บทที่ 6

ความต่อเนื่อง และอนุพันธ์ (Continuity and Derivative)

ในบทนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันต่อเนื่อง และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน หรือฟังก์ชันที่ - ดิฟเฟอเรนชิเบิล (differentiable)

สำหรับเรื่องฟังก์ชันต่อเนื่อง จะกล่าวถึงฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดและต่อเนื่องบนช่วงในรูปเนเบอร์ฮูด และชี้ให้เห็นถึงข้อแตกต่างจากลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งฟังก์ชันต่อเนื่องก็เป็นลิมิตของฟังก์ชันเช่นเดียวกัน แต่จุดที่ต่อเนื่องจะเป็นจุดลิมิตหรือไม่เป็นจุดลิมิตก็ได้ แต่ต้องเป็นจุดซึ่งอยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน ซึ่งต่างจากลิมิตของฟังก์ชัน นอกจากนี้จะกล่าวถึงชนิดของฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง และฟังก์ชันที่ต่อเนื่องให้สัมพันธ์กับลิมิตของฟังก์ชันและซีเควนซ์ จะนิยามผลบวก ผลต่าง ผลคูณ ผลหารและคอมโพสิทฟังก์ชัน ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ซึ่งผลที่ได้ต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย ชี้ให้เห็นความสัมพันธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องกับเซ็ทเปิดและเซ็ทปิด และฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซ็ทที่คอมแพคต์อิมเมจของฟังก์ชัน ต้องคอมแพคต์ด้วย ซึ่งจะนำไปใช้ในเรื่องอินทิกรัล กล่าวถึงทฤษฎีอินเตอร์มีเดียท (Intermediate value Theorem) และเรื่องสุดท้ายได้แก่ ฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ (uniformly continuous) ซึ่งจะนำไปใช้ในเรื่องอินทิกรัล สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอนั้นได้ชี้ให้เห็นข้อแตกต่างจากฟังก์ชันต่อเนื่อง และคุณสมบัติที่ทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

สำหรับเรื่องอนุพันธ์ ก็เป็นลิมิตของฟังก์ชันเช่นกัน ซึ่งจุดที่ x เข้าใกล้นั้นต้องเป็นจุดลิมิต และจุดซึ่งอยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน ถ้าลิมิตของฟังก์ชันมี เรากล่าวว่าฟังก์ชันดิฟเฟอเรนชิเบิลที่จุดนั้น กล่าวถึงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องกับฟังก์ชันที่ - ดิฟเฟอเรนชิเบิล ฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนชิเบิลที่จุดไหน จุดนั้นฟังก์ชันจะมีความต่อเนื่อง แต่ฟังก์ชันต่อเนื่องอาจไม่ดิฟเฟอเรนชิเบิลที่จุดต่อเนื่อง กล่าวถึงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันที่ดิฟเฟอเรนชิเบิลกับซีเควนซ์

สำหรับในบทนี้ต้องการชี้ให้เห็นความสัมพันธ์ของจุดลิมิต ซีเควนซ์ ลิมิตของฟังชั่น ฟังชั่นต่อเนื่อง และฟังชั่นที่ดิฟเฟอเรนชิเบิล ในเรื่องฟังชั่นต่อเนื่อง และอนุพันธ์ ยังมีทฤษฎีที่สำคัญ ๆ อีกมาก แต่จะไม่กล่าวถึง ซึ่งผู้ศึกษาได้ศึกษาในวิชา-แคลคูลัสแล้ว ดังนั้นทฤษฎีสำคัญ ๆ ของทั้งสองเรื่องจึงให้ไว้เป็นแบบฝึกหัด

6.1 <u>ฟังชั่นต่อเนื่อง</u> (Continuous Function)

จากลิมิตของฟังชั่น f เมื่อ x เข้าใกล้ x_0 เราไม่คำนึงว่า x_0 จะอยู่ใน D_f หรือไม่ และกรณี x_0 อยู่ใน D_f $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ อาจไม่เท่ากับ $f(x_0)$ ก็ได้ แต่ก็มีกรณีที่ x_0 อยู่ใน D_f แล้ว $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ซึ่งเรามีนิยามดังต่อไปนี้

<u>นิยาม 6.1.1</u> ให้ $f : E^1 \to E^1$ f จะมีความต่อเนื่องที่ $x = x_0$ (f is continuous at x_0) ก็ต่อเมื่อ

(1) x_0 อยู่ใน D_f และหาค่า $f(x_0)$ ได้

(2) หาค่า $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ได้

และ (3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ถ้าฟังชั่น f ไม่มีคุณสมบัติข้อใดข้อหนึ่ง เรากล่าวว่า f ไม่มีความต่อเนื่องที่ x_0 (f is discontinuous at x_0)

จากนิยาม คุณสมบัติข้อ (2) และ (3) นั้น $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ อาจจะหาค่าได้แต่ไม่เท่ากับ $f(x_0)$ ก็ได้ ถ้าเท่ากันจึงจะสอดคล้องคุณสมบัติข้อ (3) จากข้อ (3) ต้องพิสูจนว่า $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$ โดยใช้นิยาม 5.12.1 ในเรื่องลิมิต แต่ในลิมิต x_0 เป็นจุดลิมิต ซึ่ง x_0 อาจจะอยู่หรือไม่อยู่ใน D_f ก็ได้ $(x \neq x_0)$ สำหรับความต่อเนื่องนั้น x_0 ต้องอยู่ใน D_f

ซึ่งจะทำให้ $x = x_0$ ดังนั้นนิยามที่ได้ใหม่ก็คือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $|x - x_0| < \delta$ จะได้ว่า $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ หรือ สำหรับเนเบอร์-ฮูด $N(f(x_0), \varepsilon)$ ทุกตัวของ $f(x_0)$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta)$ ของจุด $x_0 \in D_f$ ซึ่ง $f(N(x_0, \delta)) \subset N(f(x_0, \varepsilon))$ จะต่างจากลิมิตของฟังชั่นก็คือ $N(x_0, \delta)$ ซึ่งในลิมิตของฟังชั่นเป็น $N'(x_0, \delta)$

จากนิยาม f มีความต่อเนื่องที่ $x = x_0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

<u>ตัวอย่าง 6.1.1</u> พิจารณาฟังชั่น $f(x) = (2x^2 + x - 3)/(x - 1)$

จะได้ว่า $f(x) = 2x + 3 \quad ; \quad x \neq 1$

ดังนั้นจะหาค่า $f(1)$ ไม่ได้

$\therefore$ f ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x = 1$

แต่ถ้าให้ $f(x) = \begin{cases} (2x^2 + x - 3)/(x - 1) & x \neq 1 \\ 5 & x = 1 \end{cases}$

