายในวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $\langle a, b \rangle$ และรัศมียาว ε แสดงว่าเซ็ทของจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม $(x-a)^2 + (y-b^2) = \varepsilon^2$ ไม่อยู่ในเนเบอร์ฮูด $N(p,\varepsilon)$ (ดูรูปที่ 5.2.2)



รูปที่ 5.2.2

<u>ตัวอย่าง 5.2.3</u> ถ้า $< M, d >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท ซึ่ง $d(p,q) = 0$ ถ้า $p = q$

$d(p,q) = 1$ ถ้า $p \neq q$;

$p,q \in M$ จงหาเนเบอร์ฮูด

ถ้า $\varepsilon \leq 1$

$$\begin{aligned} N(p,\varepsilon) &= \{q/d(p,q) < \varepsilon\} \\ &= \{q/d(p,q) < 1\} \\ &= \{q/d(p,q) = 0\} \\ &= \{p\} \end{aligned}$$

ถ้า $\varepsilon > 1$

$$\begin{aligned} N(p,\varepsilon) &= \{q/d(p,q) < \varepsilon\} \\ &= \{q/d(p,q) = 0 \text{ และ } d(p,q) = 1\} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ถ้า $\varepsilon \leq 1$ จะได้ว่า $N(p,\varepsilon) = \{p\}$ แต่ถ้า $\varepsilon > 1$ จะได้ว่า $N(p, \varepsilon) = M$

<u>นิยาม 5.2.2</u> ให้ $< M, d >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท ซึ่ง p เป็นจุดในเซ็ท M และ ε เป็นจำนวนจริงบวก ดีลีตเนเบอร์ฮูด (deleted neighborhood) ของจุด p ซึ่งมีรัศมียาว ε เขียนแทนด้วย $N'(p, \varepsilon)$ มีความหมายดังนี้

$$N'(p, \varepsilon) = \{q \in M / 0 < d(p, q) < \varepsilon\}$$

จากนิยามจะได้ว่า ดีลีตเนอบอร์ฮูด $N'(p, \varepsilon)$ ก็คือเนเบอร์ฮูดซึ่ง $p \notin N'(p, \varepsilon)$ ดังนั้น $N'(p, \varepsilon) = N(p,\varepsilon) - \{p\}$ และ $N'(p, \varepsilon)$ มีสมาชิกน้อยกว่า $N(p, \varepsilon)$ หนึ่งตัว

<u>นิยาม 5.2.3</u> ให้ E เป็นสับเซ็ทของเมตริกซ์เซ็ท $< M, d >$ จุด p จะเรียกว่าจุดภายใน (interior point) ของ E ถ้ามีเนเบอร์ฮูด $N(p,\varepsilon)$ ซึ่ง $N(p, \varepsilon) \subseteq E$

จุด q จะเรียกว่าจุดภายนอก (exterior point) ของ E ถ้ามีเนเบอร์ฮูด $N(q, \varepsilon)$ ซึ่ง $N(q, \varepsilon) \subseteq M - E$

จุด r จะเรียกว่าจุดที่ขอบ (boundary point) ของ E ถ้าเนเบอร์ฮูด $N(r, \varepsilon)$ ทุกตัวมีทั้งจุดที่เป็นสมาชิกของ E และจุดที่เป็นสมาชิกของ $M-E$ บรรจุอยู่

จากนิยามจะเห็นว่า จุดภายนอกของ E จะเป็นจุดภายในของ $M-E$ และจุดที่ขอบของเซ็ท E ก็จะเป็นจุดที่ขอบของเซ็ท $M-E$

สำหรับคำว่า "เนเบอร์ฮูด $N(p, \varepsilon)$ ทุกตัว มีทั้งจุดที่เป็นสมาชิกของ E และจุดที่เป็นสมาชิกของ $M - E$ บรรจุอยู่" หมายถึงเมื่อสร้างเนเบอร์ฮูด ε จะมีค่าเท่าไรก็ได้ แต่ต้องมากกว่าศูนย์ขึ้นไป จุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E และ $M - E$ ต้องอยู่ใน $N(p, \varepsilon)$ เสมอ

ใช้ int (A) แทนเซ็ทของจุดภายในของเซ็ท A bd (A) แทนเซ็ทของจุดที่ขอบของ A และ ext (A) แทนเซ็ทของจุดภายนอกของ A

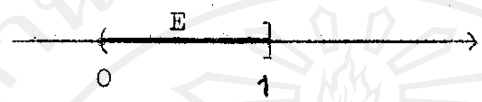
<u>ตัวอย่าง 5.2.4</u> ถ้า $E \subset E^1$ และ $E = \{x \mid 0 < x \leq 1\}$

จะได้ว่า $\operatorname{int}(E) = (0, 1)$

และ $\operatorname{bd}(E) = \{0, 1\}$

และ $\operatorname{ext}(E) = E^1 - [0,1] = \{x/x > 1\} \cup \{x/x < 0\}$

(ดูรูปที่ 5.2.3)



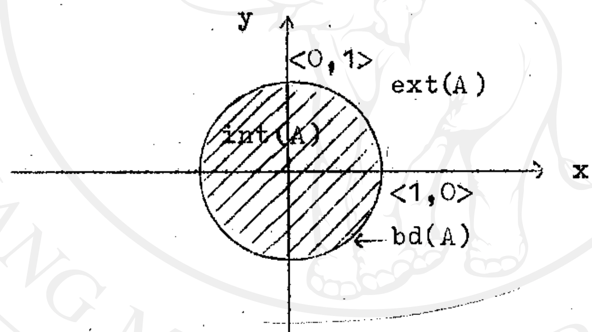
รูปที่ 5.2.3

<u>ตัวอย่าง 5.2.5</u> ถ้า $A \subset E^2$ และ $A = \{ <x,y> / x^2 + y^2 \leq 1\}$

จะได้ว่า $\operatorname{int}(A) = \{<x,y> / x^2 + y^2 < 1\}$

และ $\operatorname{bd}(A) = \{<x,y> / x^2 + y^2 = 1\}$

และ $\operatorname{ext}(A) = \{<x,y> / x^2 + y^2 > 1\}$ (ดูรูปที่ 5.2.4)



รูปที่ 5.2.4

<u>ตัวอย่าง 5.2.6</u> ถ้า $Q \subset E^1$ และ $Q = \{x \mid x$ เป็นจำนวนตักยะ $\}$

จะเห็นว่าเนเบอร์ฮูด $N(p, \varepsilon)$ ทุกตัว เมื่อ $p \in Q$ จะมีจุดซึ่งเป็นสมาชิกของจำนวนตักยะ และจำนวนอตักยะอยู่ด้วยเสมอ ดังนั้น

$\operatorname{int}(Q) = \emptyset$

$\operatorname{ext}(Q) = \emptyset$

และ $\operatorname{bd}(Q) = E^1$

เราจะเห็นว่า เซ็ทของจุดภายในของเซ็ทใด ๆ ต้องเป็นสับเซ็ทของเซ็ทนั้น ($int(E) \subset E$) และสำหรับจุดใด ๆ ในเซ็ท อาจจะเป็นจุดภายใน จุดภายนอก หรือจุดที่ขอบของเซ็ท กรณีใดกรณีหนึ่งก็ได้

5.3 <u>เซ็ทเปิดและเซ็ทปิด</u> (Open sets and Closed sets)

<u>นิยาม 5.3.1</u> ให้ E เป็นสับเซ็ทของ $< M, d >$ จะเรียก E ว่าเซ็ทปิด (closed set) ก็ต่อเมื่อ จุดที่ขอบของ E ทั้งหมดบรรจุอยู่ใน E และจะเรียก E ว่าเซ็ทเปิด (open set) ก็ต่อเมื่อ ไม่มีจุดที่ขอบของ E บรรจุอยู่ใน E

สำหรับเซ็ทเปิดนั้นอาจให้ความหมายได้อีกว่า จุดทุกจุด (p) ของเซ็ท E จะเป็นจุดภายในของเซ็ท E หรือมีเนเบอร์ฮูดของจุด p เป็นสับเซ็ทของ E นั่นคือ $N(p, \varepsilon) \subset E$

จากตัวอย่าง 5.2.4 $E = \{x \in R / 0 < x \leq 1\}$

ได้ว่า $bd(E) = \{0,1\}$

ซึ่ง $0 \notin E$ แต่ $1 \in E$

$\therefore$ E ไม่เป็นทั้งเซ็ทเปิดและเซ็ทปิด

จากตัวอย่าง 5.2.5 $A = \{ <x, y> / x^2 + y^2 \leq 1\}$

ได้ว่า $bd(A) = \{ <x,y> / x^2 + y^2 = 1\}$

ซึ่ง $bd(A) \subset A$

$\therefore$ A เป็นเซ็ทปิด

<u>ตัวอย่าง 5.3.1</u> ถ้า $A \subset E^1$ และ $A = \{x / 0 \leq x \leq 1\}$

จะได้ว่า $int(A) = (0,1)$

$bd(A) = \{0,1\}$

แต่ $bd(A) \subset A$

$\therefore$ A เป็นเซ็ทปิด

<u>ตัวอย่าง 5.3.2</u> ถ้า $A \subset E^2$ และ $A = \{ < x,y > / x^2 + y^2 < 1\}$

จะได้ว่า $\text{int}(A) = \{< x,y >/ x^2 + y^2 < 1\}$

และ $\text{bd}(A) = \{< x,y > / x^2 + y^2 = 1\}$

และ $\text{ext}(A) = \{ < x,y > / x^2 + y^2 > 1\}$

แต่ $\text{int}(A) = A$

$\therefore$ A เป็นเซ็ทเปิด

สำหรับในเมตริกซ์เซ็ทนั้น เนเบอร์ฮูดทุกตัวจะเป็นเซ็ทเปิด ส่วนใน E^1 ช่วงเปิดเป็นเซ็ทเปิด และช่วงปิดเป็นเซ็ทปิด

<u>ทฤษฎี 5.3.2</u> คอมพลิเมนต์ของเซ็ทเปิดเป็นเซ็ทปิด และคอมพลิเมนต์ของเซ็ทปิดเป็นเซ็ทเปิด

<u>พิสูจน์</u> 1) ให้ A เป็นเซ็ทเปิด ดังนั้นคอมพลิเมนต์ของเซ็ทเปิดได้แก่ M - A

เซ็ท A และ M-A มีเซ็ทของจุดที่ขอบร่วมกัน

เนื่องจาก A เป็นเซ็ทเปิด $\therefore$ A ไม่มีจุดที่ขอบของ A บรรจุอยู่

ดังนั้นเซ็ทของจุดที่ขอบทั้งหมดบรรจุอยู่ใน M-A $\therefore$ M-A เป็นเซ็ทปิด

2) ให้ A เป็นเซ็ทปิด

$\therefore$ เซ็ทของจุดที่ขอบทั้งหมดบรรจุอยู่ใน A

ดังนั้น M- A ไม่มีจุดที่ขอบของ M-A บรรจุอยู่

$\therefore$ M- A เป็นเซ็ทเปิด

ใน E^1, $A = (0,1)$ เป็นเซ็ทเปิด ถ้า A "ไม่ใช่เซ็ทเปิด" ดังนั้น $A = [0,1)$, $A = (0, 1]$ ซึ่งไม่เป็นทั้งเซ็ทเปิดและเซ็ทปิด หรือ $A = [0, 1]$ จะเห็นว่าต่างกับคำว่า "คอมพลิเมนต์"

5.4 จุดลิมิตของเซ็ท (Limit points of set)

นิยาม 5.4.1 ให้ E เป็นสับเซ็ทของ $< M, d >$ และจุด $p \in M$ จะเรียกจุด p ว่า จุดลิมิต (limit point) ของ E ถ้าดีลีดเนเบอร์ฮูด - $N'(p, \varepsilon)$ ของจุด p ทุกตัว มีจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E บรรจุอยู่ นั่นก็คือ

$$N'(p, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$$

หรือกล่าวว่า p เป็นจุดลิมิตของ E ถ้าทุก ๆ เนเบอร์ฮูด $N(p, \varepsilon)$ ของจุด p มีจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E บรรจุอยู่ นอกจากจุด p สำหรับจุด p ซึ่งเป็นจุดลิมิตของ E จะเป็นจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E หรือไม่เป็นสมาชิกของ E ก็ได้ ถ้า $p \in E$ เรียกว่าจุดลิมิตของตัวเอง

จากตัวอย่าง 5.2.4 $\quad E = \{x \in R \ / \ 0 < x \leq 1\}$

เซ็ทของจุดลิมิตของ $E = \{x \ / \ 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]$

จากตัวอย่าง 5.2.5 $\quad A = \{ < x,y > / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

เซ็ทของจุดลิมิตของ $A = A$

ทฤษฎี 5.4.2 ถ้า p เป็นจุดลิมิตของ E ใน $< M, d >$ จะได้ว่า เนเบอร์ฮูด - $N(p, \varepsilon)$ ของจุด p ทุกตัว จะมีจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E เป็นจำนวนอนันต์ (infinitely many points) บรรจุอยู่

พิสูจน์ สมมติว่ามีจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E จำนวนจำกัดบรรจุอยู่ในเนเบอร์ฮูด - $N(p, \varepsilon)$ ซึ่งก็คือ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

ดังนั้น $a_1, a_2, \ldots, a_n$ บรรจุอยู่ในดีลีดเนเบอร์ฮูด $N'(p, \varepsilon)$

ให้ $\varepsilon' = \min\{d(p,a_1), d(p, a_2), \ldots, d(p, a_n)\}$

จะได้ว่า $\varepsilon' > 0$

$\therefore$ $N(p, \varepsilon')$ จะไม่บรรจุจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E

ดังนั้น $N'(p, \varepsilon')$ จะไม่บรรจุจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E เช่นกัน

∴ p ไม่ใช่จุดลิมิตของ E

ซึ่งขัดแย้งกับข้อความข้างต้น

∴ มีจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E จำนวนอนันต์บรรจุอยู่ใน $N(p, \varepsilon)$

<u>ทฤษฎี 5.4.3</u> เซ็ทปิดคือเซ็ทที่มีจุดลิมิตของตัวเองทั้งหมดบรรจุอยู่

พิสูจน์ ให้ E เป็นเซ็ทปิด และ p เป็นจุดลิมิตใด ๆ ของ E

∴ เนเบอร์ฮูด $N(p, \varepsilon)$ ของจุด p ทุกตัว จะมีจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E จำนวนอนันต์บรรจุอยู่

ดังนั้น p ไม่ใช่จุดภายใน (interior point) ของ M-E

หรือ p ไม่ใช่จุดภายนอก ของ E

∴ p ต้องเป็นจุดภายในหรือจุดที่ขอบของ E กรณีใดกรณีหนึ่ง ไม่ว่า p จะเป็นจุดภายในหรือจุดที่ขอบของ E

จะได้ $p \in E$ ∵ E เป็นเซ็ทปิด

<u>ทฤษฎี 5.4.4</u> เซ็ทที่มีจุดลิมิตของตัวเองบรรจุอยู่ทั้งหมดคือเซ็ทปิด

พิสูจน์ ให้ E เป็นสับเซ็ท $< M, d >$ ซึ่งจุดลิมิตของตัวเองทั้งหมดบรรจุอยู่ และให้ p เป็นจุดที่ขอบของ E (ต้องพิสูจน์ว่า $p \in E$)

ถ้า p เป็นจุดลิมิตของ E จะได้ว่า $p \in E$ (จากสมมุติฐาน)

ถ้า p ไม่เป็นจุดลิมิตของ E ดังนั้นจะมีดีลีตเนเบอร์ฮูด $N'(p, \varepsilon)$ ของจุด p ซึ่ง $N'(p, \varepsilon) \cap E = \emptyset$

จุดที่อยู่ในเนเบอร์ฮูด $N(p, \varepsilon)$ และจะเป็นสมาชิกของ E ได้แก่จุด p (เนื่องจาก p เป็นจุดที่ขอบของ E)