เราทราบว่า $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$ (ตัวอย่าง 5.12.1)

และ $f(1) = 5$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

ดังนั้น f จะเป็นฟังชั่นต่อเนื่องที่ $x = 1$

เรียก f ว่าไม่มีความต่อเนื่องชนิด รีมูฟ (removable discontinuous) ที่ $x = 1$

สำหรับฟังชั่น f ที่ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $x = x_0$ นั้น ถ้าเรากำหนดค่า $f(x_0)$ แล้วทำให้ f มีความต่อเนื่องที่ x_0 เรากล่าวว่า f(x) มีความไม่ต่อเนื่องชนิดรีมูฟ (removable discontinuous) ที่ $x = x_0$

ตัวอย่าง 6.1.2 พิจารณาฟังชั่น

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

เราทราบว่า $\lim_{x \to 0} g(x)$ หาค่าไม่ได้ (ตัวอย่าง 5.12.2)

ดังนั้น g ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$

และจะเห็นว่า $\lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$ และ $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1$

สำหรับฟังชั่นที่ไม่มีความต่อเนื่องที่จุดหนึ่ง โดยที่ลิมิตข้างซ้ายและลิมิตข้างขวาของฟังชั่นนั้นไม่เท่ากัน ฟังชั่นชนิดนี้เรียกว่า ฟังชั่นที่ไม่มีความต่อเนื่องชนิดกระโดด (jump discontinuity) ซึ่งไม่สามารถทำให้มีความต่อเนื่อง เช่นความไม่ต่อเนื่องชนิดรีมูฟ ได้

ข้อสังเกต 1. คำนิยามอีกแบบหนึ่ง ซึ่งมีความหมายเหมือนกับนิยาม 6.1.1 ก็คือ ฟังชั่น f มีความต่อเนื่องที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ สำหรับเนเบอร์ฮูด $N(f(x_0), \varepsilon)$ ทุกตัวของจุด $f(x_0) \in R_f$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta)$ ของจุด $x_0 \in D_f$ ซึ่ง

$$f(N(x_0, \delta)) \subset N(f(x_0), \varepsilon)$$

2. ฟังชั่น f มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) ก็ต่อเมื่อ f มีความต่อเนื่องที่ x สำหรับ x ทุกตัวในช่วง (a, b)

ฟังชั่น f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ ก็ต่อเมื่อ

2.1 f มีความต่อเนื่องบน (a, b)

2.2 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ และ $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

<u>ตัวอย่าง 6.1.3</u> พิจารณา

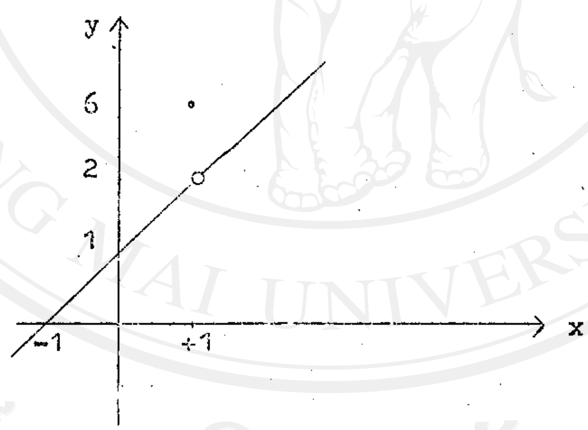
$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 6 & x = 1 \end{cases}$$

เราทราบว่า $\lim\limits_{x \to 1} h(x) = 2$

แต่ $h(1) = 6$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 1} h(x) \neq h(1)$

แสดงว่า h ไม่มีความต่อเนื่องที่ x = 1 (ดูรูปที่ 6.1.1)



<u>รูปที่ 6.1.1</u>

<u>ตัวอย่าง 6.1.4</u> พิจารณา $f : E^1 \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $f(x) = x^2$ จะได้ว่า f เป็นฟังชั่นที่มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดใน D_f

(การพิสูจน์ว่า f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดใน E^1 นั้น สมมติ $x_0 \in E^1$ เป็นจุดใด ๆ และพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ นั่นคือ

สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $|x - x_0| < \delta$ จะได้ว่า $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ หรือ

$f(N(x_0, \delta)) \subseteq N(x_0^2, \varepsilon))$

<u>พิสูจน์</u> กรณี 1) ถ้า $x_0 \geq 0$

สำหรับ $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|$

ถ้า $|x - x_0| < \delta$ จะได้ว่า

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$2x_0 - \delta < x + x_0 < 2x_0 + \delta$$

$$-2x_0 - \delta < x + x_0 < 2x_0 + \delta \qquad \because -2x_0 \leq 2x_0$$

$$-(2x_0 + \delta) < x + x_0 < 2x_0 + \delta$$

$$\therefore \quad |x + x_0| < 2x_0 + \delta \qquad \because 2x_0 + \delta \geq 0$$

$$\therefore \quad |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0||x + x_0| < \delta(2x_0 + \delta)$$

เลือก $\delta \leq \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0$

จะได้ว่า $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$\therefore$ ถ้า $|x - x_0| < \delta$ และ $\delta \leq \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0$ จะได้ว่า

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

<u>กรณี 2</u> ถ้า $x_0 < 0$

เลือก $\delta \leq \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + x_0$

ถ้า $|x - x_0| < \delta$ จะได้ว่า $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ดังนั้น $\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0| = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - x_0$ ถ้า $x_0 \geq 0$

$= \sqrt{x_2^2 + \varepsilon} + x_0$ ถ้า $x_0 < 0$

ดังนั้นจากทั้งสองกรณีจะได้ว่า สำหรับเนเบอร์ฮูด $N(f(x_0), \varepsilon)$ ทุกตัวของจุด $f(x_0)$ ใน E^1 จะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta)$ ของจุด $x_0 \in E^1$ ซึ่งถ้า $\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x|$ จะได้ว่า

$$f(N(x_0, \delta)) \subset N(x_0^2, \varepsilon)$$

$\therefore$ f มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดบน E^1

สำหรับการหาค่า δ นั้น ให้สมมติ $\delta(2x_0 + \delta) \leq \varepsilon$ แล้วแก้สมการหาค่า δ

จากนิยามลิมิตของฟังก์ชันและนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชันนั้น สำหรับฟังก์ชัน $f : E^1 \dashrightarrow E^1$ มีความต่อเนื่องที่ x_0 ซึ่ง $x_0 \in D_f$ ถ้า x_0 ไม่ใช่จุดลิมิต f ก็มีความต่อเนื่องที่ x_0 เช่นกัน สมมติ $f : E \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $x_0 \in E \subset E^1$ และ x_0 ไม่ใช่จุดลิมิตของ E

สำหรับ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta > 0$ จะมี $x \in E$ ซึ่ง $x \in N(x_0, \delta)$ ดังนั้น $f(x) \in f(N(x_0, \delta))$ ถ้า $x = x_0$ จะได้ว่า $f(x) \in N(f(x_0), \varepsilon)$ นั่นคือ $f(N(x_0, \delta)) \subset N(x_0, \delta))$ จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่ x_0 ซึ่ง $x_0 \in D_f$ และ x_0 ไม่ใช่จุดลิมิต แต่ถ้า x_0 เป็นจุดลิมิตก็จะได้เช่นเดียวกัน ถ้าทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 6.1.2</u> ให้ $f : E \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $x_0 \in E \subset E^1$ และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ E จะได้ แต่ละข้อต่อไปนี้อีควิวาเลนซ์กัน

ก. f มีความต่อเนื่องที่ x_0

ข. f มีลิมิตที่จุด x_0 และ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ค. ถ้าซีเควนซ์ $\{x_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ x_0 ซึ่ง $x_n \in E$ สำหรับ n ทุกตัว และ $x_n \neq x_0$ จะได้ว่า $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ $f(x_0)$

<u>พิสูจน์</u> 1. สมมติข้อ ค) เป็นเหตุจะพิสูจน์ข้อ ข.

ถ้า $\lim\limits_{n \to \alpha} x_n = x_0$ และ $x_n \neq x_0$ ซึ่ง $x_n \in E$ สำหรับ n ทุกตัว จะได้ว่า $\lim\limits_{n \to \alpha} f(x_n) = f(x_0)$

$\therefore$ f จะมีลิมิตที่จุด x_0 และ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (ทฤษฎี 5.12.2)

2. สมมติข้อ ข. เป็นเหตุจะพิสูจน์ข้อ ก.

ให้ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ดังนั้นสำหรับเนเบอร์ฮูด $N(f(x_0), \varepsilon)$ ทุกตัวของจุด $f(x_0)$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta)$ ของจุด - $x_0 \in E$ ซึ่งทำให้

$$f(N'(x_0, \delta)) \subset N(f(x_0), \varepsilon)$$

นั่นคือ จะมี $x \in E$ ซึ่งถ้า $f(x) \in f(N'(x_0, \delta))$ จะได้ว่า $f(x) \in N(f(x_0), \varepsilon)$ ถ้า $x = x_0$ นั่นคือ $f(x_0) \in f(N(x_0, \delta))$ จะได้ว่า $f(x_0) \in N(f(x_0), \varepsilon)$

$$\therefore f(N(x_0, \delta)) \subset N(f(x_0), \varepsilon)$$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่ x_0

3. สมมติข้อ ก. เป็นเหตุ จะพิสูจน์ข้อ ค.

f มีความต่อเนื่องที่ x_0 ดังนั้นสำหรับ $N(f(x_0),\varepsilon)$ ของจุด $f(x_0)$ จะมี $N(x_0, \delta)$ ของจุด x_0 ซึ่งถ้า - $x \in N(x_0, \delta)$ และ $x \in E$ จะได้ว่า - $f(x) \in N(f(x_0), \varepsilon)$

แต่ $\lim\limits_{n \to \alpha} x_n = x_0$ ดังนั้นจะมี $J \in I^+$ ซึ่งถ้า $n \geq J$ จะได้ว่า

$$x_n \in N(x_0, \delta)$$

ดังนั้นสำหรับ $n \geq J$ ซึ่งถ้า $x_n \in N(x_0, \delta)$ และ $x_n \in E$ จะได้ว่า

$$f(x_n) \in N(f(x_0), \varepsilon)$$

นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $J \in I^+$ ซึ่ง $n \geq J$ ที่ทำให้ $f(x_n) \in N(f(x_0), \varepsilon)$

$$\therefore \lim_{n \to \alpha} f(x_n) = f(x_0)$$

จากทฤษฎี 6.1.2 นั้น ถ้า $x_0 \in E$ ซึ่ง x_0 ไม่เป็นจุดลิมิตนั้น จะได้ว่า ข้อ ก. เป็นจริง ซึ่งได้พิสูจน์แล้ว และ ข้อ ค. ก็เป็นจริง (ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด) ดังนั้นข้อ ก. และ ข้อ ค. อีควิวาเลนซ์กัน เมื่อ x_0 ไม่เป็นจุดลิมิต

จะเห็นว่า นิยามของความต่อเนื่องนั้น $x_0 \in E$ x_0 จะเป็นจุดลิมิตหรือไม่เป็นจุดลิมิตก็ได้

<u>ตัวอย่าง 6.1.5</u> ถ้า $f : E^1 \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = e^x$ เป็นฟังชั่นมีความต่อเนื่อง บน E^1 และ $\{x_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ที่ลู่เข้าสู่ x_o ดังนั้นจะได้ว่า $\{e^{x_n}\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ e^{x_0} (ทฤษฎี 6.1.2)

ถ้า f ไม่มีความต่อเนื่องที่ x_0 แต่ $\{x_n\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่ x_0 จะได้ว่า ซีเควนซ์ $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่ออก

<u>แบบฝึกหัดชุดที่ 6.1</u>

1. จงตรวจว่าฟังชั่นที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องบนโดเมนของมันหรือไม่ บอกเหตุผล และเขียนกราฟของฟังชั่น

1.1
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & , -1 \leq x < 1 \\ 2x - 4 & , 1 \leq x < 2 \\ 4 - 3x & , 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

1.2.
$$g(x) = \begin{cases} 2 + x & , x < 1 \\ 2 - x & , x \geq 1 \end{cases}$$

1.3 $h(x) = x/(x - 2)$

1.4 $F(x) = n \quad , n - 1 \leq x < x$ และ $D_F = [0, 5)$

1.5 $h(x) = (x^2 + x - 6)/(x - 2) \;;\; D_f = E^1$ และ $f(2)$ มีความหมายหรือไม่

2. จงพิสูจน์ว่า $f(x) = c$ และ $g(x) = x$ มีความต่อเนื่องบน E^1

3. จงพิสูจน์ว่า $g(x) = \frac{1}{x} \;;\; x \neq 0$ มีความต่อเนื่องที่ $x > 0$

4. จงพิสูจน์ว่า $f(x) = |x|$ มีความต่อเนื่องบน E^1

5. ถ้า $f : E^1 \to E^1$ ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ x + 2 & x > 2 \end{cases}$$

จงเขียนกราฟและตรวจดูว่าเป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องชนิดใด