∴ เนเบอร์ฮูด $N(p, \varepsilon)$ ทุกตัว จะมีจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ E บรรจุอยู่

นั่นคือ $N(p, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$

$\therefore N(p, \varepsilon) \cap E = \{p\}$

$\therefore p \in E$

จากทฤษฎี 5.4.2 และ 5.4.3 เราอาจให้นิยามของเซ็ทปิดว่า "เซ็ท E จะเป็นเซ็ทปิด ก็ต่อเมื่อ E มีจุดลิมิทของตัวเองทั้งหมดบรรจุอยู่

<u>นิยาม 5.4.5</u> ให้ E เป็นสับเซ็ทของ $< M, d >$ จะเรียกเซ็ท E ว่า บาวด์ - (bounded) ก็ต่อเมื่อมีเนเบอร์ฮูด $N(p, \varepsilon)$ ของจุด p เป็นสมาชิกของ M และ $E \subset N(p, \varepsilon)$ โดยที่ $p \notin E$

<u>ทฤษฎี 5.4.6</u> ให้ $< M, d >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท จะได้ว่า

ก. ϕ เป็นเซ็ทเปิด

ข. M เป็นเซ็ทเปิด

ค. ถ้า $O_1, O_2, \ldots, O_n$ เป็นเซ็ทเปิด จะได้ว่า $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ เป็นเซ็ทเปิด

ง. ถ้า $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นกลุ่มของเซ็ทเปิดจะได้ว่า $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ เป็นเซ็ทเปิด

พิสูจน์ ก. ϕ เป็นเซ็ทเปิด

เนื่องจากไม่มีจุดซึ่งเป็นสมาชิกของ ϕ จะได้ว่าประโยคต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ ถ้า $x \in \emptyset$ และ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $N(x,\varepsilon) \subset \emptyset$

$\therefore \phi$ เป็นเซ็ทเปิด

ข. M เป็นเซ็ทเปิด

ถ้า $x \in M$ และ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $N(x, \varepsilon) \subset M$

$\therefore$ M เป็นเซ็ทเปิด

ค. ถ้า $O_1, O_2, \ldots, O_n$ เป็นเซ็ทเปิด จะได้ว่า $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ เป็นเซ็ทเปิด

ให้ $H = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$

สำหรับ x ใด ๆ $x \in H$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N_i(x, r_i)$ ของจุด x ซึ่ง $N_i(x, r_i) \subset O_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

ให้ $r = \min (r_1, r_2, \ldots, r_n)$

และ $N(x, r)$ เป็นเนเบอร์ฮูดของจุด x

จะได้ว่า $N(x, r) \subset O_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$\therefore$ $N(x, r) \subset H$

นั่นคือ x เป็นจุดภายในของ H

$\therefore$ H เป็นเซ็ทเปิด

ง. ถ้า $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นกลุ่มของเซ็ทเปิด จะได้ว่า $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ เป็นเซ็ทเปิด

ให้ $\{O_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นกลุ่มของเซ็ทเปิด และ $x \in \bigcup_{a \in I} O_\alpha$

จะได้ว่า, $x \in O_\alpha$ สำหรับ α บางตัว

$\because$ O_α เป็นเซ็ทเปิด ดังนั้นจะมี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $N(x, \varepsilon) \subset O_\alpha$

และจะได้ว่า $N(x, \varepsilon) \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$

ดังนั้น $\bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$ เป็นเซ็ทเปิด

<u>ตัวอย่าง 5.4.1</u> ให้ $O_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $(n = 1, 2, \ldots)$

ซึ่ง O_n แต่ละตัวเป็นเซ็ทเปิดใน E^1

$$O = \bigcap_{n=1}^{\alpha} O_n = \{0\}$$ ซึ่งไม่ใช่เซ็ทเปิดใน E^1

ดังนั้นจากทฤษฎี 5.4.6 ข้อ ค. ในกลุ่มของเซ็ทเปิดจำนวนอนันต์ - อินเตอร์เซคชั่นของทั้งหมดจะไม่เป็นเซ็ทเปิด

<u>ทฤษฎี 5.4.7</u> ให้ $< M, d >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท จะได้ว่า

ก. ϕ เป็นเซ็ทปิด

ข. M เป็นเซ็ทปิด

ค. ถ้า $F_1, F_2, \ldots, F_n$ เป็นเซ็ทปิด จะได้ว่า $\bigcup\limits_{n=1}^{n} F_i$ เป็นเซ็ทปิด

ง. ถ้า $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นกลุ่มของเซ็ทปิด จะได้ว่า $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ เป็นเซ็ทปิด

พิสูจน์ ก. ϕ เป็นเซ็ทปิด

จากทฤษฎี 5.4.6 M เป็นเซ็ทเปิด

แต่ $M-M = \emptyset$

$\therefore$ ϕ เป็นเซ็ทปิด (ทฤษฎี 5.3.2)

ข. M เป็นเซ็ทปิด

จากทฤษฎี 5.4.6 ϕ เป็นเซ็ทเปิด

แต่ $M-\emptyset = M$

$\therefore$ M เป็นเซ็ทปิด (ทฤษฎี 5.3.2)

ค. ถ้า $F_1, F_2, \ldots, F_n$ เป็นเซ็ทปิด จะได้ว่า $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ เป็นเซ็ทปิด

ให้ $B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

และให้ p เป็นจุดลิมิตของ B

∴ สำหรับดีลีดเนเบอร์ฮูด $N'(p, \varepsilon)$ ของจุด p ทุกตัวจะได้ว่า

$N'(p, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$

แต่ $B \subset F_i$ สำหรับ i บางตัว

และ ∴ สำหรับ i บางตัว $N'(p, \varepsilon) \cap F_i \neq \emptyset$

∴ p เป็นจุดลิมิตของ F_i บางตัว

ดังนั้น $p \in F_i$ บางตัว เนื่องจาก F_i ทุกตัวเป็นเซ็ทปิด

∴ $p \in \bigcup_{i=1}^{n} F_i = B$

ดังนั้น B มีจุดลิมิตของตัวเองบรรจุอยู่ทั้งหมด

∴ B เป็นเซ็ทปิด

ง. ถ้า $\{F_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นกลุ่มของเซ็ทปิด จะได้ว่า $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ เป็นเซ็ทปิด

ให้ $F = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$

และให้ p เป็นจุดลิมิตของ F

∴ สำหรับดีลีดเนเบอร์ฮูด $N'(p, \varepsilon)$ ของจุด p ทุกตัวจะได้ว่า $N'(p, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$

แต่ $F \subset F_\alpha$ สำหรับ F_α ทุกตัว

และ ∴ สำหรับ F_α ทุกตัว $N'(p, \varepsilon) \cap F_\alpha \neq \emptyset$

∴ p เป็นจุดลิมิตของ F_α ทุกตัว

ดังนั้น $p \in F_\alpha$ ทุกตัว เนื่องจาก F_α ทุกตัวเป็นเซ็ทปิด

∴ $p \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = F$

ดังนั้น F มีจุดลิมิตของตัวเองบรรจุอยู่ทั้งหมด

∴ F เป็นเซ็ทปิด

<u>ตัวอย่าง 5.4.2</u> ให้ $F_n = [1/n,\ 1 - 1/n]$; n = 1,

ซึ่ง F_n แต่ละตัวเป็นเซ็ทปิดใน E^1

$$F = \bigcup_{n=1}^{\alpha} [1/n,\ 1-1/n] = [1,0)$$ ซึ่งไม่ใช่เซ็ทปิดใน E^1

ดังนั้นจากทฤษฎี 5.4.7 ข้อ ค. ในกลุ่มของเซ็ทปิดจำ[illegible] ของทั้งหมดจะไม่เป็นเซ็ทปิด

<u>นิยาม 5.4.8</u> A, B เป็นสับเซ็ทของ < M, d > A, B [illegible] พาเรท (separated) ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \emptyset$ และ [illegible] ไม่มีจุดลิมิตของ B บรรจุอยู่ B ไม่มีจุดลิมิตของ A บรรจุอยู่

S เป็นสับเซ็ทของ < M, d> S จะเรียกว่า[illegible] (connected) ก็ต่อเมื่อ $S \neq A \cup B$ เมื่อ A, B เป็น[illegible] และ $A, B \neq \emptyset$

<u>ตัวอย่าง 5.4.3</u> A' แทนเซ็ทของจุดลิมิตของ A ทั้งหมด

B' แทนเซ็ทของจุดลิมิตของ B ทั้งหมด

ใน E^1 ถ้า $A = [0, 5)$, $B = (5, 8]$

จะได้ว่า $A' = [0, 5]$, $B' = [5, 8]$

จะได้ว่า $A \cap B = \emptyset$

$A \cap B' = \emptyset$ ดังนั้น A ไม่มีจุดลิมิตของ B บรรจุอยู่

$A' \cap B = \emptyset$ ดังนั้น B ไม่มีจุดลิมิตของ A บรรจุอยู่

$\therefore$ A และ B เป็นเซ็ทที่เซพพาเรท

ถ้า $A = [0, 5]$, $B = (5, 8]$

$A' = [0, 5]$, $B' = [5, 8]$

$A \cap B' = \{5\}$

$\therefore$ A และ B ไม่เป็นเซ็ทที่เซพพาเรท

สำหรับเซ็ทที่คอนเนคที่ไม่ใช่เซ็ทว่าง ใน E^1 ได้แก่

ก. จุด

ข. ช่วง เช่น (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$, $(-\alpha, b)$, $(-\alpha, b]$, (a, α), $[a, \alpha)$

<u>นิยาม 5.4.9</u> ถ้า $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นกลุ่มของเซ็ท ซึ่งเป็นสับเซ็ทใน $< M, d >$ จะเรียก A ว่าโคเวอร์ (covering) เซ็ท E ก็ต่อเมื่อ -

$$E \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

ถ้า $\{A_i\}_{i \in I}$ เป็นกลุ่มของเซ็ทเปิด ซึ่ง $E \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ เรียก A ว่าโคเวอร์เปิด (open covering) ของเซ็ท E และถ้าเซ็ทดรรชนี (I) เป็นจำนวนจำกัด เรียก $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ว่าโคเวอร์จำกัด (finite covering) ของ E

<u>ตัวอย่าง 5.4.4</u> ถ้า $E = (0, 1)$ ให้ $A = \{A_n = (\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}) / n \in N\}$ จะได้ว่า A เป็นโคเวอร์เปิดของเซ็ท E นั่นคือ

$$A \subset (\tfrac{1}{3}, 1) \cup (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{3}) \cup \ldots$$ เป็นโคเวอร์อนันต์

ถ้า $E = (1,3)$ ให้ $A = \{(0,2), (1,3), (2,4)\}$

จะได้ว่า A เป็นโคเวอร์เปิดของ E และเป็นโคเวอร์จำกัด

<u>นิยาม 5.4.10</u> ให้ K เป็นสับเซ็ทของ $< M, d >$ จะเรียก K ว่าคอมแพคต์ - (compact) ก็ต่อเมื่อ โคเวอร์เปิดทุกเซ็ทของ K ซึ่ง -

$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ มีเซ็ทจำกัด $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subset I$

ซึ่ง $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_{\alpha_i}$

ถ้า $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นโคเวอร์ของ K และ $B \subset I$ ซึ่ง $K \subset \bigcup_{\alpha \in B} A_\alpha$ จะเรียก $\{A_\alpha\}_{\alpha \in B}$ ว่าโคเวอร์ย่อย (subcovering) ของ K และถ้า B มีจำนวนจำกัด เรียก $\{A_\alpha\}_{\alpha \in B}$ ว่าโคเวอร์ย่อยจำกัด (finite open subcovering) จะเห็นว่าโคเวอร์ย่อยของ K ก็คือโคเวอร์ของ K นั่นเอง ดังนั้นจากนิยามของคอมแพคต์ กล่าวได้อีกว่า "เซ็ท K จะเป็นคอมแพคต์ ก็ต่อเมื่อ โคเวอร์เปิดของ K ทุกตัวจะมีโคเวอร์ย่อยจำกัด (finite subcovering)

<u>ตัวอย่าง 5.4.5</u> จงพิสูจน์ว่า (0, 1] ไม่คอมแพคต์

วิธีทำ ให้ $K = (0, 1]$ และให้ $A_n = (1/n, 2)$ สำหรับ $n \in I^+$ ทุกตัว จากบทแทรก 3.7.11 ถ้า $0 < x \leq 1$ จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $1/n < x$

ดังนั้น $x \in A_n$

และ $K \subset \bigcup_{n=1}^{\alpha} A_n$

ถ้าเราเลือกเซ็ทจำกัด $n_1, n_2, \ldots, n_r$ จากจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$\bigcup_{i=1}^{r} A_{n_i} = A_{n_o}$$

ซึ่ง $n_o = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$

ดังนั้น $1/n_o \leq 1/n_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$

และ $K \not\subset A_{n_o} = (1/n_o , 2)$

จะเห็นว่าโคเวอร์เปิด $\{A_n\}_{n \in I}$ ของ K ไม่มีโคเวอร์ย่อยจำกัด

ดังนั้น K ไม่คอมแพคต์

$n = \max\{n_1, x_2, \ldots, n_r\}$ หมายถึง n เป็นค่าที่เท่ากับตัวที่มากที่สุดในเซ็ท $\{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$

<u>นิยาม 5.4.11</u> เซ็ท K เป็นสับเซ็ท E^1 K คอมแพคต์ก็ต่อเมื่อ K เป็นเซ็ทปิด และบาวด์

จะเห็นว่าใน E^1 ช่วงปิดเป็นคอมแพคต์ และ $(0, 1]$ ในตัวอย่าง 5.2.4 เป็นเซ็ทที่บาวด์ แต่ไม่ใช่เซ็ทปิด $(0,1)$ ไม่คอมแพคต์เนื่องจากไม่ใช่เซ็ทปิด

<u>แบบฝึกหัดชุด 5.2, 5.3 และ 5.4</u>

1. ใน E^1 ถ้า $I = [a, b]$
   ใน E^2 ถ้า $A = \{< x,y >/ x^2 + 4y^2 \leq 4\}$ จงเขียนกราฟ และจงหา
   1.1 int (I), int (A)
   1.2 ext(I), ext (A)
   1.3 bd (I), bd(A)
   1.4 เซ็ทของจุดลิมิตของ I และ A
   1.5 I และ A เป็นเซ็ทเปิดหรือไม่
   1.6 I และ A เป็นเซ็ทปิดหรือไม่
2. ใน E^1 ถ้า A เป็นเซ็ทจำนวนเต็มบวก
   2.1 จงพิสูจน์ว่า A ไม่มีจุดลิมิต
   2.2 จงหา ext (A) และ int (A)
   2.3 A เป็นเซ็ทเปิดหรือไม่
   2.4 A เป็นเซ็ทปิดหรือไม่
3. ใน E^1 ถ้า $x \in R$ จะได้ว่า $\{x\}$ เป็นสับเซ็ทปิดของ R
4. ใน E^1 จงอธิบายว่าแต่ละข้อต่อไปนี้ ข้อไหนเป็นเซ็พพาเรทเซ็ท
   (ก) ช่วง $(0, 1)$ และ $(1, 2)$
   (ข) ช่วง $(0, 1]$ และ $(1, 2)$
   (ค) ช่วง $[0, 1]$ และ $[1, 2)$
   (ง) เซ็ทของจำนวนตักยะและจำนวนอตักยะ
5. ใน E^1 ถ้า D เป็นเซ็ทจำนวนตักยะบวก จงแสดงว่า D ไม่เป็นทั้งเซ็ทปิดและเซ็ทเปิด และพิสูจน์ว่า D ไม่คอนเนค

6. จงพิสูจน์ว่า เซ็ทของจำนวนเต็มบวกไม่คอมแพคต์

7. ให้ A, B เป็นสับเซ็ทของเมตริกซ์เซ็ท $< M, d >$ ซึ่ง $B \subseteq A$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า p เป็นจุดลิมิตของ B จะได้ว่า p เป็นจุดลิมิตของ A

8. ถ้า C เป็นคอมแพคต์เซ็ทใน E^1 ให้ $M = \sup C$ และ $m = \inf C$ จงพิสูจน์ว่า M, m เป็นสมาชิกของ C

. . .