6. ให้ $f : E \to E^1$ ซึ่ง $x_0 \in E \subset E^1$ f มีความต่อเนื่องที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ ถ้าซีเควนซ์ $\{x_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ x_0 ซึ่ง $x_n \in E$ สำหรับ n ทุกตัว จะได้ว่า $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\alpha}$ ลู่เข้าสู่ $f(x_0)$

6.2 <u>คุณสมบัติของฟังชั่นต่อเนื่อง</u> (Some properties of continuous - function)

<u>ทฤษฎี 6.2.1</u> ให้ $f : E \to E^1$ และ $g : E \to E^1$ f,g เป็นฟังชั่นที่มีความต่อเนื่องที่ $x_0 \in E \subset E^1$ จะได้ว่า $f + g$, $f - g$ และ fg มีความต่อเนื่องที่ x_0 และถ้า $g(x_0) \neq 0$ จะได้ว่า f/g มีความต่อเนื่องที่ x_0

<u>พิสูจน์</u> $\because$ f,g เป็นฟังชั่นมีความต่อเนื่องที่ x_0

$\therefore \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ และ $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$

จากทฤษฎี 5.13.8 จะได้ว่า

$$\lim_{x \to x_0} [f + g](x) = f(x_0) + g(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f - g](x) = f(x_0) - g(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f.g](x) = f(x_0).\ g(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} [f/g](x) = f(x_0)/g(x_0)$$

และจากนิยาม 5.13.1 และ 5.13.2 จะได้ว่า

$$[f + g](x_0) = f(x_0) + g(x_0) \quad ,$$

$$[f - g](x_0) = f(x_0) - g(x_0) \quad ,$$

$$[fg](x_0) = f(x_0).g(x_0) \quad ,$$

$$[f/g](x_0) = f(x_0)/g(x_0) \quad ; \quad g(x_0) \neq 0$$

ดังนั้น $f + g$, $f - g$, fg และ f/g ซึ่ง $g(x_0) \neq 0$ มีความต่อเนื่องที่ x_0

<u>ทฤษฎี 6.2.2</u> ให้ $f : E \to E^1$ และ $g : f(E) \to E^1$ f มีความต่อเนื่องที่ $x_0 \in E \subset E^1$ และ g มีความต่อเนื่องที่ $f(x_0)$ $f(E^1)$ จะได้ว่า $g \circ f$ มีความต่อเนื่องที่ x_0

<u>พิสูจน์</u> $\because$ ฟังชั่น g มีความต่อเนื่องที่ $f(x_0)$

ดังนั้นสำหรับเนเบอร์ฮูด $N(g(f(x_0), \varepsilon))$ ทุกตัวของจุด - $g(f(x_0))$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N(f(x_0), \delta_1)$ ของ $f(x_0)$ ซึ่ง $g(N(f(x_0), \delta_1)) \subset N(g \circ f(x_0), \varepsilon)$ ---(1)

$\because$ ฟังชั่น f มีความต่อเนื่องที่ x_0

ดังนั้น สำหรับเนเบอร์ฮูด $N(f(x_0, \delta_1)$ ทุกตัวของจุด $f(x_0)$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta)$ ซึ่ง

$$f(N(x_0, \delta)) \subset N(f(x_0), \delta_1) \quad ----(2)$$

จาก (1) และ (2) $\therefore$ $g \circ f (N(x_0, \delta) \subset N(g \circ f(x_0), \varepsilon)$

ดังนั้น $g \circ f$ มีความต่อเนื่องที่ x_0

ต่อไปจะกล่าวถึงความต่อเนื่องของฟังชั่น ซึ่งสัมพันธ์กับเซ็ทเปิด และเซ็ทปิดใน E^1 สำหรับเซ็ทเปิดนั้น ถ้า G เป็นเซ็ทเปิด จุดทุกจุดของ G จะเป็นจุดภายในของเซ็ท G ถ้า x เป็นจุดใด ๆ ใน G จะได้ว่า G เป็นเซ็ทเปิด ถ้ามีเนเบอร์ฮูด $N(x, \delta)$ บรรจุอยู่ใน G (จากนิยามจุดภายใน) นั่นคือ $N(x, \varepsilon) \subset G$

<u>เลมมา 6.2.3</u> $f : A \dashrightarrow B$ ซึ่ง A, B คือ E^1 f มีความต่อเนื่องที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่ออินเวอร์สอิมเมจภายใต้ f (under f) ของเนเบอร์ฮูดใด ๆ $N(f(x_0), \varepsilon)$ ของจุด $f(x_0)$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta)$ ของจุด x_0 บรรจุอยู่

(นั่นคือ $f^{-1}(N(f(x_0), \varepsilon)) \supset N(x_0, \delta)$)

<u>พิสูจน์</u> f มีความต่อเนื่องที่ x_0 ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

ดังนั้น $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับเนเบอร์ฮูด $N(f(x_0), \varepsilon)$ ทุกตัวของจุด $f(x_0)$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0, \delta)$ ของจุด x_0 ซึ่ง $f(N(x_0,\delta)) \subset N(f(x_0),\varepsilon)$

1. จาก $f(N(x_0, \delta)) \subset N(f(x_0), \varepsilon)$

ให้ $x \in N(x_0, \delta)$

จะได้ว่า $f(x) \in f(N(x_0, \delta))$ (ทฤษฎี 4.3.2 ก.)

$\therefore$ $f(x) = y$ สำหรับ $y \in f(N(x_0, \delta))$ บางตัว

นั่นคือ $x \in f^{-1}(N(f(x_0),\varepsilon))$ (นิยาม 4.3.4)

$\therefore$ $N(x_0, \delta) \subset f^{-1}(N(f(x_0), \varepsilon))$

2. ให้ $N(x_0, \delta) \subset f^{-1}(N(f(x_0), \varepsilon))$

ถ้า $f(x) \in f(N(x_0,\delta))$ สำหรับ $x \in N(x_0, \delta)$ บางตัว

$\therefore$ $x \in f^{-1}(N(f(x_0), \varepsilon))$

ดังนั้น $f(x) = y$ สำหรับ $y \in N(f(x_0),\varepsilon)$ บางตัว

(นิยาม 4.3.4)

$\therefore$ $f(x) \in N(f(x_0),\varepsilon)$ สำหรับ $N(f(x_0),\varepsilon)$ ทุกตัว

นั่นคือ $f(N(x_0, \delta)) \subset N(f(x_0), \varepsilon)$

จาก (1) และ (2) ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ

$f^{-1}(N(f(x_0), \varepsilon)) \supset N(x_0, \delta)$

ทฤษฎี 6.2.4 ให้ $f : A \dashrightarrow B$ ซึ่ง A, B คือ E^1 f จะเป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน A ก็ต่อเมื่อ f^{-1} (D) เป็นเซ็ทเปิดใน A สำหรับเซ็ทเปิด D ทุกตัวใน B