5.5 <u>ซีเควนซ์ของจำนวนจริง</u> (Sequence of Real number)

<u>นิยาม 5.5.1</u> ซีเควนซ์ $A = \{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ใน E^1 คือฟังก์ชั่นจากจำนวนเต็มบวกไปสู่ E^1 $(A : I^+ \dashrightarrow E^1)$

จากนิยาม จำนวนจริง a_n $(n = 1,2,3,\ldots)$ นั้นได้มาจากฟังก์ชั่น $A(n) = a_n$ เรียก a_n ว่าพจน์ (term) ที่ n ของซีเควนซ์ การเขียนสัญลักษณ์แทนซีเควนซ์ เราใช้พจน์ที่ n แทน เช่น ซีเควนซ์ ซึ่งพจน์ที่ n คือ 1/n เขียนแทนด้วย $\{1/n\}_{n=1}^{\alpha}$ ซึ่งจะได้ว่าเทอมที่ห้าของซีเควนซ์ได้แก่ 1/5 เทอมที่สิบได้แก่ 1/10 เป็นต้น หรือถ้า O_n แทนพจน์ที่ n ของจำนวนเต็มคี่ เขียนเป็นซีเควนซ์ได้ว่า $\{O_n\}_{n=1}^{\alpha}$

<u>ตัวอย่าง 5.5.1</u> ซีเควนซ์ $A = \{a_n\}_{n=1}^{\alpha} = \{1/n\}_{n=1}^{\alpha}$

จะได้ว่า $A = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

<u>ตัวอย่าง 5.5.2</u> ให้ $f : I^+ \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $f(n) = (1 - 1/n)$ จะได้ว่า

$f(1), f(2), f(3), \ldots$ คือ $0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{1 - 1/n\}_{n=1}^{\alpha} = 0, 1/2, 2/3, 3/4, \ldots$

<u>ตัวอย่าง 5.5.3</u> ให้ $f : I^+ \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $f(n) = 2n - 1$ จะได้ว่า

ซีเควนซ์ $\{2n - 1\}_{n=1}^{\alpha} = 1,3,5,7,9,\ldots$

เรียกว่าซีเควนซ์จำนวนเต็มคี่

<u>ตัวอย่าง 5.5.4</u> ซีเควนซ์ $A = \{a_n\}_{n=1}^{\alpha} = \{\frac{1 + (-1)^n}{2}\}_{n=1}^{\alpha}$

จะได้ว่า $A = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$

<u>ตัวอย่าง 5.5.5</u> ซีเควนซ์ $N = \{n_i\}_{i=1}^{\alpha}$ เมื่อ $n \in I^+$

จะได้ว่า $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

N เป็นฟังชั่นจาก I^+ ไปสู่ I^+ ซึ่ง $N(i) < N(j)$

ถ้า $i < j$ และ $i, j \in I^+$

จะได้ว่า $N(i) = n_i$ เมื่อ $i \in I^+$

เรียก $N = \{n_i\}_{i=1}^{\alpha}$ ว่า ซีเควนซ์จำนวนเต็มบวก

<u>นิยาม 5.5.2</u> ถ้า $A = \{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ใน E^1 และ $N = \{n_i\}_{i=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์จำนวนเต็มบวก จะได้ว่า คอมโพสิทฟังชั่น $A \circ N$ เป็นซีเควนซ์ย่อย (subsequence) ของ A

จาก N เป็นซีเควนซ์จำนวนเต็มบวกได้ว่า $N: I^+ \dashrightarrow I^+$ และ A เป็นซีเควนซ์ใน E^1 ได้ว่า $A : I^+ \dashrightarrow E^1$ ดังนั้น $A \circ N : I^+ \dashrightarrow E^1$

และสำหรับ $i \in I^+$ เราได้ $N(i) = n_i$

$$
\begin{aligned}
\text{แต่} \quad A \circ N(i) &= A\,[N(i)] \\
&= A(n_i) \\
&= a_{n_i}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $A \circ N = \{a_{n_i}\}_{i=1}^{\alpha}$

จากซีเควนซ์ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ซีเควนซ์ย่อยได้แก่ $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ จะเห็นว่าซีเควนซ์ย่อยก็ได้มาจากซีเควนซ์ โดยการตัดบางพจน์ของซีเควนซ์ออกไป แล้วนำพจน์ที่เหลือมากำหนดลำดับใหม่ เช่น เป็น $n_1, n_2, n_3, \ldots$ ซึ่งพจน์ก็ยังมีจำนวนอนันต์อยู่

<u>ตัวอย่าง 5.5.6</u> ถ้า $A = \{a_n\}_{n=1}^{\alpha} = \{1/n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ใน E^1

และ $N = \{n_i\}_{i=1}^{\alpha} = \{i^2\}_{i=1}^{\alpha}$

จะได้ว่า $A \circ N(i) = A\left[N(i)\right]$

$A \circ N(i) = A(i^2)$

$A \circ N(i) = 1/i^2$

$\therefore \; A \circ N = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \ldots$

หรือเขียนได้อีกว่า

$A = 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, \ldots$

$N = 1, \quad 4, \quad 9, \ldots$

$A \circ N = 1, 1/4, 1/9, 1/16, \ldots$

จาก $A = \{1/n\}_{n=1}^{\alpha}$

ถ้า $N_1 = \{2i\}_{n=1}^{\alpha}$

และ $N_2 = \{2^i\}_{i=1}^{\alpha}$

$\therefore \; A \circ N_1(i) = A(2i) = 1/2i$

$\therefore \; A \circ N_1 = 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \ldots$

และ $A \circ N_2(i) = A(2^i) = 1/2^i$

$\therefore \; A \circ N_2 = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots$

จาก $A \circ N_1$ เขียนแผนภาพได้ว่า

$$A = 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, \ldots$$

$$N_1 = 2, 4, 6, 8, \ldots$$

$$\therefore A \circ N_1 = 1/2, 1/4, 1/6, 1/8, \ldots$$

จาก $A \circ N_2$

$$A = 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, \ldots, 1/16, \ldots$$

$$N_2 = 2, 4, 8, 16, \ldots$$

$$\therefore A \circ N_2 = 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots$$

<u>ตัวอย่าง 5.5.7</u> ใน E^1 ให้ซีเควนซ์ $A = \{\frac{1 + (-1)^n}{2}\}_{n=1}^{\alpha}$

ถ้า $N_1 = \{2i - 1\}_{i=1}^{\alpha}$

$N_2 = \{2i\}_{i=1}^{\alpha}$

$$A \circ N_1(i) = \frac{1 + (-1)^{2i-1}}{2} \quad ; i = 1, 2, \ldots$$

$$A \circ N_1 = 0, 0, 0, \ldots$$

$$A \circ N_2(i) = \frac{1 + (-1)^{2i}}{2} \quad ; i = 1, 2, \ldots$$

$$A \circ N_2 = 1, 1, 1, \ldots$$

จาก $A \circ N_1$ เขียนแผนภาพได้ว่า

$$A = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$$

$$N_1 = 1, 3, 5, \ldots$$

$$A \circ N_1 = 0, 0, 0, \ldots$$

และถ้า $A = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$

$N_2 = 2, 4, 6, \ldots$

$A \circ N_2 = 1, 1, 1, \ldots$

จะเห็นว่าแต่ละซีเควนซ์ เราสามารถสร้างซีเควนซ์ย่อยได้จำนวนมาก ขึ้นอยู่กับการให้ความหมายซีเควนซ์ N ซึ่งเป็นตัวบอกลำดับพจน์ในซีเควนซ์เดิม มาสร้างซีเควนซ์ใหม่

แบบฝึกหัด 5.5

1. ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ซึ่งมีความหมายดังนี้

$a_1 = 1$, $a_2 = 2$ และ $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ $(n = 3,4,5,\ldots)$

จงหา a_8, a_{15} (จำนวน a_n เรียกว่า Fibonacci numbers)

2. จงเขียนพจน์ที่ n ของซีเควนซ์ต่อไปนี้

2.1) $2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \ldots$

2.2) $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

2.3) $1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6, \ldots$

2.4) $1, -4, 9, -16, 25, -36, \ldots$

2.5) $0, -1/2, 2/3, -3/4, 4/5, \ldots$

2.6) $1, -2/3, 3/7, -4/15, \ldots$

2.7) $\langle 0,1\rangle, \langle -1, 1/2\rangle, \langle 1, 2/3\rangle, \langle -1, 3/4\rangle \ldots$

3. 3.1) ถ้า $A = \{a_n\}_{n=1}^{\alpha} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\alpha}$ $N = \{i^4\}_{i=1}^{\alpha}$

จงหาซีเควนซ์ย่อย $A \circ N$

3.2) ถ้า $A = \{2n-1\}_{n=1}^{\alpha}$ และ $N = \{i^2\}_{i=1}^{\alpha}$

จงหา a_5, a_9, n_2, a_{n_3} และ ซีเควนซ์ย่อย $A \circ N$

4. ซีเควนซ์ในข้อ 2 เป็นซีเควนซ์ย่อยของ $\{n\}_{n=1}^{\alpha}$ หรือไม่

5. จากซีเควนซ์ $A = \{(-1)^{n-1}(2n-1)\}$ จงตรวจดูว่าซีเควนซ์ข้างล่างนี้เป็นซีเควนซ์ย่อยของ A หรือไม่ ถ้าเป็นจงเขียนพจน์ที่ n ของซีเควนซ์ย่อยนั้น

5.1 $\{1, 5, -3, -7, 9, 13, -11, -15, \ldots\}$

5.2 $-3, -7, -11, -15, -19, -23, \ldots$

5.3 $\{1, 5, 9, 13, \ldots\}$

5.6 <u>ลิมิตของซีเควนซ์</u> (Limit of a sequence)

จากซีเควนซ์ $A = \{a_n\}_{n=1}^{\alpha} = \{1/n\}_{n=1}^{\alpha}$ ซึ่ง $A = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$

ถ้าเขียนพจน์ของซีเควนซ์ A ขยายออกไปเรื่อย ๆ หรือ n มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ (n เข้าใกล้อนันต์) จะเห็นว่าซีเควนซ์ A เข้าใกล้จำนวนศูนย์ กรณีเช่นนี้กล่าวได้ว่า "ลิมิตของซีเควนซ์ A ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์คือศูนย์" หรือกล่าวว่า "ซีเควนซ์ A มีลิมิตเป็นศูนย์ ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์ และเขียนว่า $\lim_{n \to \alpha} a_n = 0$ ถ้าเราต้องการหาว่าตั้งแต่พจน์ที่เท่าไรของซีเควนซ์ ที่ทำให้ซีเควนซ์ต่างจากศูนย์ (หรือห่างจากศูนย์) น้อยกว่า .025 จะเห็นว่า ซีเควนซ์ตั้งแต่เทอมที่ 41 เป็นต้นไป จะต่างจากศูนย์น้อยกว่า .025 หรือจะกล่าวว่า ซีเควนซ์ตั้งแต่เทอมที่ 41 เป็นต้นไป จะอยู่ภายในช่วง $(0 - .025, 0 + .025)$ ต่อไปจะกล่าวถึงนิยามของลิมิต

<u>นิยาม 5.6.1</u> ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ใน E^1 กล่าวว่า a_n มีค่าเข้าใกล้ลิมิต b (ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์) ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมีจำนวนเต็มบวก J และ $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n \in N(b, \varepsilon)$

a_n มีค่าเข้าใกล้ลิมิต b (ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์) เขียนแทนด้วย $\lim_{n \to \alpha} a_n = b$ ถ้าไม่มี จำนวน b ใด ๆ ซึ่งมีคุณสมบัติดังกล่าว เรากล่าวว่าไม่มีลิมิตของ a_n เมื่อ n เข้าใกล้อนันต์

จาก $a_n \in N(b,\varepsilon)$ สำหรับใน E^1 เนเบอร์ฮูด $N(b, \varepsilon)$ คือ ช่วงเปิด $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ ดังนั้น $a_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ หรือ $|a_n - b| < \varepsilon$ จากคุณสมบัติของนิยามสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมีจำนวนเต็มบวก J และ $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n \in N(b,\varepsilon)$ หมายถึงว่าถ้ากำหนดค่า ε เราต้องหาว่าตั้งแต่พจน์ที่เท่าไรของซีเควนซ์ (จะมีจำนวนเต็มบวก J และ $n \geq J$) ที่ทำให้ซีเควนซ์เหล่านั้น(a_n) อยู่ในช่วงเปิด $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ นั่นเอง ถ้าสามารถแสดงได้เช่นนี้กล่าวว่าซีเควนซ์นี้มีลิมิต (exist) อันดับของพจน์(J) ของซีเควนซ์นั้นต้องขึ้นอยู่กับ (depend on) ค่าของ ε จำนวนพจน์ที่อยู่นอกช่วงเปิด $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ มีจำนวนจำกัด

ซีเควนซ์ $\{1/n\}_{n=1}^{\alpha}$ ถ้ากำหนด $\varepsilon = .025$ เราต้องการหาว่าตั้งแต่พจน์ที่เท่าไรที่ทำให้ซีเควนซ์เหล่านั้นอยู่ใน $(0-.025, 0+.025)$ ถ้า $n \geq 41$ จะได้ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{41} < .025$ หรือ $|a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{41} < .025$ ดังนั้นถ้า $\varepsilon = .025$ จะได้ $J = 41$ ที่สอดคล้องนิยาม

<u>ตัวอย่าง 5.6.1</u> ให้ $A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\alpha}$ จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n \to \alpha} a_n = 0$

<u>พิสูจน์</u> จาก $A = \{1/n\}_{n=1}^{\alpha}$ ได้ว่า $a_n = 1/n$

(ต้องพิสูจน์ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะต้องหาจำนวนเต็มบวก J ซึ่ง $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n \in N(0, \varepsilon)$)

$\because$ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น $1/\varepsilon \in R^+$

เลือก $J > \frac{1}{\varepsilon}$

$\therefore$ $1/J < \varepsilon$

แต่ $n \geq J$ $\therefore$ $1/n \leq 1/J$

ดังนั้น $1/n < \varepsilon$

แต่ $|a_n - 0| = a_n = 1/n < \varepsilon$

$\therefore$ $0 - \varepsilon < a_n < 0 + \varepsilon$

ดังนั้น $a_n \in N(0, \varepsilon)$ เมื่อ $J > 1/\varepsilon$

$$\therefore \lim_{n \to \alpha} a_n = 0$$

<u>ตัวอย่าง 5.6.2</u> ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha} = \{2n/(n+4n^{1/2})\}_{n=1}^{\alpha}$ จงพิสูจน์ว่า -

$$\lim_{n \to \alpha} a_n = 2$$

<u>พิสูจน์</u> (จะต้องพิสูจน์ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมีจำนวนเต็มบวก J ซึ่ง $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n \in N(2, \varepsilon)$)

จาก $\{2n/(n+4n^{1/2})\}_{n=1}^{\alpha}$ จะได้ว่า $a_n = 2n/(n + 4n^{1/2})$

ให้ $\varepsilon > 0$ จาก $a_n \in N(2,\varepsilon)$ ก็คือ $2n/(n + 4n^{1/2}) \in N(2,\varepsilon)$

ใน E^1 จะได้ว่า $\left|2n/(n + 4n^{1/2}) - 2\right| < \varepsilon$

$$\left|(2n - 2n - 8n^{1/2})/(n + 4n^{1/2})\right| < \varepsilon$$

$$\left|-8n^{1/2}/(n + 4n^{1/2})\right| < \varepsilon$$

$$\left|-8/(n^{1/2} + 4)\right| < \varepsilon$$

$$\therefore -\varepsilon < -8/(n^{1/2} + 4) < \varepsilon$$

จาก $-\varepsilon < 8/(n^{1/2} + 4)$

จะได้ว่า $n^{1/2} + 4 > \dfrac{8}{\varepsilon}$

$$n^{1/2} > \frac{8}{\varepsilon} - 4$$

$$\therefore n > \left(\frac{8}{\varepsilon} - 4\right)^2$$

ดังนั้น เลือก $J > \left(\dfrac{8}{\varepsilon} - 4\right)^2$

จะทำให้ $a_n \in N(2, \varepsilon)$

$$\therefore \lim_{n \to \alpha} a_n = 2$$

<u>ตัวอย่าง 5.6.3</u> ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha} = \{n\}_{n=1}^{\alpha}$ จงพิสูจน์ซีเควนซ์นี้ไม่มีลิมิต

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้มีลิมิต $\therefore \lim_{n \to \alpha} a_n = b$

ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมีจำนวนเต็มบวก J ซึ่ง $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n \in N(b,\varepsilon)$

ให้ $\varepsilon = 1$ จาก $a_n \in N(b,1)$ เมื่อ $n \geq J$

ใน E^1 $\therefore |a_n - b| < 1$ $n \geq J$

$b - 1 < a_n < b + 1$ $n \geq J$

$b - 1 < n < b + 1$; $a_n = n$, $n \geq J$

แสดงว่า n เป็นจำนวนที่บาวด์ ซึ่งขัดแย้งกับ $n \geq J$ ไม่บาวด์

$\therefore \{n\}_{n=1}^{\alpha}$ ไม่มีลิมิต

<u>ทฤษฎี 5.6.2</u> ซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ใน E^1 มีลิมิต (limit exist) เป็น b ก็ต่อเมื่อเนเบอร์ฮูดของ b ทุกตัว จะมีพจน์ของซีเควนซ์ทั้งหมด-จำนวนอนันต์บรรจุอยู่ ยกเว้นพจน์จำนวนจำกัดของซีเควนซ์ - (each neighborhood of b contains all but a finite number of term of the sequence)

<u>พิสูจน์</u> 1. สมมติซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ มีลิมิตเป็น b นั่นคือ $\lim_{n \to \alpha} a_n = b$

ให้ V เป็นเนเบอร์ฮูดของจุด b

จะมี $\varepsilon > 0$ ซึ่งเนเบอร์ฮูด $N(b,\varepsilon) \subset V$

จาก $\lim_{n \to \alpha} a_n = b$ ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก J ซึ่ง $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n \in N(b,\varepsilon) \subset V$

ดังนั้น สำหรับ $n \geq J$ จะได้ว่า $a_n \in V$

$\therefore$ เนเบอร์ฮูดของ b ทุกตัวจะมีพจน์ของซีเควนซ์ทั้งหมดจำนวนอนันต์บรรจุอยู่ ยกเว้นพจน์จำนวนจำกัด $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{J-1}$

2. สมมติว่าเนเบอร์ฮูดของ b ทุกตัว มีพจน์ของซีเควนซ์ทั้งหมด-จำนวนอนันต์บรรจุอยู่ ยกเว้นพจน์จำนวนจำกัดของซีเควนซ์

เลือก $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $N(b, \varepsilon)$ เป็นเนเบอร์ฮูดของ b ซึ่งมีพจน์ของซีเควนซ์ทั้งหมดจำนวนอนันต์บรรจุอยู่ ยกเว้นพจน์จำนวนจำกัดของซีเควนซ์

ดังนั้นมีเซ็ทจำกัด $T = \{n_1, n_2, \ldots, n_r\}$ ของจำนวนเต็มบวก

ซึ่ง $a_n \notin N(b, \varepsilon)$ จะได้ว่า $n \in T$

ให้ $J = \max(T) + 1$

ถ้า $n \geq J$ และ $n \notin T$ จะได้ว่า $a_n \in N(b,\varepsilon)$

$\therefore \{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ มีลิมิตเป็น b

จากทฤษฎี 5.6.2 ข้างต้น จะเห็นว่าลิมิตของซีเควนซ์จะเป็นจุดลิมิตในเซ็ทนั้น ซีเควนซ์ดังกล่าวต้องมีพจน์จำนวนอนันต์ที่แตกต่างกัน

ซีเควนซ์ $S = 1, 1, 1, \ldots$ มีลิมิตเป็น "1"

แต่ "1" ไม่ใช่จุดลิมิตของ S

<u>ทฤษฎี 5.6.3</u> ถ้าซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ใน E^1 มีลิมิตเป็น a และ b ตามลำดับ จะได้ว่า $a = b$

<u>พิสูจน์</u> สมมติว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ มีลิมิตเป็น a และ b โดยที่ $a \neq b$

จาก $\lim\limits_{n \to \alpha} a_n = a$ ดังนั้นเนเบอร์ฮูด $N(a, \varepsilon)$ จะมีพจน์ของ-ซีเควนซ์ทั้งหมดจำนวนอนันต์บรรจุอยู่ ยกเว้นพจน์จำนวนจำกัดของซีเควนซ์

จาก $\lim\limits_{n \to \alpha} a_n = b$ ดังนั้นจะมี $N(b, \varepsilon)$ ซึ่งมีคุณสมบัติตามทฤษฎี 5.6.2

ให้ $\varepsilon = d(b, c)/3 > 0$

ดังนั้น $N(b,\varepsilon) \cap N(a,\varepsilon) = \emptyset$

$\therefore N(a,\varepsilon)$ และ $N(b,\varepsilon)$ จะไม่มีคุณสมบัติตามทฤษฎี 5.6.2

ซึ่งขัดแย้งกัน ดังนั้น $a = b$

<u>แบบฝึกหัดชุด 5.6</u>

1. ซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ต่อไปนี้เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ a ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $J \in I^+$ ซึ่ง $n \geq J$ จะได้ว่า $a_n \in N(a, \varepsilon)$ จงหา J ซึ่งขึ้นอยู่กับ ε

   1.1 $a_n = 1/(n + 1)$; $\varepsilon = .005$

   1.2 $a_n = \dfrac{5}{2n}$; $\varepsilon = .05$

   1.3 $2/(n^2 - n + 1)$; $\varepsilon = .05$

2. จากแบบฝึกหัด 4.5 ข้อ 2 จงหาลิมิตของซีเควนซ์ ถ้ามี

3. จงอธิบายว่าแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นซีเควนซ์ที่มีลิมิตหรือไม่

   3.1 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

   3.2 $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

   3.3 $\langle 1,0\rangle, \langle 1/2, 1/2\rangle, \langle 1/3, 2/3\rangle, \langle \frac{1}{4}, 3/4\rangle, \ldots$

4. ใน E^1 ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ของจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนลบ และถ้า $\lim\limits_{n \to \alpha} a_n = L$ จะได้ว่า $L \geq 0$

5. จงพิสูจน์ลิมิตของซีเควนซ์ต่อไปนี้

   5.1 $\lim\limits_{n \to \alpha} 2n/(n + 3) = 2$

   5.2 $\lim\limits_{n \to 3} \dfrac{3n}{n} = 3$

   5.3 $\lim\limits_{n \to \alpha} \dfrac{n-1}{n+1} = 1$

   5.4 $\lim\limits_{n \to \alpha} \dfrac{n^2}{n^2 + 1 - 1} = 1$

5.7 ซีเควนซ์ลู่เข้า (Convergent sequence)

นิยาม 5.7.1 ถ้าซีเควนซ์ของ E^1 $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ มีลิมิตเป็น b เรากล่าวว่าซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้า (convergent) สู่ b ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ไม่มีลิมิต เรากล่าวว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่ออก (divergent)

จะเห็นว่า ซีเควนซ์ 1, 1, 1, 1, ... ลู่เข้าสู่ 1 และ 1, 1/2, 1/3, 1/4,... ลู่เข้าสู่ 0 แต่ 1, 2, 3,... และ 0, 1, 0, 1, 0, 1,... ลู่ออก

จากทฤษฎี 5.6.3 จะได้ ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้า จะได้ว่า ซีเควนซ์นี้ต้องลู่เข้าสู่จำนวน ๆ เดียวเท่านั้น จะต่างกันไม่ได้

ต่อไปจะกล่าวถึงคุณสมบัติของซีเควนซ์ลู่เข้า

ทฤษฎี 5.7.2 ถ้าซีเควนซ์ใน E^1 $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ b จะได้ว่า ซีเควนซ์ย่อยใด ๆ ของ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ จะลู่เข้าสู่ b ด้วย

พิสูจน์ $\because$ $\lim_{n \to \alpha} a_n = b$ ให้ $N(b,\varepsilon)$ เป็นเนเบอร์ฮูดของจุด b

$\therefore$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $J \in I^+$ ซึ่ง $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n \in N(b,\varepsilon)$

ให้ $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ย่อย

ถ้า $n_i \geq n$ จะได้ว่า $n_i \geq J$ ดังนั้น $a_{n_i} \in N(b,\varepsilon)$

นั่นคือ $a_{n_i} \in N(b,\varepsilon)$ เมื่อ $n_i \geq J$

ดังนั้น $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ b

<u>บทแทรก 5.7.3</u> ใน E^1 ซีเควนซ์ย่อยทุกซีเควนซ์ของซีเควนซ์ที่ลู่เข้า จะลู่เข้าสู่ลิมิตเดียวกัน

<u>พิสูจน์</u> ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ b จะได้ว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ จะลู่เข้าสู่ลิมิตของซีเควนซ์นี้ด้วย และเป็นจำนวนเดียวกัน (ทฤษฎี 5.6.3)

และจะได้ว่า ซีเควนซ์ย่อยทุกซีเควนซ์ของ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ b ด้วย (ทฤษฎี 5.7.2)

$\therefore$ ซีเควนซ์ย่อยทุกซีเควนซ์ของซีเควนซ์ลู่เข้า จะลู่เข้าสู่ลิมิตเดียวกัน

สำหรับซีเควนซ์ลู่ออก อาจจะมีซีเควนซ์ย่อยลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้ เช่น -

ซีเควนซ์ A = -1, +1, -1, +1, -1,...	เป็นซีเควนซ์ลู่ออก
จะได้ว่า 1, 1, 1, 1,...	เป็นซีเควนซ์ย่อยที่ลู่เข้าสู่ 1
และ -1, -1, -1, -1,...	เป็นซีเควนซ์ย่อยที่เข้าสู่ -1
จะเห็นว่า ซีเควนซ์ย่อยของ A	ลู่เข้าสู่ลิมิตที่ต่างกัน
ถ้าซีเควนซ์ S = 1, 2, 3, 4,...	เป็นซีเควนซ์ลู่ออก
จะได้ว่า 1, 3, 5, 7,...	เป็นซีเควนซ์ย่อยลู่ออก
และ 2, 4, 6, 8,...	เป็นซีเควนซ์ย่อยลู่ออก

จะเห็นว่าซีเควนซ์ย่อยของ S เป็นซีเควนซ์ลู่ออก

5.8 <u>ซีเควนซ์ลู่ออก</u> (Divergent sequence)

จากซีเควนซ์ $\{n\}_{n=1}^{\alpha}$ และ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\alpha}$ ใน E^1 ต่างก็เป็นซีเควนซ์ที่ลู่ออก สำหรับ $\{n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่ออกที่แต่ละพจน์มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ แต่ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ที่แต่ละพจน์มีค่าเพิ่มขึ้น และลดลงสลับกันตลอด จะเห็นว่าซีเควนซ์ลู่ออกมีหลายชนิด ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

<u>นิยาม 5.8.1</u> ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ของ E^1 จะกล่าวว่า a_n เข้าใกล้อนันต์ ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์ ถ้าสำหรับจำนวนจริงใด ๆ $M > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก J ที่ทำให้ $a_n \geq M$ เมื่อ $n \geq J$

เรียก $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ว่าซีเควนซ์ลู่ออกสู่อนันต์ - (diverges to infinity) เขียนแทนด้วย $\lim_{n \to \alpha} a_n = \alpha$

<u>ตัวอย่าง 5.8.1</u> ใน E^1 จงพิสูจน์ว่า ซีเควนซ์ $\{n\}_{i=1}^{\alpha}$ ลู่ออกสู่อนันต์

ให้ $M > 0$ เลือก $J \in I^+$ ซึ่ง $J \geq M$

$\therefore\ n \geq M$ $\because\ n \geq J$

ดังนั้น $a_n \geq M$ เมื่อ $n \geq J$ ($\because\ a_n = n$)

<u>นิยาม 5.8.2</u> ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ใน E^1 จะกล่าวว่า a_n เข้าใกล้ลบอนันต์ (minus infinity) ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์ ถ้าสำหรับจำนวนจริงใด ๆ $M > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก J ที่ทำ-ให้

$$a_n < -M \qquad \text{เมื่อ} \quad n \geq J$$

เรียก $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ว่าซีเควนซ์ลู่ออกสู่ลบอนันต์ (diverges to minus infinity) เขียนแทนด้วย $\lim_{n \to \alpha} a_n = -\alpha$

<u>ตัวอย่าง 5.8.2</u> ใน E^1 ซีเควนซ์ $\{\ln (1/n)\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่ออกสู่ลบอนันต์

ให้ $M > 0$ เลือก $J \in I^+$ ซึ่ง $J \geq e^M$

$\therefore\ n \geq e^M$ $\quad n \geq J$

$\ln(n) \geq M$ $\quad n \geq J$

$-\ln(n) \leq -M$ $\quad n \geq J$

$\ln(1/n) \leq -M$ $\quad n \geq J$

ดังนั้น $a_n \leq -M$ $\quad n \geq J$ ($\because\ a_n = \ln(1/n)$)

สำหรับซีเควนซ์ที่ลู่ออกสู่ $\pm \alpha$ ซีเควนซ์ย่อยทุกตัวก็ลู่ออกเป็น $\pm \alpha$ ด้วย

<u>นิยาม 5.8.3</u> ถ้าซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ใน E^1 ลู่ออก แต่ไม่ใช่ลู่ออกสู่อนันต์หรือลบอนันต์ เรียก $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ว่าซีเควนซ์ออสซิเลท - (oscillates)

<u>ตัวอย่าง 5.8.3</u> ซีเควนซ์ $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\alpha} = -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$ เป็นซีเควนซ์ออสซิเลท และ 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5,... เป็นซีเควนซ์ออสซิเลท

สำหรับซีเควนซ์ออสซิเลท ไม่ได้หมายถึงซีเควนซ์ที่มีพจน์ที่มีค่ามากและน้อยสลับกัน เช่น ซีเควนซ์ $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าหาศูนย์

<u>แบบฝึกหัดชุด 5.7 - 5.8</u>

1. จงหาตัวอย่างของซีเควนซ์ใน E^1 ซึ่ง $\{|a_n|\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้า แต่ซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่ออก
2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\{|a_n|\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ศูนย์ จะได้ว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ศูนย์ด้วย
3. จากซีเควนซ์ข้างล่างนี้ จงตรวจดูว่า

   (ก) ลู่เข้า (ข) ลู่ออกสู่อนันต์

   (ค) ลู่ออกสู่ลบอนันต์ (ง) เป็นซีเควนซ์ออสซิเลท

   3.1 $\{\sin(n\pi/2)\}_{n=1}^{\alpha}$ 3.2 $\{\sin n\pi\}_{n=1}^{\alpha}$

   3.3 $\{e^n\}_{n=1}^{\alpha}$ 3.4 $\{e^{1/n}\}_{n=1}$

   3.5 $\{n \sin(\pi/n)\}_{n=1}^{\alpha}$
4. จงพิสูจน์ว่า $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่ออกสู่อนันต์

5.9 ชีเควนซ์ที่บาวด์ (Bounded sequences)

ก่อนจะกล่าวถึงชีเควนซ์ที่บาวด์ ควรจะทราบเกี่ยวกับเรนจ์ของชีเควนซ์ เนื่องจากชีเควนซ์ที่บาวด์ เราหมายถึงเรนจ์ของชีเควนซ์ที่บาวด์ ชีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ใน E^1 เป็นฟังชั่นจากจำนวนเต็มบวกไปสู่ E^1 (หรือจำนวนจริง) และเรนจ์ของ-ชีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ได้แก่ $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ เป็นสับเซ็ทของ R