พิสูจน์ 1) ให้ f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน A และ D เป็นเซ็ทเปิดใน B จะแสดงได้ว่า $f^{-1}(D)$ เป็นเซ็ทเปิดใน A

ให้ a f^{-1} (D)

จะได้ว่า $y = f(a)$ D สำหรับ y D บางตัว

$\because$ D เป็นเซ็ทเปิดใน B ดังนั้นจะมีเนเบอร์ฮูด -

$N(f(a), \varepsilon)$ D

$\because$ f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน A ดังนั้นสำหรับเนเบอร์ฮูด

$N(f(a), \varepsilon)$ ทุกตัวของจุด $f(x_0)$ จะมีเนเบอร์ฮูด

$N(a, \varepsilon)$ ของจุด a ที่ทำให้ -

$f(N(a, \delta))$ $N(f(a), \varepsilon)$ D

$\therefore$ $N(a, \delta)$ $f^{-1}(D)$ (เล่มมา 6.2.3)

นั่นคือ $f^{-1}(D)$ เป็นเซ็ทเปิด

2. ให้ $f^{-1}(D)$ เป็นเซ็ทเปิดใน A จะแสดงว่า f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน A โดยที่ D เป็นเซ็ทเปิดใน B

ให้ $N(f(a),\varepsilon)$ เป็นเนเบอร์ฮูดของจุด $f(a)$ ใน B

แต่ $N(f(a),\varepsilon)$ ในเซ็ท B เป็นเซ็ทเปิดในเซ็ท B

และ $f^{-1}(N(f(a),\varepsilon))$ เป็นเซ็ทเปิดใน A (จากโจทย์)

ให้ a เป็นจุดใด ๆ ซึ่ง $a \in A$ และ $a \in f^{-1}(N(f(a),\varepsilon))$

ดังนั้นจะมีเนเบอร์ฮูด $N(a,\delta) \subseteq f^{-1}(N(f(a),\varepsilon))$

($\because$ $f^{-1}(N(f(a),\varepsilon)$ เป็นเซ็ทเปิด)

$\therefore$ $f(N(a,\delta)) \subseteq N(f(a),\varepsilon)$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องบน A

<u>ทฤษฎี 6.2.5</u> ให้ $f : A \dashrightarrow B$ ซึ่ง A, B คือ E^1 f จะเป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน A ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}(C)$ เป็นเซ็ทปิดใน A สำหรับเซ็ทปิด C ทุกตัวใน B

<u>พิสูจน์</u> 1) ให้ f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน A และ C เป็นเซ็ทปิดใน B จะแสดงว่า $f^{-1}(C)$ เป็นเซ็ทเปิดใน A

ให้ $D = B - C$ จะได้ว่า D เป็นเซ็ทเปิด (ทฤษฎี 5.3.2)

$\therefore$ $f^{-1}(D) = f^{-1}(B-C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$ (ทฤษฎี 4.3.5 ง)

$f^{-1}(D) = A - f^{-1}(C)$

แต่ $f^{-1}(D)$ เป็นเซ็ทเปิด (ทฤษฎี 6.2.4)

$\therefore$ $f^{-1}(C)$ เป็นเซ็ทปิด (ทฤษฎี 5.3.2)

2) ให้ $f^{-1}(C)$ เป็นเซ็ทปิดใน A จะแสดงว่า f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน A โดยที่ C เป็นเซ็ทปิดใน B

ให้ $D = B - C$ จะได้ว่า D เป็นเซ็ทเปิดใน B (ทฤษฎี5.3.2)

$\therefore\ f^{-1}(D) = f^{-1}(B-C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$ (ทฤษฎี 4.3.5ง)

$= A - f^{-1}(C)$

แต่ $f^{-1}(C)$ เป็นเซ็ทปิดใน A (โจทย์)

$\therefore\ f^{-1}(D)$ เป็นเซ็ทเปิดใน A (ทฤษฎี 5.3.2)

จะได้ว่า สำหรับ D เป็นเซ็ทเปิดใน B และ $f^{-1}(D)$ เป็นเซ็ทเปิด ใน A

$\therefore$ f มีความต่อเนื่องบน A (ทฤษฎี 6.2.4)

<u>ตัวอย่าง 6.2.1</u> พิจารณา $f : E^1 \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \le 3 \\ \frac{(x+5)}{2} & x > 3 \end{cases}$

ให้ $D = (1,3)$ เป็นเซ็ทเปิด

ถ้า $f(x) = 1$ จะได้ $1 = x - 1$; $x \le 3$

$\therefore\ x = 2$

ถ้า $f(x) = 2$ จะได้ $2 = x - 1$; $x \le 3$

$\therefore\ x = 3$

$f(x) = \frac{5}{2}$ จะได้ $\frac{5}{2} = x-1$; $x > 3$

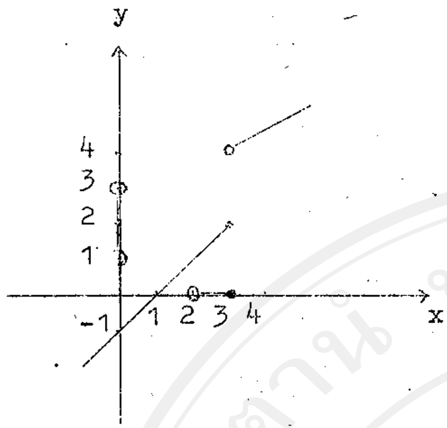
$\therefore\ x = \frac{7}{2}$ ไม่มีความหมาย

หรือ จะได้ $\frac{5}{2} = \frac{x+5}{2}$; $x > 3$

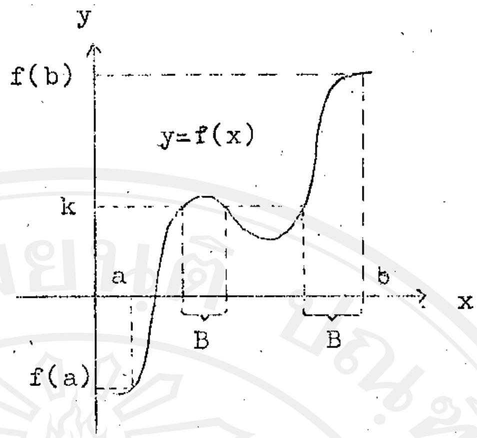
$x = 0$ ไม่มีความหมาย

$\therefore\ f^{-1}(D) = (2,3]$ ไม่ใช่เซ็ทเปิด

ดังนั้น f ไม่มีความต่อเนื่อง (ดูรูปที่ 6.2.1)