นิยาม 5.9.1 ชีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ใน E^1 กล่าวว่าบาวด์ข้างบน ถ้าเรนจ์ของ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ บาวด์ข้างบน

ในทำนองเดียวกัน ชีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ใน E^1 กล่าวว่าบาวด์ข้างล่าง (หรือบาวด์) ถ้าเรนจ์ของ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ บาวด์-ข้างล่าง (หรือบาวด์)

ชีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ จะเรียกว่าบาวด์ ก็ต่อเมื่อ จะมี $M \in R$ ซึ่ง

$$|a_n| \leq M \qquad \text{เมื่อ } n \in I^+$$

ชีเควนซ์ที่ลู่ออกสู่อนันต์ (หรือลบอนันต์) ชีเควนซ์นั้นจะไม่บาวด์ แต่ - ชีเควนซ์ที่ลู่ออกสู่อนันต์ (หรือลบอนันต์) จะบาวด์ข้างล่าง (หรือบาวด์ข้างบน)

ตัวอย่าง 5.9.1

ก. ชีเควนซ์ 1, -2, 3, -4,... เป็นออสซิเลทชีเควนซ์ที่ไม่บาวด์ มีเรนจ์เป็น {1, -2, 3, 4,...}

ข. ชีเควนซ์ -1, 1, -1, 1, -1,... เป็นออสซิเลทชีเควนซ์ที่บาวด์ มีเรนจ์เป็น {-1, 1}

ค. ชีเควนซ์ 1,2,1,3,1,4,1,5,... เป็นออสซิเลทชีเควนซ์ที่บาวด์ข้างล่างแต่ไม่บาวด์ข้างบน มีเรนจ์เป็น {1,2,3,4,...}

ง. ชีเควนซ์ 1,1/2,1/3,1/4,1/5,... เป็นชีเควนซ์ที่บาวด์ มีเรนจ์เป็น {1, 1/2, 1/3, 1/4,...}

<u>ทฤษฎี 5.9.2</u> ถ้าซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ใน E^1 ลู่เข้าสู่ b จะได้ว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ที่บาวด์

<u>พิสูจน์</u> สมมติว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ b

เลือก $\varepsilon = 1$ จะมี $J \in I^+$ ซึ่ง $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n \in N(b, 1)$

ใน E^1 จะได้ว่า $a_n \in N(b,1)$ ก็คือ $b - 1 < a_n < b + 1$

ให้ $-M = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{J-1}, b-1\}$

และ $M = \max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{J-1}, b+1\}$

ดังนั้นสำหรับ $n \in I^+$ ทุกตัว จะได้ $-M \leq a_n \leq M$

$\therefore$ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ที่บาวด์

ส่วนกลับของทฤษฎีนี้ไม่จริง "ซีเควนซ์ที่บาวด์ ไม่เป็นซีเควนซ์ที่ลู่เข้า" เช่น ซีเควนซ์ 0, 1, 0, 1, 0, 1,... เป็นซีเควนซ์ที่บาวด์ แต่ไม่ลู่เข้า

<u>ทฤษฎี 5.9.3</u> ทฤษฎีบัลซาโน-ไวเออร์สแตรส (Bolzano- Weierstrass - Theorem) ใน E^1 เซ็ทอนันต์ที่บาวด์ทุกเซ็ท จะมีจุดลิมิตอย่างน้อยหนึ่งจุด

พิสูจน์ ให้ S เป็นเซ็ทอนันต์ที่บาวด์

ดังนั้นจะมีช่วงปิด $I_0 = [a, b]$ ซึ่ง $S \subset I_0$ แบ่งช่วง I_0 ดังนี้

ให้ $I_1^1 = [a, a + (b-a)/2]$, $I_1^2 = [a + (b-a)/2, b]$

สมาชิกของเซ็ท S จำนวนอนันต์ ต้องบรรจุอยู่ใน I_1^1, I_1^2 ช่วงใดช่วงหนึ่ง เลือกช่วงที่มีสมาชิกจำนวนอนันต์ สมมติเป็น $I_1 = [a_1, b_1]$ ซึ่งมีความยาว $\frac{b-a}{2}$

แบ่งช่วง I_1 ต่อดังนี้

ให้ $I_2^1 = [a_1, a_1 + (b_1 - a_1)/2]$, $I_2^2 = [a_1 + (b_1 - a_1)/2, b_1]$

สมาชิกของเซ็ท S จำนวนอนันต์ ต้องบรรจุอยู่ใน I_2^1, I_2^2 ช่วงใดช่วงหนึ่ง เลือกช่วงที่มีสมาชิกจำนวนอนันต์ สมมติเป็น $I_2 = [a_2, b_2]$ ซึ่งมีความยาว $(b - a).2^{2}$

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ช่วง $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$ มีความยาว $(b - a).2^{-n+1}$ แบ่งช่วง I_{n-1} ต่อดังนี้

ให้ $I_n^1 = [a_{n-1}, a_{n-1} + (b_{n-1} - a_{n-1})/2]$,

$I_n^2 = [a_{n-1} + (b_{n-1} - a_{n-1})/2 , b_{n-1}]$

เลือกช่วงที่มีสมาชิกจำนวนอนันต์ สมมติเป็น $I_n = [a_n, b_n]$ มีความยาว $(b - a).2^{-n}$ และยังสามารถทำต่อไปเรื่อย ๆ จากการแบ่งช่วงมาเรื่อย ๆ จะได้ว่า

ก. $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$

ข. $[a_n, b_n]$ มีสมาชิกของ S จำนวนอนันต์บรรจุอยู่

ค. $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \cdots \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$

$\because [a_n, b_n] \subset [a, b]$ สำหรับ $n \in I^+$ ทุกตัว

ดังนั้น $A = \{a_n / n \in I\}$ เป็นเซ็ทที่บาวด์

$\therefore$ ให้ $t = \sup A$ (ต่อไปจะพิสูจน์ว่า t เป็นจุดลิมิต)

สำหรับ $\varepsilon > 0$ ให้ $N(t, \varepsilon)$ เป็นเนเบอร์ฮูดของจุด t

$\because t - \varepsilon < t$ จะได้ว่า $t - \varepsilon$ ไม่เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ A

ดังนั้นจะมี $n \in I^+$ ซึ่ง $t - \varepsilon < a_n \leq t$

จากการสร้างช่วง ถ้า $m > n$ จะได้ว่า $t - \varepsilon < a_n < a_m \leq t$ -- 1)

แต่ช่วง $[a_m, b_m]$ แต่ละช่วงจะมีสมาชิกของ S จำนวนอนันต์บรรจุอยู่

(จะพิสูจน์ต่อว่า $[a_m, b_m] \subset N(t, \varepsilon)$)

เลือก m ให้มีค่าใหญ่เพียงพอที่ทำให้ $2^{-m}(b-a) < \varepsilon$ โดยที่ $m \geq n$

จาก 1) จะได้ว่า $t - \varepsilon < a_m \leq t \leq b_m = a_m + 2^{-m}(b-a) < t + \varepsilon$

$\therefore [a_m, b_m] \subset N(t, \varepsilon)$

แสดงว่าเนเบอร์ฮูด $N(t, \varepsilon)$ มีสมาชิกของ S จำนวนอนันต์บรรจุอยู่

$\therefore$ t เป็นจุดลิมิต

<u>ทฤษฎี 5.9.4</u> ใน E^1 ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ที่บาวด์ จะได้ว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ มีซีเควนซ์ย่อยที่ลู่เข้า

<u>พิสูจน์</u> ให้ A เป็นเรนจ์ของซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ที่บาวด์

ถ้า A เป็นเซ็ทจำกัด

ให้ b เป็นสมาชิกตัวหนึ่งใน A ซึ่งมีจำนวนอนันต์ในซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$

ซึ่ง $a_{x_1} = a_{x_2} = a_{x_3} = \dots = b$

ดังนั้นซีเควนซ์ b, b, b,... เป็นซีเควนซ์ย่อยที่ลู่เข้าของซีเควนซ์ - $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$

ถ้า A เป็นเซ็ทอนันต์และบาวด์ ดังนั้น A จะมีจุดลิมิตเป็น $a \in E^1$ (ทฤษฎี5.9.3)

ให้ $a_{n_1} \in A$ ซึ่ง $d(a, a_{n_1}) < 1$

พิจารณาเนเบอร์ฮูด $V_2 = \{b / d(a,b) < \frac{1}{2}\}$

$\because$ x เป็นจุดลิมิตของเซ็ท $S_1 = \{a_m / m \geq 1\}$

และ x เป็นจุดลิมิตของเซ็ท $S_2 = \{a_m / m > n_1\}$ เซ็ทนี้ได้จากการตัดสมาชิกของ S_1 จำนวนจำกัดออก

$\therefore$ จะมี $a_{n_2} \in S_2$ ซึ่ง $n_2 > n_1$ เป็นสมาชิกของ V_2

ให้เนเบอร์ฮูด $V_3 = \{b / d(a,b) < \frac{1}{3}\}$ และ $S_3 = \{a_m / m > n_2\}$ ซึ่ง a ก็จะเป็นจุดลิมิตของ S_3 และจะมี $a_{n_3} \in S_3$ ซึ่ง $n_3 > n_2$ เป็นสมาชิกของ V_3

กระทำต่อไปเรื่อย ๆ จะได้ซีเควนซ์ย่อย $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\alpha} = \{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ ของ A ซึ่ง $d(a, a_{n_r}) < 1/r$; $r = 1,2,\ldots, n,\ldots$

ดังนั้นให้ $0 < \varepsilon = 1/r$ จะมี $j \geq r \in I^+$ ที่ทำให้ $d(a, a_{nj}) < \varepsilon$

$\therefore$ $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ย่อยที่ลู่เข้าสู่ a

ทฤษฎี 5.9.3 เป็นทฤษฎีบัลซาโน-ไวเออร์สแตรส ของเซ็ท แต่ทฤษฎี 5.9.4 เป็นทฤษฎี บัลซาโน-ไวเออร์สแตรส ของซีเควนซ์

5.10 <u>ซีเควนซ์โมโนโทน</u> (Monotone sequence)

เราทราบว่าซีเควนซ์ที่บาวด์อาจไม่เป็นซีเควนซ์ที่ลู่เข้า สำหรับหัวข้อนี้จะพิจารณาถึงซีเควนซ์ที่บาวด์ และลู่เข้าด้วย ว่าควรมีคุณสมบัติเพิ่มเติมอย่างไร

<u>นิยาม 5.10.1</u> ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ใน E^1 จะเรียก $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ว่าซีเควนซ์ไม่ลดลง (nondecreasing) ถ้า $a_n \leq a_{n+1}$ เมื่อ $n = 1,2,3,\ldots$

จะเรียก $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ว่าซีเควนซ์ไม่เพิ่มขึ้น (nonincreasing) ถ้า $a_n \geq a_{n+1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3,\ldots$

ซีเควนซ์โมโนโทน ได้แก่ซีเควนซ์ซึ่งอาจจะเป็นซีเควนซ์ไม่ลดลง หรือซีเควนซ์ไม่เพิ่มขึ้น

<u>ตัวอย่าง 5.10.1</u> ซีเควนซ์ $\{(2-1/2^{n-1})\}_{n=1}^{\alpha} = 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{7}{8}, \ldots$

เป็นซีเควนซ์ไม่ลด และบาวด์

ซีเควนซ์ $\{n\}_{n=1}^{\alpha} = 1,2,3,\ldots$ เป็นซีเควนซ์ไม่ลด

และไม่บาวด์

<u>ทฤษฎี 5.10.2</u> ใน E^1 ซีเควนซ์ไม่ลดลง และบาวด์ข้างบน จะเป็นซีเควนซ์ลู่เข้า

<u>พิสูจน์</u> สมมติให้ $A = \{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ไม่ลดลง และบาวด์ข้างบน (จะพิสูจน์ว่า A เป็นซีเควนซ์ลู่เข้า นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมี $J \in I^+$ ซึ่ง $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n \in N(b, \varepsilon)$

ดังนั้น A จะมี sup (p_{15})

$\therefore\ b = \sup A$

ให้ $\varepsilon > 0$ $\therefore\ b - \varepsilon < b$ จะได้ว่า $b - \varepsilon$ ไม่เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ A จะมี $J \in I^+$ ซึ่ง $b - \varepsilon < a_J \leq b$ ---1)

แต่ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ไม่ลด

$\therefore\ a_J \leq a_n \leq b$ สำหรับ $n \geq J$ ทุกตัว

$\because\ \varepsilon > 0$ $\therefore\ a_J \leq a_n < b + \varepsilon$ สำหรับ $n \geq J$ ทุกตัว ....2)

1) และ 2) $b - \varepsilon < a_J \leq a_n < b + \varepsilon$ สำหรับ $n \geq J$ ทุกตัว

$b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$ สำหรับ $N \geq J$ ทุกตัว

ใน E^1 $\therefore\ a_n \in N(b, \varepsilon)$ สำหรับ $n \geq J$ ทุกตัว

ดังนั้น $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้า

จากทฤษฎี 5.10.2 เราสามารถเปลี่ยนจาก "บาวด์ข้างบน" เป็น "บาวด์" ได้ และทำให้เราทราบว่าซีเควนซ์ลู่เข้า โดยไม่ต้องทราบว่าซีเควนซ์มีลิมิตหรือไม่ ซีเควนซ์ไม่ลดลงที่ลู่เข้าเป็นซีเควนซ์ที่บาวด์ แต่ซีเควนซ์ไม่ลดที่ไม่บาวด์จะลู่ออก ดังนั้นซีเควนซ์ไม่ลดลง จะไม่เป็นซีเควนซ์ออสซิเลท ซึ่งพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 5.10.3</u> ใน E^1 ซีเควนซ์ไม่ลดลง และไม่บาวด์ข้างบน จะลู่ออกสู่อนันต์

<u>พิสูจน์</u> สมมติ $A = \{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ไม่ลดลง และไม่บาวด์ข้างบน (ต้องพิสูจน์ว่า ถ้ากำหนด $M > 0$ ต้องหา $J \in I^+$ ซึ่ง $n \geq J$ ที่ทำให้ $a_n > M$)

ให้ $M > 0$ $\therefore$ A ไม่บาวด์ข้างบน

จะได้ว่า M ไม่เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ A

ดังนั้นจะมี $J \in I^+$ ซึ่ง $a_J > M$

A เป็นซีเควนซ์ไม่ลดลง

$\therefore$ $a_n \geq a_J$ สำหรับ $n \geq J$ ทุกตัว

$\therefore$ $a_n \geq a_J > M$ สำหรับ $n \geq J$ ทุกตัว

ดังนั้น $a_n > M$ สำหรับ $n \geq J$ ทุกตัว

$\therefore$ ใน E^1 ซีเควนซ์ไม่ลดลง และไม่บาวด์ จะลู่ออกสู่อนันต์

<u>ทฤษฎี 5.10.4</u> ก. ใน E^1 ซีเควนซ์ไม่เพิ่มขึ้น และบาวด์ข้างล่าง จะเป็นซีเควนซ์ลู่เข้า

ข. ใน E^1 ซีเควนซ์ไม่เพิ่มขึ้น และไม่บาวด์ข้างล่าง จะเป็นซีเควนซ์ลู่ออกสู่ลบอนันต์

<u>พิสูจน์</u> ให้เป็นแบบฝึกหัด

<u>แบบฝึกหัดชุด 5.9 - 5.10</u>

1. จงหาเรนจ์ของซีเควนซ์ต่อไปนี้

   1.1 $\{1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, 1, 1/5, \ldots\}$

   1.2 $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

   1.3 $\{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \ldots$

2. ถ้าเรนจ์ของซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นจำนวนจำกัด จงพิสูจน์ว่าซีเควนซ์นั้นจะมีซีเควนซ์ย่อยที่ลู่เข้า

3. ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ และ $\{c_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ใน E^1 ซึ่ง $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ A, $\{b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ A และ $a_n \leq c_n \leq b_n$ สำหรับ n ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า $\{c_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ A

4. พิสูจน์ ทฤษฎี 5.10.4

5. ซีเควนซ์ต่อไปนี้เป็นโมโนโทนหรือไม่

   5.1 $\{\sin n\}_{n=1}^{\alpha}$

   5.2 $\{\tan n\}_{n=1}^{\alpha}$

   5.3 $\left\{\dfrac{1}{1+n^2}\right\}_{n=1}^{\alpha}$

   5.4 $\{2n + (-1)^n\}_{n=1}^{\alpha}$

5.11 ซีเควนซ์โคชี (Cauchy sequences)

เราทราบว่าซีเควนซ์ลู่เข้าจากการทราบว่าซีเควนซ์นั้นมีลิมิต แต่ถ้าเราไม่ทราบลิมิตของซีเควนซ์ว่ามีหรือไม่มี เราสามารถพิสูจน์ว่าซีเควนซ์นั้นลู่เข้า โดยอาศัยเงื่อนไขโคชี (Cauchy criteria) ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม 5.11.1 ใน E^1 ซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ จะเรียกว่าโคชี (Cauchy) ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมีจำนวนเต็มบวก J ซึ่งถ้า $m, n \geq J$ จะได้ว่า

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon$$

จากนิยาม ซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ จะเป็นโคชี ถ้า a_n และ a_m เข้าใกล้ซึ่งกันและกัน ในขณะที่ m, n มีค่ามาก ๆ

ต่อไปจะกล่าวถึงซีเควนซ์ลู่เข้าโดยอาศัยเงื่อนไขโคชี

ทฤษฎี 5.11.2 ใน E^1 ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้า จะได้ว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

พิสูจน์ (ต้องพิสูจน์ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $J \in I^+$ ซึ่งถ้า $n, m \geq J$ จะได้ว่า $d(a_n, a_m) < \varepsilon$) ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ b

ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว เลือก $\varepsilon/2$ จะมี $J \in I^+$ ซึ่ง $n \geq J$ จะได้ว่า

$a_n \in N(b, \varepsilon/2)$ หรือ $d(b, a_n) < \varepsilon/2$

ถ้า $m, n \geq J$ จะได้ว่า $d(b, a_m) < \varepsilon/2$ และ $d(a_n, b) < \varepsilon/2$

$$\therefore \quad d(a_n, a_m) \leq d(a_n, b) + d(b, a_m) \qquad \text{(อสมการสามเหลี่ยม)}$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ดังนั้น $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

จากทฤษฎี 5.11.2 เราอาจกล่าวว่า ถ้าซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ b จะได้ว่าพจน์ของซีเควนซ์จะเข้าใกล้ b ถ้า a_m; a_n เป็นพจน์ที่เข้าใกล้ b ดังนั้น a_m และ a_n จะเข้าใกล้ซึ่งกันและกัน หรือกล่าวว่า ซีเควนซ์ลู่เข้าทุกซีเควนซ์เป็นซีเควนซ์โคชี

<u>เลมมา 5.11.3</u> ใน E^1 ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์โคชี จะได้ว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ที่บาวด์

<u>พิสูจน์</u> $\because$ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

ให้ $\varepsilon = 1$ จะมี $J \in I^+$ ซึ่งถ้า $m, n \geq J$ จะได้ว่า

$d(a_n, a_m) < 1$ และ $d(a_{J+1}, a_n) < 1$ ถ้า $n \geq J$

$$\therefore\ a_n \in N(a_{J+1}, 1) \qquad n \geq J$$

ดังนั้นเนเบอร์ฮูด $N(a_{J+1}, 1)$ จะมีพจน์ของซีเควนซ์ทั้งหมดจำนวนอนันต์บรรจุอยู่ ยกเว้นพจน์จำนวนจำกัดของซีเควนซ์

เลือก $r \in R$ ให้ $r \geq 1$ และ $r \geq d(a_{J+1}, a_i)$ ซึ่ง $i = 1, 2, 3, \ldots, J-1,$

$\therefore$ เนเบอร์ฮูด $N(a_{J+1}, r)$ จะมีซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ทั้งหมดบรรจุอยู่ นั่นคือ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ที่บาวด์

<u>เลมมา 5.11.4</u> ใน E^1 ถ้าซีเควนซ์ย่อยของซีเควนซ์โคชี $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ a จะได้ว่า ซีเควนซ์ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ a ด้วย

พิสูจน์ $\because$ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์โคชี ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว $J \in I^+$ ซึ่งถ้า $m, n \geq J$

จะได้ว่า $d(a_m, a_n) < \varepsilon/2$ ---1)

ให้ $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ย่อยของ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ซึ่งลู่เข้าสู่ a ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $k \geq J$ ที่ทำให้ $d(a, x_k) < \varepsilon/2$

(ซึ่ง $k \in \{n_1, n_2, \ldots\}$ และ ใน E^1 $d(x, x_k) < \varepsilon$ ก็คือ $x_k \in N(x, \varepsilon)$)

จาก 1) ให้ $m = k$ จะได้ว่า

$$d(a, a_n) \leq d(a, a_k) + d(a_k, a_n) \quad \text{(อสมการสามเหลี่ยม)}$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \qquad \text{สำหรับ } n \geq J$$

$\therefore$ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ที่ลู่เข้าสู่ a ซึ่งเป็นลิมิตของซีเควนซ์ย่อย $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\alpha}$

<u>ทฤษฎี 5.11.5</u> ใน E^1 ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์โคชี จะได้ว่า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่สมาชิกใน E^1

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน E^1

$\therefore$ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ที่บาวด์ (เลมมา 5.11.3)

และ $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ จะมีซีเควนซ์ย่อยที่ลู่เข้า (ทฤษฎี 5.9.4)

ดังนั้น $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ จะเป็นซีเควนซ์ที่ลู่เข้าลิมิตของซีเควนซ์ย่อย $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\alpha}$ (เลมมา 5.11.4)

ทฤษฎี 5.11.5 จะเป็นเงื่อนไขโคชี ถ้าเรามีซีเควนซ์โคชีใน E^1 จะได้ว่าซีเควนซ์นั้นต้องลู่เข้า ซึ่งในเมตริกซ์เซ็ทอื่น ๆ อาจไม่เป็นจริง เช่น

<u>ตัวอย่าง 5.11.1</u> ให้ $M = (0,1)$ และฟังชั่น $d : M \times M \rightarrow R$ คือ

$d(x,y) = |x-y|$ เมื่อ $x, y \in M$ จะได้ว่า $< M, d >$ เป็นเมตริกซ์เซ็ท

และ $\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots \}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน M ลู่เข้าสู่ 0 แต่ไม่ใช่ สมาชิกของ M

<u>นิยาม 5.11.6</u> เมตริกซ์เซ็ท $< M, d >$ จะเรียกว่าคอมพลีท (complete) ถ้าซีเควนซ์โคชีทุกซีเควนซ์ใน M ลู่เข้าสู่จัดใน M

<u>ตัวอย่าง 5.11.2</u> ก. E^1 เป็นคอมพลีท

ข. ซีเควนซ์ของจำนวนตักยะ 1, 1.4, 1.41, 1.412,... ลู่เข้าสู่จำนวนจริง $\sqrt{2} \notin Q$

ดังนั้นจำนวนตักยะ ไม่เป็นคอมพลีท

<u>แบบฝึกหัดชุด 5.6</u>

1. จงอธิบายว่าซีเควนซ์ต่อไปนี้เป็นซีเควนซ์โคชีหรือไม่

1.1 1, 1, 1,...

1.2 2, 4, 6, 8,...

1.3 $\{ \frac{3n+1}{n} \}_{n=1}^{\alpha}$

1.4 $\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \}_{n=1}^{\alpha}$

1.5 $\{ (\frac{n+1}{n})(2 - \frac{1}{n}) \}_{n=1}^{\alpha}$

1.6 $\{ \frac{1}{n^2} \}_{n=1}^{\alpha}$

2. ใน E^1 ถ้า $\{b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ B และ $B \neq 0$ จะได้ว่า จะมี $M \in R^+$ และ $J \in I^+$ ซึ่งถ้า $n \geq J$ จะได้ว่า $|b_n| \geq M$

3. ใน E^1 ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ A และ $\{b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ B จะได้ว่า

3.1 $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ A + B

3.2 $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ A - B

3.3 $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ AB

3.4 $\{a_n / b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ A/B เมื่อ $B \neq 0$,
$b_n \neq 0$

4. ใน E^1 ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ A และ $\{b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ B และ $a_n \leq b_n$ สำหรับทุกตัว จะได้ว่า $A \leq B$

5. ใน E^1 ถ้า $\{a_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ศูนย์ และ $\{b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นเซ็ทที่บาวด์ จะได้ว่า $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ศูนย์

5.12 ลิมิตของฟังชั่น (Limits of Functions)

เกี่ยวกับลิมิทได้เคยกล่าวมาแล้วในจุดลิมิต และลิมิตของซีเควนซ์ ลิมิตของซีเควนซ์จะช่วยให้เข้าใจลิมิตของฟังชั่นดีขึ้น และในวิชาแคลคูลัสก็ได้กล่าวถึงลิมิตของ-ฟังชั่นมาบ้างแล้ว ดังนั้นจะไม่กล่าวละเอียดมากนัก

พิจารณา ฟังชั่น $f: E^1 \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $f(x) = x + 1;\ x \in E^1$ --1)

เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ค่า f(x) จะเข้าใกล้ 2 (ดูจากตารางที่ 5.12.1)

x	.9	.99	.999	1.00	1.001	1.01	1.1
f(x)	1.9	1.99	1.999	2.00	2.001	2.01	2.1
g(x)	1.9	1.99	1.999	หาค่าไม่ได้	2.001	2.01	2.1

ตารางที่ 5.12.1

พิจารณา ฟังชั่น $f : E^1 \rightarrow E^1 - \{1\}$ $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

จะเห็นว่า $D_g = \{x \in E^1 / x \neq 1\}$

ดังนั้น $g(x) = x + 1 \;,\; x \neq 1$ ----2)

ถ้า x เข้าใกล้ 1 ค่า g(x) จะเข้าใกล้ 2 (ดูจากตาราง5.12.1)

จะเห็นว่า $1 \notin D_g$ แต่เราสนใจค่า g(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 เท่า-นั้น โดยไม่คำนึงว่า 1 จะอยู่หรือไม่อยู่ในโดเมน สำหรับค่า x ที่เข้าใกล้ 1 นั้นต้องอยู่ในโดเมน

จากทั้งสองกรณี เรากล่าวว่าลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 คือ 2 และลิมิตของ g(x) เมื่อ x เข้าใกล้ 1 คือ 2 เขียนได้ว่า $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$ และ $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$

พิจารณา $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 6 & x = 1 \end{cases}$

เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ค่า F(x) เข้าใกล้ 2 แต่ F(1) = 6

ดังนั้นจะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 1} F(x) = 2 \neq F(1)$

จากทั้งสามกรณีได้ว่า

ในกรณีของฟังชั่น f เรามี $1 \in D_f$ และ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$

ฟังชั่น g $1 \notin D_g$ ดังนั้น g(1) หาค่าไม่ได้ และ $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 2$

ฟังชั่น F $1 \in D_F$ และ $\lim\limits_{x \to 1} F(x) = 2 \neq F(1)$

จะเห็นว่า การหาลิมิตเมื่อ x เข้าใกล้ a (จำนวนจริงใด ๆ) กับการหาค่าฟังชั่นที่จุด a นั้นต่างกัน แต่อาจเท่ากันได้

พิจารณา ฟังชั่น $G(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$

ถ้า $x > 0$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ค่าของ $G(x)$ เข้าใกล้ 1
ถ้า $x < 0$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ค่าของ $G(x)$ เข้าใกล้ -1
ในกรณีเช่นนี้เรากล่าวว่า จะไม่มีลิมิตของ $G(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0

ถ้า f เป็นฟังชั่น และ a เป็นค่าคงที่ซึ่งจะอยู่ใน D_f หรือไม่อยู่ก็ได้ โดยที่จำนวนจริง L เป็นลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a และ x เป็นสมาชิก D_f เราอาจกล่าวถึงนิยามของลิมิตอย่างคราว ๆ ว่า

ฟังชั่น f จะเข้าใกล้ลิมิต L ที่ a ก็ต่อเมื่อ เราสามารถทำให้ $f(x)$ เข้าใกล้ L ตามความต้องการของเรา เมื่อกำหนดให้ x เข้าใกล้ a พอสมควร ซึ่ง $x \neq a$ และ $x \in D_f$

จาก $f(x)$ เข้าใกล้ L หมายถึง $|f(x) - L|$ มีค่าน้อย และจาก x เข้าใกล้ a ซึ่ง $x \in D_f$ และ $x \neq a$ เราหมายถึง $|x-a|$ มีค่าน้อย และ $x \neq a$

ดังนั้นฟังชั่น f จะเข้าใกล้ลิมิต L ที่ a ก็ต่อเมื่อ เราสามารถทำให้ $|f(x) - L|$ มีค่าน้อย ตามต้องการของเรา เมื่อกำหนดให้ $|x - a|$ มีค่าน้อยพอสมควร และ $x \neq a$

เมื่อกล่าวว่า $|f(x) - L|$ มีค่าน้อยตามต้องการของเรา หมายถึงสำหรับจำนวนจริงทุก ๆ ตัว ε, $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ ดังนั้นจะได้ว่า

ฟังชั่น f จะเข้าใกล้ลิมิต L ที่ a ก็ต่อเมื่อสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ทุกตัว เราสามารถทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อกำหนดให้ $|x - a|$ มีค่าน้อยพอสมควร และ $x \neq a$

เมื่อกล่าวว่า เราสามารถทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ โดยกำหนดให้ $|x-a|$ มีค่าน้อยพอสมควร เราหมายถึง สามารถหาจำนวนจริง $\delta, \delta > 0$ ซึ่งถ้า - $|x - a| < \delta$ และ $x \neq a$ จะทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ (จะเห็นว่าค่า δ ขึ้นอยู่กับ ε)

จาก $|x - a| < \delta$ และ $x \neq a$ ก็คือ $0 < |x - a| < \delta$

จาก ถ้า $0 < |x - a| < \delta$ จะทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$

ใน E^1 ถ้าเขียนในรูปเนเบอร์ฮูดได้ว่า

ถ้า $x \in$ ดีลีตเนเบอร์ฮูด $N'(a,\delta)$ จะทำให้ $f(x) \in$ เนเบอร์ฮูด $N(L, \delta)$ เมื่อ $x \in D_f$

ดังนั้น $f(N'(a, \delta))$ ถูกบรรจุอยู่ใน $N(L, \varepsilon)$

$$\therefore \quad f(N'(a, \delta)) \subset N(L, \varepsilon)$$

หรือ $$N'(a, \delta) \subset f^{-1}(N(L, \varepsilon))$$

ดังนั้นเขียนนิยามของลิมิตฟังชั่นได้ว่า

<u>นิยาม 5.12.1</u> ใน E^1 ถ้า $E \subset E^1$ และ $f : E \dashrightarrow E^1$ ซึ่งมี x_0 เป็นจุด-ลิมิตของ E เรากล่าวว่า f มีลิมิต L ที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ สำหรับเนเบอร์ฮูด $N(L, \varepsilon)$ ทุกตัว ของ L จะมีเนเบอร์ฮูด - $N(x_0, \delta)$ ของจุด x_0 ซึ่งทำให้

$$f(N'(x_0, \delta)) \subset N(L, \varepsilon)$$

ถ้าไม่มีจำนวน L ซึ่งมีคุณสมบัติตามนิยามแล้ว เรากล่าวว่าไม่มีลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ x_0

<u>ตัวอย่าง 5.12.1</u> ให้ $f : E^1 - \{1\} \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = (2x^2 + x - 3)/(x - 1)$
จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