รูปที่ 6.2.1



รูปที่ 6.2.2

ทฤษฎี 6.2.6 ให้ $f : E \dashrightarrow E^1$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง ซึ่ง $E \subset E^1$ และ E เป็นคอมแพคต์ (เป็นเซ็ทปิดและบาวด์) จะได้ว่า f(E) เป็นคอมแพคต์

พิสูจน์ ให้ $\{Di\}_{i \in I}$ เป็นโคเวอร์เปิด (open covering) ของ f(E) แต่ f เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง ดังนั้นสำหรับ Di แต่ละตัว $f^{-1}(Di)$ เป็นเซ็ทเปิดใน E (ทฤษฎี 6.2.4)

$\therefore$ $\{f^{-1}(Di)\}_{i \in I}$ จะเป็นโคเวอร์เปิดของ E

แต่ E เป็นคอมแพคต์

ดังนั้นจะมีโคเวอร์ย่อยเปิด (open subcovering) จำนวนจำกัด ซึ่งโคเวอร์ E ได้แก่ $f^{-1}(Di_1), f^{-1}(Di_2), f^{-1}(Di_3), \ldots f^{-1}(Di_n)$

$\therefore$ $Di_1, Di_2, Di_3, \ldots, Di_n$ เป็นโคเวอร์ย่อยเปิดจำนวนจำกัดซึ่งโคเวอร์ f(E) (ทฤษฎี 6.2.4)

$\therefore$ f(E) เป็นคอมแพคต์

ทฤษฎี 6.2.7 (The Intermediate Value Theorem)

ให้ $f: [a,b] \dashrightarrow E^1$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง และ $[a,b]$ เป็นช่วงปิดใน E^1 ถ้า k เป็นจำนวนที่อยู่ระหว่าง f(a) และ f(b) จะได้

ว่า จะมี $p \in [a,b]$ ซึ่ง $f(p) = k$ (ดูรูปที่ 6.2.2)

พิสูจน์ 1) สมมติว่า $f(a) < k < f(b)$

ให้ $A = \{x / x \in [a,b]$ และ $f(x) \leq k\}$ และ

$B = \{x / x \in [a,b]$ และ $f(x) \geq k\}$

$\therefore$ $a \in A$ และ $b \in B$

ให้ $p = \sup A$ ($\because A \subset [a,b]$ แต่ $b \notin A$)

(ต้องการจะพิสูจน์ว่า $f(p) = k$)

สมมติ $f(p) < k$ และให้ $\varepsilon = (k - f(p))/2 > 0$

แต่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ฉะนั้นสำหรับเนเบอร์ฮูด $N(f(p), \varepsilon)$ ของ $f(p)$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N(p, \delta)$ ของจุด p ซึ่งถ้า $x \in N(p, \delta)$ แล้วจะได้ว่า $f(x) \in N(f(p), \varepsilon)$ สำหรับ $x \in [a,b]$

$\therefore$ $f(x) < f(p) + \varepsilon < k$ ($\because \varepsilon = (k-f(p))/2$

$\because$ $f(p) < k$ และ $p \notin B$ จะได้ว่า $p < b$

$\therefore$ จะมี $x \in [a, b]$ ซึ่ง $p < x < p + \delta$ ที่ทำให้

$f(x) < k$

ซึ่งขัดแย้งกับ $p = \sup A$ ดังนั้น $f(p) \not< k$)

จะได้ว่า $f(p) \geq k$

$\therefore$ $f(p) = k$ ($\because p \notin B$)

2) สมมติ $f(a) > k > f(b)$ (ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

แบบฝึกหัดชุด 6.2

1. ให้ $f: E^1 \to E^1$ ซึ่ง f เป็นฟังชั่นมีความต่อเนื่องที่ x_0 จงพิสูจน์ว่า $|f|$ มีความต่อเนื่องที่ x_0

2. ให้ $p : E^1 \to E^1$ เป็นฟังชั่นโพลีโนเมียล (polynomial function) ซึ่ง $p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ จงพิสูจน์ว่า p มีความต่อเนื่องบน E^1

3. ให้ $h : E^1 \to E^1$ เป็นฟังชั่นตักยะ (rational function) ซึ่ง

$$h(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n}$$

พิสูจน์ว่า h มีความต่อเนื่องบน E^1 ยกเว้นค่า x ซึ่งทำให้

$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n = 0$

(ข้อแนะนำ ใช้ข้อ 2 และ ทฤษฎี 6.2.1 ช่วยในการพิสูจน์

4. (Theorem of Bolzano) ถ้า $f: [a,b] \to E^1$ f มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $f(a) < 0 < f(b)$ จะมีจำนวนจริง c ใน $[a,b]$ ซึ่ง $f(c) = 0$ (พร้อมทั้งเขียนกราฟ)

5. ถ้า $f : E \to E^1$ f มีความต่อเนื่องบน E ซึ่ง $E \subseteq E^1$ และ E เป็น-คอมแพคต์ จะได้ว่าจะมีจุดคงที่ (fixed points) สองจุด $u,v \in E$ ซึ่งสำหรับจุด $p \in E$ ทุกจุด จะได้ว่า $f(u) \le f(p) \le f(v)$
(ซึ่ง f จะให้ค่าต่ำสุด (minimum value) ที่ u และให้ค่าสูงสุด (maximum value) ที่ v

6. ให้ $f : [a,b] \to E^1$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่องชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า f เป็น-โมโนโทน

7. จงพิสูจน์ทฤษฎี 6.2.7 ในกรณี $f(a) > k > f(b)$

8. จงพิสูจน์ฟังชั่น $f(x) = c$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง เมื่อ c เป็นค่าคงที่

9. จงพิสูจน์ฟังชั่น $f(x) = x$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง

6.3 <u>ฟังชั่นต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ</u> (Uniform Continuity)

จาก $f : E \to E^1$ โดยที่ f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องที่ $x_0 \in E$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(N(x_0, \delta)) \subset N(f(x_0), \varepsilon)$ โดยทั่ว ๆ ไปนั้น ค่า δ อาจจะขึ้นอยู่กับค่า ε และ x_0 หรือค่า δ ขึ้นอยู่กับค่า ε เท่านั้น พิจารณาฟังชั่นต่อเนื่องต่อไปนี้

ถ้า $f : E^1 \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = 2x$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว ถ้า $\delta = \varepsilon/2$ จะได้ว่า $f(N(x_0,\delta)) \subset N(f(x_0),\varepsilon)$ ซึ่งค่า δ ขึ้นอยู่กับ ε เท่านั้น f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องที่ทุกจุดใน D_f

ถ้า $f : E^1 \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = x^2$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว ถ้าให้ $\delta = \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|$ จะได้ว่า $f(N(x_0,\delta)) \subset N(f(x_0),\varepsilon)$ ซึ่งค่า δ ขึ้นอยู่กับ ε และ x_0 f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องที่จุดทุกจุดใน D_f