<u>วิธีทำ</u> (ต้องพิสูจน์ว่า สำหรับ $N(5, \varepsilon)$ ทุกตัวใน E^1 จะมี $N(1, \delta)$ ของจุด 1 และ $N'(1, \delta) \neq \emptyset$ ซึ่งทำให้ $f(N'(1,\delta)) \subset N(5,\delta)$ หรือสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x - 1| < \delta$ แล้วจะได้ว่า $|f(x) - 5| < \varepsilon$

จาก $f(x) = (2x^2 + x - 3)/(x - 1)$

$\therefore \quad f(x) = 2x + 3 \qquad x \neq 1$

และจาก $0 < x - 1 < \delta$ จะได้ว่า $2|x - 1| < 2\delta$

จะได้ว่า $|2x - 2| < 2\delta$

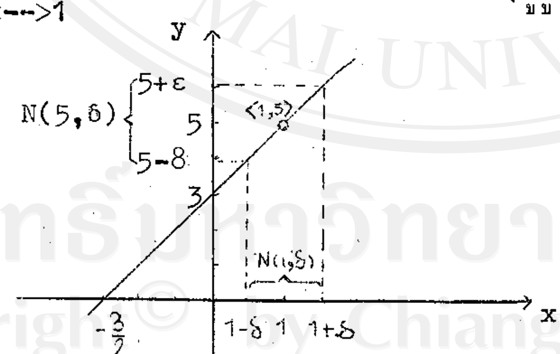
จะได้ว่า $|(2x + 3) - 5| < 2\delta$

เลือก $\delta \leq \varepsilon/2$ จะได้ว่า $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$

นั่นคือถ้า $x \in N'(1,\delta)$ จะได้ว่า $f(x) \in N(5, \varepsilon)$ เมื่อ $x \in D_f$

$\therefore \quad f(N'(1, \delta)) \subset N(5, \varepsilon)$

ดังนั้น $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$ (ดูรูปที่ 5.12.2)



รูปที่ 5.12.2

จากตัวอย่าง 5.12.1 อาจพิสูจน์อีกวิธีดังนี้

$\because$ f เป็นฟังชั่นไม่ลดลง

เนเบอร์ฮูด $N(1, \delta)$ บาวด์ข้างบนด้วย $1 + \delta$ และบาวด์ข้างล่างด้วย $1 - \delta$

$\therefore$ $f(1 - \delta) < f(x) < f(1 - \delta)$สำหรับ $x \in N'(1,\delta)$ ทุกตัว

และจะได้ว่า $f(N'(1,\delta)) \subset (f(1-\delta), f(1 + \delta))$

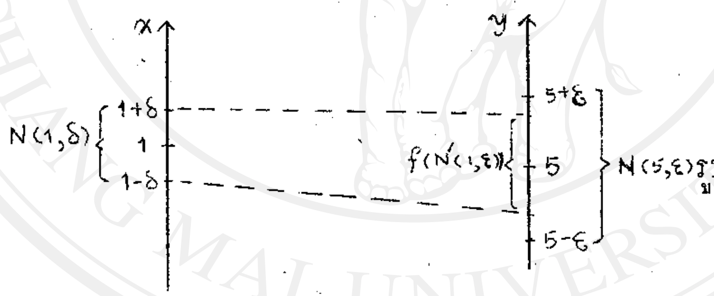
แต่ $f(1-\delta) = 2(1-\delta) + 3 = 5 - 2\delta$

และ $f(1 + \delta) = 2(1 + \delta) + 3 = 5 + 2\delta$

$\therefore$ $f(N'(1, \delta)) \subset (5 - 2\delta, 5 + 2\delta) = N(5, 2\delta)$

เลือก $\delta \le \varepsilon/2$ $f(N'(1, \delta)) \subset N(5, \varepsilon)$

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ (ดูรูปที่ 5.12.3)



รูปที่ 5.12.3

<u>ตัวอย่าง 5.12.2</u> ให้ $g : E^1 \to E^1$ ซึ่ง $g(x) = \begin{cases} |x| / x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ไม่เข้าใกล้จำนวนใด ๆ

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

สมมติให้ $\lim_{x \to 0} f(x) = b$

ให้ $N(0, \delta)$ เป็นเนเบอร์ฮูดของจุด 0 ใน D_g

$\therefore \quad f(N'(0,\delta)) = \{-1, 1\} \quad , \delta > 0$

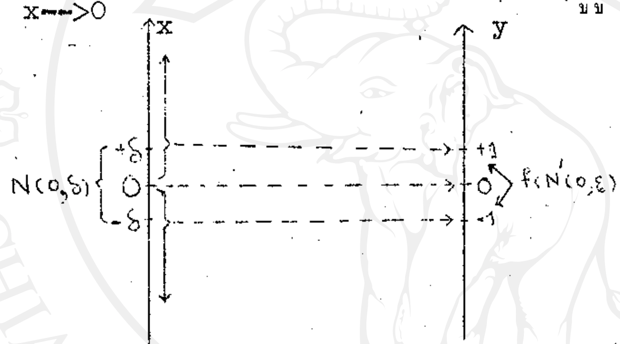
และ $N(b, \varepsilon)$ เป็นเนเบอร์ฮูด ที่จุด b

ถ้า $\varepsilon = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า $N(b, \frac{1}{2})$ ไม่สามารถมี 1, -1 บรรจุอยู่พร้อมกัน

$\therefore \quad f(N'(a, \delta)) \not\subset N(b, \varepsilon)$

ซึ่งขัดแย้งที่สมมติ

$\therefore \quad \lim_{x \to 0} f(x)$ ไม่เข้าใกล้จำนวนใด ๆ (ดูรูปที่ 5.12.4)



รูปที่ 5.12.4

<u>ทฤษฎี 5.12.2</u> ใน E^1 ถ้า $E \subset E^1$ และ $f : E \to E^1$ ซึ่งมี x_0 เป็นลิมิตของ E จะได้ว่า $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับซีเควนซ์ $\{x_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ทุกซีเควนซ์ ใน E ซึ่ง $x_n \neq x_0$ สำหรับ n ทุกตัวและ $\lim_{x \to \alpha} x_n = x_0$ จะได้ว่า $\lim_{n \to \alpha} f(x_n) = L$

<u>พิสูจน์</u> 1) ให้ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

ดังนั้น สำหรับเนเบอร์ฮูด $N(L,\varepsilon)$ ทุกตัวของ L จะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta)$ ของจุด x_0 ซึ่งทำให้ ถ้า $x \in N(x_0, \delta)$ จะได้ว่า $f(x) \in N(L, \varepsilon)$ เมื่อ $x \in D_f$ -- 1)

$\because \quad \{x_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ใน E ซึ่ง $x_n \neq x_0$ สำหรับ n

ทุกตัวและ $\lim_{n \to \alpha} x_n = x_0$

ดังนั้น ให้ $0 < \varepsilon = \delta$ จะมี $J \in I^+$ ซึ่ง $n \geq J$ จะได้ว่า

$$x_n \in N(x_0, \delta)$$

$\therefore$ สำหรับ $n \geq J$ จะได้ว่า $x_n \in N'(x_0, \delta)$ ($\because$ $x_n \neq x_0$ สำหรับ n ทุกตัว)

และ $x_n \in E$ $\therefore$ $f(x_n) \in N(L, \varepsilon)$ จาก 1)

ดังนั้น $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้า

2) สมมติว่า $\lim\limits_{x \to x_0} \neq L$

ดังนั้นจะมีเนเบอร์ฮูด $N(L, \varepsilon)$ ของ L สำหรับเนเบอร์ฮูด - $N(x_0, \delta)$ ทุกตัวของจุด x_0 ซึ่งทำให้ ถ้า $x \in N'(x_0, \delta)$ จะได้ว่า $f(x) \notin N(L, \varepsilon)$ เมื่อ $x \in D_f$ -(1)

ดังนั้น สำหรับ $n \in I^+$ ทุกตัว จะมี $x_n \in E$ ซึ่งถ้า $x_n \in N'(x_0, \frac{1}{n})$ จะได้ว่า $f(x_n) \notin N(L, \varepsilon)$

แต่ $\{x_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ใน E ซึ่งลู่เข้าสู่ x_0 และ $x_n \neq x_0$ สำหรับ - $n \in I^+$ ทุกตัว

และจะได้ว่า $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ L

ซึ่งขัดแย้งกับ $f(x_n) \notin N(L, \varepsilon)$ สำหรับ n ทุกตัว

$$\therefore \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

<u>ทฤษฎี 5.12.3</u> ให้ $f : E \to E^1$ ซึ่ง $E \subset E^1$ ถ้า $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L'$ x_0 เป็นจุดลิมิตของ E และ $L, L' \in E^1$ จะได้ว่า $L = L'$

พิสูจน์ สมมติว่า $L \neq L'$ ให้ $\delta = d(L, L')/3$

$\because$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ดังนั้นจะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta_1)$ ของจุด x_0 ที่ทำให้ $f(N'(x_0, \delta_1)) \subset N(L, \varepsilon)$ - 1)

$\because \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ดังนั้นจะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta_2)$ ของจุด x_0 ที่ทำให้

$$f(N'(x_0, \delta_2)) \subset N(L', \varepsilon)$$

ให้ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

จาก 1) จะได้ว่า $f(N'(x_0, \delta)) \subset N(L, \varepsilon)$

และ จาก 2) จะได้ว่า $f(N'(x_0, \delta)) \subset N(L', \varepsilon)$

แต่ $N(L, \varepsilon) \cap N(L', \varepsilon) \neq \emptyset$

ซึ่งขัดแย้งกัน $\therefore L = L'$

แบบฝึกหัดชุด 5.12

1. จงพิสูจน์ข้อความในแต่ละข้อว่าเป็นจริง

1.1 $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

1.2 $\lim_{x \to 3} \dfrac{4x^2 - 17x + 15}{x - 3} = 7$

1.3 $\lim_{x \to 1} \dfrac{5 - 8x + 3x^2}{1 - x} = 2$

1.4 $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$ เมื่อ $f : E^1 \to E^1$ และ $f(x) = c$

2. ให้ $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 1 & x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$

จงพิสูจน์ว่า ไม่ว่า x_0 จะเป็นจำนวนจริงใด ๆ f ไม่มีลิมิตที่ x_0

3. ให้ $f : E^1 \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = x^2$ จงหา δ ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้แต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

3.1 $f(N'(2, \delta)) \subset N(4, 1/2)$

3.2 $f(N'(1, \delta)) \subset N(1, 1/2)$

3.3 $f(N'(3, \delta)) \subset N(9, 1/2)$

4. ให้ $f : E^2 \longrightarrow E^1$ ซึ่ง $f(x, y) = x^2 + y^2$

4.1 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{\langle x,y\rangle \to \langle 1,1\rangle} f(x,y) = 2$

(โดยพิสูจน์ว่า $f[N'(\langle 1,1\rangle, \delta)] \subset N(2,\varepsilon)$ ถ้า $\delta = \sqrt{2+\varepsilon} - \sqrt{2}$

4.2 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{\langle x,y\rangle \to \langle 2,1\rangle} f(x,y) = 5$ $(\delta = \sqrt{5+\varepsilon} - \sqrt{5})$

4.3 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{\langle x,y\rangle \to \langle a,b\rangle} f(x,y) = a^2+b^2$ ซึ่ง $\langle a,b\rangle$ เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ (พิสูจน์ว่า $f[N'(\langle a,b\rangle,\delta)] \subset N(a^2+b^2, \delta)$ ถ้า $\delta = \sqrt{a^2+b^2+\varepsilon} - \sqrt{a^2+b^2}$)

5.13 คุณสมบัติของลิมิต (Properties of Limits)

ก่อนจะกล่าวถึงคุณสมบัติของลิมิต จะกล่าวถึงผลบวก ผลต่าง ผลคูณ และผลหารของฟังก์ชันจำนวนจริงก่อน

ถ้า A, B เป็นสับเซ็ทของ E^1 จะให้ความหมายของโอเปอเรชั่น ต่อไปนี้ดังนี้

$$A + B = \{a + b \ / \ a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

$$A - B = \{a - b \ / \ a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

$$A \cdot B = \{ab \ / \ a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

$$A \div B = \{a \div b \ / \ a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

นิยาม 5.13.1 ถ้า $f: E^1 \to E^1$ และ $g: E^1 \to E^1$ $f+g$ และ $f-g$ เป็นฟังก์ชั่นซึ่งมีโดเมนเป็น $D_f \cap D_g$ และ

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ สำหรับ $x \in D_f \cap D_g$ ทุกตัว

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ สำหรับ $x \in D_f \cap D_g$ ทุกตัว

เราเรียกฟังก์ชั่น $f + g$ และ $f - g$ ว่าผลบวกและผลต่างของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ

<u>ตัวอย่าง 5.13.1</u> ถ้า $f : E^1 \rightarrow E^1$ และ $g: E^1 \rightarrow E^1$ ซึ่ง $f(x) = x + 1$

และ $g(x) = \sqrt{x}$ จงหา $f+g$ และ $f-g$

<u>วิธีทำ</u> $\because$ $D_f = \{x/x \in E^1\}$ และ $D_g = \{x/x \geq 0\}$

ดังนั้น $D_{f+g} = D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{x/x \geq 0\}$

$\therefore$ $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$= (x + 1) + \sqrt{x} = x + \sqrt{x} + 1$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$= (x + 1) - \sqrt{x} = x - \sqrt{x} + 1$

<u>นิยาม 5.13.2</u> ถ้า $f:E^1 \rightarrow E^1$ และ $g: E^1 \rightarrow E^1$. fg และ f/g เป็นฟังชั่น ซึ่ง $fg(x) = f(x). g(x)$ และ $f/g(x) = f(x)/ g(x)$ ซึ่ง $g(x) \neq 0$ $D_{fg} = D_f \cap D_g$ และ $D_{f/g} = \{x/x \in D_f \cap D_g$ และ $g(x) \neq 0\}$ เรียก fg วาผลคูณของ f และ g เรียก f/g วาผลหารของ f และ g

<u>ตัวอย่าง 5.13.2</u> ถ้า $f:E^1 \rightarrow E^1$ และ $g:E^1 \rightarrow E^1$ ซึ่ง $f(x) = x + 1$

และ $g(x) = \sqrt{x-1}$ จงหา fg และ f/g

<u>วิธีทำ</u> $\because$ $D_f = \{x / x \in E^1\}$ และ $D_g = \{x / x \geq 1\}$

$\therefore$ $fg(x) = f(x) . g(x) = (x + 1)(\sqrt{x - 1})$

และ $f/g(x) = f(x) / g(x) = (x + 1)/(\sqrt{x - 1})$

จะได้วา $D_{fg} = D_f \cap D_g = \{x / x \geq 1\}$

และ $D_{f/g} = \{x/x \geq 1$ และ $x \neq 1\} = \{x/x > 1\}$

<u>ทฤษฎี 5.13.3</u> ถ้า $f: E^1 \dashrightarrow E^1$ ให้ $E \subset E^1$ จะได้ว่า

ก. $[f + g](E) \subset f(E) + g(E)$

ข. $[f - g](E) \subset f(E) - g(E)$

ค. $[fg](E) \subset f(E).\ g(E)$

ง. $[f/g](E) \subset f(E)/\ g(E)$; $g(E) \neq 0$

<u>พิสูจน์</u> ก. $[f + g](E) \subset f(E) + g(E)$

ให้ $y \in [f+g](E)$

$\therefore$ จะมี $x \in E$ ซึ่ง $[f + g](x) = y$

และ $[f+g](x) = f(x) + g(x) = y$ (นิยาม 5.13.1)

ดังนั้น $f(x) \in f(E)$ และ $g(x) \in g(E)$ (นิยาม 4.3.1, และ $x \in E$)

$\therefore\ f(x) + g(x) \in f(E) + g(E)$

$\therefore\ y \in f(E) + g(E)$

ดังนั้น $[f + g](E) \subset f(E) + g(E)$

ข้อ ข., ค, และ ง. ให้เป็นแบบฝึกหัด

<u>เลมมา 5.13.4</u> ถ้า $p, q \in E^1$ และ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า

$$N(p, \varepsilon/2) + N(q, \varepsilon/2) \subset N(p + q, \varepsilon)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $r \in N(p, \varepsilon/2)$ และ $s \in N(q, \varepsilon/2)$