ถ้า $f: E \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = 1/x$, $x > 0$ และ $x \in E \subset E^1$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว ถ้า $\delta = \dfrac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$ จะได้ว่า $f(N(x_0,\delta)) \subset N(f(x_0),\varepsilon)$ ซึ่งค่า δ ขึ้นอยู่กับ ε และ x_0 f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องที่จุด $x_0 > 0$

ต่อไปจะกล่าวถึงนิยามของความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

<u>นิยาม 6.3.1</u> ให้ $f : E^1 \to E^1$ จะเรียก f ว่ามีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $E \subset E^1$ ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $\delta > 0$ ซึ่งค่า δ ขึ้นอยู่กับค่า ε เท่านั้น ดังนั้นถ้า $d(x, x_0) < \delta$ จะได้ว่า $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ สำหรับ $x, x_0 \in E$ ทุกตัว

ถ้า f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน E^1 เรียก f ว่ามีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

จากนิยาม 6.3.1 เราอาจเขียนในรูปเนเบอร์ฮูดได้ว่า $f : E^1 \to E^1$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $E \subseteq E^1$ ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $\delta > 0$ ซึ่งค่า δ ขึ้นอยู่กับค่า ε เท่านั้น และจะได้ว่า $f(N(x_0,\delta)) \subseteq N(f(x_0), \varepsilon)$ สำหรับ $x_0 \in E$ ทุกตัว

เราจะเห็นว่านิยามของฟังชั่นต่อเนื่องกับฟังชั่นต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอนั้นแตกต่างกัน ประการแรก ฟังชั่นต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอเป็นคุณสมบัติของฟังชั่นบนเซ็ท แต่ฟังชั่นต่อเนื่อง เรากล่าวที่จุดได้ แต่เราจะไม่กล่าวว่าฟังชั่นมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอที่จุด ประการที่สอง สำหรับฟังชั่นต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอนั้นค่า δ ขึ้นอยู่กับค่า ε เท่านั้น แต่ฟังชั่นต่อเนื่องนั้นค่า δ อาจขึ้นอยู่กับค่า ε และ x_0

ฟังชั่นต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอทุกฟังชั่นจะเป็นฟังชั่นต่อเนื่อง แต่ฟังชั่นที่ต่อเนื่องอาจไม่เป็นฟังชั่นต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ เช่น

<u>ตัวอย่าง 6.3.1</u> พิจารณา $f : E \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = x^2$ และ $(-1,\alpha)=E \subseteq E^1$

ให้ $\varepsilon = 2$

ถ้า $d(x,x_0) < 1/2$ จะได้ว่า $d(f(x), f(x_0)) < 2$

เป็นจริง เมื่อ $x_0 = 1$

[สำหรับ $d(f(x),f(x_0)) = |f(x)-f(x_0)| = |x^2-x_0^2| = |x^2-1|$

ถ้า $d(x,x_0) < 1/2$ จะได้ว่า $d(x,1) = |x-1| < \frac{1}{2}$

นั่นคือ $1/2 < x < 3/2$ ดังนั้น $-3/4 < f(x)-f(x_0) < 5/4$

นั่นคือ $|f(x)-f(x_0)| = d(f(x), f(x_0)) < 2$]

ถ้า $x_0=10$ จะได้ $d(f(x),f(x_0)) = |x^2-x_0^2| = |x^2-10^2|$

แต่ถ้า $x = 10\frac{1}{4}$ จะได้ว่า $d(x,x_0) = |x-x_0| = |10\frac{1}{4}-10| < 1/2$

แต่ $d(f(x), f(x_0)) = (10\frac{1}{4})^2 - 10^2 = 5\frac{1}{6}$

$\therefore d(f(x), f(x_0)) > 2$

จะเห็นว่า $\delta = {}^{1}/_{2}$ ใช้กับ $x_0 = 1$ แต่ใช้ไม่ได้กับ $x_0 = 10$

ดังนั้น f ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $(-1, \alpha)$ แต่มีความต่อเนื่องบน $(-1, \alpha)$

<u>ตัวอย่าง 6.3.2</u> พิจารณา $f : E \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $f(x) = x^2$ และ $[0,8] = E \subseteq E^1$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า ถ้า $d(x, x_0) < \delta$

$$\text{ดังนั้น } d(f(x), f(x_0)) = |x^2 - x_0^2|$$
$$= |x - x_0|\,|x + x_0|$$
$$< \delta.\ 16.$$

เลือก $\delta = {}^{\varepsilon}/16$, $d(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{16} \cdot 16 = \varepsilon$

$\therefore$ f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง $[0, 8]$

จะเห็นว่าจากฟังชั่นที่มีความต่อเนื่องฟังชั่นเดียวกัน เมื่อกำหนดช่วงต่างกัน บางช่วงมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ บางช่วงไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ ฉะนั้น การกำหนดช่วงจะเป็นสิ่งสำคัญยิ่ง ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 6.3.2</u> ให้ $f : E \dashrightarrow E^1$ และ f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน E ซึ่งเป็นคอมแพคต์ (เซ็ทปิดและบาวด์) จะได้ว่า f เป็นฟังชั่นที่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

<u>พิสูจน์</u> $\because$ f มีความต่อเนื่องบน E จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ $x \in E$ ทุกตัว ดังนั้นเลือก $\varepsilon > 0$ สำหรับ $x \in E$ ทุกตัว จะมี $\delta_x > 0$ (ค่า δ ขึ้นกับ x) ซึ่ง ถ้า $d(x,y) < \delta_x$ และ $y \in E$ จะได้ว่า $d(f(x), f(y) < \varepsilon/_2$ ....1)

พิจารณากลุ่มของเนเบอร์ฮูด $\{N(x, \frac{\delta_x}{2})\}_{x \in E}$ ซึ่งเป็นโคเวอร์เปิดของ E

แต่ E เป็นคอมแพคต์ ดังนั้นจะมีโคเวอร์ย่อยจำนวนจำกัดของ E ซึ่ง $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in E$ จะได้ว่า

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}) \qquad \ldots\ldots. 2)$$

ให้ $\delta = \min \{ \frac{\delta_{x_i}}{2} / i = 1,2,\ldots,n\}$

ดังนั้นให้ $x, y \in E$ และ $d(x,y) < \delta$ จะมี $i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$

ซึ่ง $x \in N(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$ จาก 2)

$$d(x,y) < \delta \leq \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}$$

แต่ $d(y, x_i) \leq d(y,x)+d(x,x_i)$ (อสมการสามเหลี่ยม)

$$\therefore\ d(y,x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i}$$

ดังนั้น

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x),f(x_i))+ d(f(x_i), f(y))$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{เมื่อ } d(x,y)< \delta$$