$\therefore\ r + s \in N(p, \varepsilon/2) + N(q, \varepsilon/2)$

จาก $r \in N(p, \varepsilon/2)$ จะได้ว่า $|r-p| < \varepsilon/2$

และ $s \in N(q, \varepsilon/2)$ จะได้ว่า $|s-q| < \varepsilon/2$

$$\begin{aligned} |(r + s) - (p + q)| &= |(r - p) + (s - q)| \\ &\leq |r - p| + |s - q| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore\ r + s \in N(p + q, \varepsilon)$

นั่นคือ $N(p, \varepsilon/2) + N(q, \varepsilon/2) \subset N(p, q, \varepsilon)$

<u>เลมมา 5.13.5</u> ถ้า $p, q \in E^1$ และ $\varepsilon > 0$ จะได้

$$N(p, \varepsilon/2) - N(q, \varepsilon/2) \subset N(p - q, \varepsilon)$$

ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

<u>เลมมา 5.13.6</u> ถ้า $p, q \in E^1$ และ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า

$$N(p, \varepsilon').\ N(q, \varepsilon') \subset N(pq, \varepsilon)$$

ซึ่ง $\varepsilon' \leq 1$ และ $\varepsilon' \leq \varepsilon/(|p| + |q| + 1)$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $r \in N(p, \varepsilon')$ และ $s \in N(q, \varepsilon')$ - 1)

$\therefore\ rs \in N(p, \varepsilon').\ N(q, \varepsilon')$

จาก 1) จะได้ว่า $|r-p| < \varepsilon'$ และ $|s-q| < \varepsilon'$

$$\begin{aligned} |rs - pq| &= |rs - rq + rq - pq| \\ &= |r(s-q) + (r - p)q| \\ &\leq |r||s-q| + |q||r-p| \\ &< |r|\varepsilon' + |q|\varepsilon' = (|r| + |q|)\varepsilon' \\ &< (|p| + 1 + |q|)\varepsilon' \\ &\qquad \because |r| - |p| \leq |r - p| < \varepsilon' \leq 1 \\ &< \varepsilon \qquad \because \varepsilon' \leq \varepsilon/(|p| + |q| + 1) \end{aligned}$$

$\therefore\ rs \in N(pq, \varepsilon)$

ดังนั้น $N(p, \varepsilon').\ N(q, \varepsilon') \subset N(pq, \varepsilon)$

<u>เลมมา 5.13.7</u> ถ้า $p, q \subset E^1$ และ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $N(p, \varepsilon') \div N(q, \varepsilon') \subset N(p/q, \varepsilon)$ ซึ่ง $q \neq 0$; $\varepsilon' \leq |q| / 2$ และ $\varepsilon' \leq q^2 . \varepsilon / 2(|p| + |q|)$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $r \in N(p, \varepsilon')$ และ $s \in N(q, \varepsilon')$; $s \neq 0$ — 1)

$\therefore$ $r/s \in N(p, \varepsilon')/ N(q, \varepsilon')$ $s, q \neq 0$

จาก 1) จะได้ว่า $|r - p| < \varepsilon'$ และ $|s - q| < \varepsilon'$ — 2)

แต่ $|s - q| = |q - s| < \varepsilon'$

$\therefore |q| - |s| \leq |q - s| < \varepsilon'$

$|s| > |q| - \varepsilon'$

$|s| > |q| - |q|/2 = |q|/2$ $\because \varepsilon' \leq |q|/2$

$$
\begin{aligned}
|r/s - p/q| &= |rq - ps| / |qs| \\
&= |rq - pq + pq - ps| / |qs| \\
&\leq (|rq - pq| + |pq - ps|)/ |q||s| \\
&\leq (|q||r - p| + |p||q - s|) / |q||s| \\
&< (|q|\varepsilon' + |p|\varepsilon') / |q||s|, \\
&\qquad (|r - p| < \varepsilon', |q - s| < \varepsilon') \\
&< \varepsilon' (|p| + |q|) / |q| . \tfrac{|q|}{2} \qquad |s| > |q|/2 \\
&< 2\varepsilon' (|p| + |q|)/q^2 \\
&< \varepsilon \qquad \varepsilon' \leq q^2\varepsilon / 2(|p| + |q|)
\end{aligned}
$$

$\therefore r/s \in N(p/q, \varepsilon)$

ดังนั้น $N(p, \varepsilon')/ N(q, \varepsilon') \subset N(p/q, \varepsilon)$

ซึ่ง $q \neq 0$

<u>ตัวอย่าง 5.13.3</u> ก. $N(1,4) + N(2,4) \subset N(3, 8)$ เลมมา 5.13.4

$\because N(1,4) = (-3,5),\ N(2,4)=(-2,6),\ N(3,8)=(-5,11)$

$\therefore (-3,5) + (-2,6) \subset (-5,11)$

ข. $N(1,4) - N(2,4) \subset N(-1,8)$ เลมมา 5.13.5

ดังนั้น $(-3, 5) -(-2,6) \subset (-9,7)$

ค. $N(3, 1/2) N(2, 1/2) \subset N(6,4)$ เลมมา 5.13.6

ดังนั้น $(5/2, 7/2)(3/2, 5/2) \subset (2,10)$

จะเห็นว่า $p = 3,\ q = 2,\ \varepsilon = 4$ และ $\varepsilon' = 1/2$

ซึ่ง $1/2 < \varepsilon/(|p|+|q|+ 1) = 4/(3 + 2 + 1)$ $(\varepsilon' \leq \varepsilon/(|p|+|q| + 1)) < 2/3$

(สำหรับ $\varepsilon = 4$ นั้น เราสามารถให้ $\varepsilon' = 2/3$ ได้ ซึ่งจะทำให้ $N(3,2/3)\ N(2,2/3) \subset N(6,4)$

ง. $N(3,1/2) \div N(2,1/2) \subset N(3/2,5/4)$ เลมมา 5.13.7

จะเห็นว่า $p = 3,\ q = 2,\ \varepsilon' = 1/2$

ซึ่ง $1/2 \leq 4\varepsilon/\ 2(3 + 2) = 2\varepsilon/5$,

$(\varepsilon' \leq q^2\ \varepsilon/2(\ |p| - |q|)$

$\frac{5}{4} \leq \varepsilon$

$\therefore \varepsilon = 5/4$

และจะได้ว่า $(5/2, 7/2) \div (3/2, 5/2) \subset (1/4, 11/4)$

<u>ทฤษฎี 5.13.8</u> ถ้า $f: E^1 \to E^1$ และ $g: E^1 \to E^1$ ให้ $\lim_{x \to a} f(x) = b$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = c$ ซึ่ง a จุดลิมิตใน E^1 จะได้ว่า

ก. $\lim_{x \to a} [f+q](x) = b+c$ ข. $\lim_{x \to a} [f-g](x) = b-c$

ค. $\lim_{x \to a} [fg](x) = bc$ ง. $\lim_{x \to a} [f/g](x) = b/c$; $c \neq 0$

พิสูจน์ ก. $\lim_{x \to a} [f+g](x) = b + c$

พิจารณาเนเบอร์ฮูด $N(b+c, \varepsilon)$ ของจุด $b + c$ ใน E^1

$\because \lim_{x \to a} f(x) = b$ ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon/2 > 0$ ทุกตัวจะมี $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้

$$f(N'(a, \delta_1)) \subset N(b, \varepsilon/2) \qquad - 1)$$

$\because \lim_{x \to a} g(x) = c$ ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon/2 > 0$ ทุกตัวจะมี $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้

$$f(N'(a, \delta_2)) \subset N(c, \varepsilon/2) \qquad - 2)$$

ให้ $\delta > 0$ และ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$\therefore [f+g](N'(a,\delta)) \subset f(N'(a,\delta)) + g(N'(a,\delta))$ ทฤษฎี 5.13.3

$\subset f(N'(a,\delta_1)) + g(N'(a,\delta_2))$

$\subset N(b, \varepsilon/2) + N(c, \varepsilon/2)$ จาก 1)และ2)

$\subset N(b + c, \delta)$ เลมมา 5.13.4

$$\therefore \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = b + c$$

ค. $\lim_{x \to a} [f.g](x) = b.c$

พิจารณาเนเบอร์ฮูด $N(bc, \varepsilon)$ ของจุด bc ใน E^1

ให้ $\varepsilon' > 0$ เลือก $\varepsilon' \leq 1$ และ $\varepsilon' \leq \varepsilon/(|b| + |c| + 1)$

$\because \lim_{x \to a} f(x) = b$ ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้

$$f(N'(a, \delta_1)) \subset N(b, \varepsilon') \qquad -1)$$

$\because \lim_{x \to a} g(x) = c$ ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้

$$g(N'(a, \delta_1)) \subset N(c, \varepsilon') \qquad -2)$$

ให้ $\delta > 0$ และเลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\therefore [fg](N'(a,\delta)) \subset f(N'(a,\delta))\, g(N'(a,\delta)) \qquad \text{ทฤษฎี 5.13.3}$$

$$\subset f(N'(a,\delta_1))\, g(N'(a,\delta_2))$$

$$\subset N(b, \varepsilon')\, N(c, \varepsilon') \qquad \text{ข้อ 1) และ 2)}$$

$$\subset N(bc, \varepsilon) \qquad \text{เลมมา 5.13.7}$$

ข้อ ข. และ ง. ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

จากทฤษฎี 5.13.8 สามารถเขียนได้อีกรูปหนึ่งดังนี้

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} [f(x)/ g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)/ \lim_{x\to a} g(x); \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

เนื้อเรื่องในบทนี้บางตอนสามารถกล่าวในรูปทั่ว ๆ ไปได้ เช่น ซีเควนซ์อาจกล่าวเป็นฟังชั่น $f: I^+ \to M$ ซึ่ง M เป็นเมตริกเซ็ท หรือในเรื่องลิมิตก็เป็นฟังชั่น $f: M \to E^1$ ได้เช่นเดียวกัน

<u>แบบฝึกหัดชุด 5.13</u>

1. พิสูจน์ทฤษฎี 5.13.3 ข้อ ข. , ค และ ง.

2. พิสูจน์เลมมา 5.13.5

3. พิสูจน์ทฤษฎี 5.13.8 ข้อ ข. และ ง.

4. ใช้เลมมาพิสูจน์แต่ละข้อต่อไปนี้

   4.1 $N(1, 2) + N(4,2) \subset N(5,4)$

4. 4.2 $(3,5) + (1,3) \subset (4,8)$

4.3 $(3,7) - (1,5) \subset (-2,6)$

4.4 $(1,2)(2,3) \subset (5/4, 25/4)$

4.5 $(0,4) \div (2,6) \subset (0,2)$

5. ให้ $f : E^1 \dashrightarrow E^1$ และ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$ เมื่อ x_0 เป็นจุดลิมิตของ E^1 และ $k \in R$ จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = kb$

5.14 ลิมิตข้างเดียว (One- sided Limits)

การพิจารณาลิมิตที่จุด x_0 ใด ๆ ของ $f: E^1 \dashrightarrow E^1$ นั้น เราอาจ-จะพิจารณาลิมิตข้างเดียวทางซ้ายของจุด x_0 หรือทางขวาของจุด x_0 แทนได้ ซึ่งจะให้นิยามของลิมิตข้างเดียวดังนี้

<u>นิยาม 5.14.1</u> ให้ $f : E^1 \dashrightarrow E^1$ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L ขณะ x เข้าใกล้จำนวนจริง x_0 ทางขวา ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x_0 < x < x_0 + \delta$ จะได้ว่า $|f(x)-L| < \varepsilon$

เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$ สำหรับ L เรียกว่าลิมิตข้างเดียวทางขวา หรือลิมิตทางขวา (right-hand limit)

ถ้าไม่มีจำนวน L ซึ่งมีคุณสมบัติดังกล่าว เรากล่าวว่าไม่มีลิมิตทางขวาของ f ที่จุด x_0

<u>นิยาม 5.14.2</u> ให้ $f : E^1 \dashrightarrow E^1$ $f(x)$ เข้าใกล้จำนวนจริง L ขณะ x เข้าใกล้จำนวนจริง x_0 ทางซ้าย ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x_0 - \delta < x < x_0$ จะได้ว่า

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

เขียนแทนด้วย $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ สำหรับ L เรียกว่าลิมิตข้างเดียวทางซ้าย หรือลิมิตทางซ้าย (left - hand limit)

ถ้าไม่มีจำนวน L ซึ่งมีคุณสมบัติดังกล่าว เรากล่าวว่าไม่มีลิมิตทางซ้ายของ f ที่จุด x_0

<u>ตัวอย่าง 5.14.1</u> ก) พิจารณาฟังชั่น
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

จะได้ว่า $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

ข) พิจารณาฟังชั่น
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 3-x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

จะได้ว่า $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

<u>ทฤษฎี 5.14.3</u> ให้ $f: E^1 \to E^1$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

<u>พิสูจน์</u> 1) ให้ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมี $\delta > 0$ ซึ่งจะได้ว่า $|f(x)-L| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x - x_0| < \delta$

จาก $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x - x_0| < \delta$

$\therefore$ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ เมื่อ $x_0 - \delta < x < x_0$ และ $x \neq x_0$

$L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$ เมื่อ $x_0-\delta<x<x_0$ และ $x_0<x<x_0+\delta$

$\therefore$ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ เมื่อ $x_0 - \delta < x < x_0$

และ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ เมื่อ $x_0 < x < x_0 + \delta$

ดังนั้น $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ และ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

2) ให้ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$

จาก $\lim_{x \to x_0^+} f(x)=L$ ให้ $\varepsilon > 0$ เราสามารถหา $\delta_1>0$ ที่ทำให้

$|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $x_0 < x < x_0+ \delta$ -1)

$\lim_{x \to x_0^-} f(x)=L$ ให้ $\varepsilon > 0$ เราสามารถหา $\delta_2> 0$ ที่ทำให้

$|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $x_0- \delta < x < x_0$ -2)

จาก (1) และ (2) $|f(x) - L| < \varepsilon$ เมื่อ $x_0- \delta < x< x_0 + \delta$

และ $x \neq x_0$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = L$$

<u>ตัวอย่าง 5.14.2</u> จากตัวอย่าง 5.14.1

1. จากข้อ ก. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ และ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$

   ดังนั้น $\lim_{x \to 0} f(x)$ ไม่มี

2. จากข้อ ข. $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ และ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

   ดังนั้น $\lim_{x \to 1} f(x)$ ไม่มี

3. พิจารณา $g(x) = \begin{cases} 1 + x & x < 1 \\ 3 - x & x \geq 1 \end{cases}$

   จะได้ว่า $\lim_{x \to 1^+} g(x) = 2$ และ $\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2$

   $\therefore \lim_{x \to 1} g(x) = 2$

<u>แบบฝึกหัดชุด 5.14</u>

1. ให้ $f : E^1 - \{0\} \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = (x^2 + x)/|x|$

   จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ และ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

   (ข้อแนะนำ $f(x) = x + 1$ เมื่อ $x > 0$ และ $f(x) = -x - 1$ เมื่อ $x < 0$

2. จงเขียนกราฟของฟังชั่นต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = (|x| / x) + 5$

   2.2 $g(x) = \left[|x - 1| / x - 1 \right] + 2x + 1$

   จงหา $\lim_{x \to 0^-} f(x)$, $\lim_{x \to 0^+} f(x)$, $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ และ $\lim_{x \to 1^+} g(x)$

3. ให้ $\lim_{x \to a^-} f(x) = b$ และ $\lim_{x \to a^+} f(x) = c$ ซึ่ง $b \neq c$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ ไม่มี

   (ข้อแนะนำ ให้ $\varepsilon = d(b, c)/4$ และพิจารณา $N(b, \varepsilon)$ และ $N(c, \varepsilon)$ โดยใช้พิสูจน์ทางอ้อม)