$\therefore$ f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

ตัวอย่าง 6.3.3 $f : [0,1] \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = x^3$

มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $[0, 1]$ เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0, 1]$

แบบฝึกหัด ชุด 6.3

1. ฟังชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอหรือไม่ เพราะเหตุใด

   1.1 $f : [1, 8] \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = 1/x$

   1.2 $g : [1/2, \alpha) \to E^1$ ซึ่ง $g(x) = 1/x$

   1.3 $h : [0, \alpha) \to E^1$ ซึ่ง $h(x) = 1/x$

   1.4 $F : [-1, 20) \to E^1$ ซึ่ง $F(x) = x^2$

   1.5 $G : [0, \alpha) \to E^1$ ซึ่ง $G(x) = x^3$

2. ให้ $f : E^1 \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $f(x) = ax + b$ สำหรับ $x \in E^1$ ทุกตัว และ $a, b \in E^1$ จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

3. ให้ $f : E^1 \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $f(x) = c$ สำหรับ $x \in E^1$ ทุกตัว และ $c \in E^1$ จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

6.4 <u>อนุพันธ์</u> (The Derivative)

พิจารณาฟังชั่น $f(x) = x^3$ เลือกจุดคงที่ x_0 และเลือกจุดอื่น ๆ ได้แก่ x จะได้คู่ลำดับ $<x, f(x)>$ และ $<x_0, f(x_0)>$ ลากเส้น - $L(x)$ เชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง ความชัน (slope) ของเส้นตรงได้แก่

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

จาก
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \left(\frac{1}{x - x_0}\right)\left[(x-x_0)^3 + 3x_0(x-x_0)^2 + 3x_0^2(x-x_0)\right]$$
$$= (x - x_0)^2 + 3x_0(x - x_0) + 3x_0^2$$

ความชันของเส้นตรง $L(x)$ มีลิมิตที่ x_0 และค่าลิมิตของความชันของเส้นตรงได้แก่ $3x_0^2$ เขียนได้ว่า $\lim\limits_{x \dashrightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ซึ่งเรียกว่าเป็นความชันของฟังชั่น f ที่จุด x_0

พิจารณาวัตถุเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง เลือกจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรงนี้เป็น o และเลือกทิศทางที่ระยะจาก o เป็นบวก ระยะจาก o ในทิศทางตรงข้ามให้เป็นลบ ให้ $s(t)$ แทนระยะของวัตถุจากจุด o เมื่อเวลา t ให้ t_0 เป็นเวลาคงที่ซึ่ง $t_0 \neq t$ อัตราส่วน $\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ เป็นความเร็วเฉลี่ย $A(t)$ ของวัตถุในช่วงเวลา $[t, t_0]$ หรือ $[t_0, t]$ ถ้า A มีลิมิตที่ t_0 เรียกค่าลิมิตของความเร็วเฉลี่ยว่าความเร็ว (velocity) เมื่อเวลา $t = t_0$

จากทั้งสองกรณีเพื่อที่จะให้เข้าใจเรื่องอนุพันธ์ (derivative) ยิ่งขึ้น ซึ่งจะให้นิยาม ดังนี้

<u>นิยาม 6.4.1</u> ให้ $f : E \to E^1$ ซึ่ง $x_0 \in E \subset E^1$ และ x_0 เป็นจุดลิมิตของ E สำหรับ $x \in E$ ทุกจุดซึ่ง $x \neq x_0$ ให้ความหมายฟังชั่น T ดังนี้

$$T(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ฟังชั่น f จะเรียกว่า ดีฟเฟอเรนชิเบิล (differentiable at x_0) ที่ x_0 (หรือมีอนุพันธ์ (has a derivative at x_0) ที่ x_0) ก็คือเมื่อ T มีลิมิตที่ x_0 เขียนแทนด้วย -

$$\lim_{x \to x_0} T(x) = f'(x_0)$$

จำนวน $f'(x_0)$ เรียกว่าอนุพันธ์ของ f ที่ x_0 ถ้า f ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ $x \in E$ ทุกจุด เรียก f ว่า ดีฟเฟอเรนชิเบิล บน E

จากนิยามข้างต้น เราได้ว่า $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0}$ หรืออาจเขียนว่า $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+ h)-f(x_0)}{h}$ เมื่อ $x = x_0+h$ และ h เข้าใกล้ศูนย์ ถ้า x เข้าใกล้ x_0 นอกจากนั้นถ้าเปรียบเทียบกับลิมิตของฟังชั่นที่เรียนมาแล้ว กล่าวได้ว่า ฟังชั่น f มีอนุพันธ์ที่จุด x_0 เป็นจำนวน $f'(x_0)$ หรือ L ถ้า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $0 < |x-x_0| < \delta$ และ $x \in E$ แล้วจะได้ว่า $\left| \dfrac{f(x)- f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$ หรือเขียนในรูปเนเบอร์ฮูดได้ว่า สำหรับเนเบอร์ฮูด $N(f(x_0), \varepsilon)$ ทุกตัวของ $f(x_0)$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N(x_0,\delta)$ ของจุด x_0 ซึ่งทำให้ $f(N'(x_0, \delta)) \subset N(f(x_0),\varepsilon)$

ตัวอย่าง 6.4.1 จงหา $f'(x)$ เมื่อ $f(x) = x^n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + [n(n-1)/2!]\, x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}h^2}{3!} + \right.$$

$$\left. + \ldots + h^{n-1} \right]$$

$$= nx^{n-1}$$

นิยาม 6.4.2 อนุพันธ์ทางขวา ของฟังชั่น f ที่จุด x_0 เขียนแทนด้วย $f'(x_0^+)$ มีความหมายดังนี้

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

อนุพันธ์ทางซ้าย ของฟังชั่น f ที่จุด x_0 เขียนแทนด้วย $f'(x_0^-)$ มีความหมายดังนี้

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

ดังนั้น $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$ ก็ต่อเมื่อ f มีอนุพันธ์ที่จุด x_0

ทฤษฎี 6.4.3 ถ้า $f : E^1 \to E^1$ และ f ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ $x = x_0$ จะได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ x_0

พิสูจน์ $\because$ f ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0

$$\therefore \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0}$$

แต่ $\lim_{x \to x_0} \left[f(x) - f(x_0) \right] = \lim_{x \to x_0} \frac{\left[f(x)-f(x_0) \right](x-x_0)}{(x - x_0)}$

$$= f'(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} (x-x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\therefore$ f มีความต่อเนื่องที่ x_0

จะได้ว่าฟังชั่นที่ดิฟเฟอเรนชิเบิล จะเป็นฟังชั่นที่มีความต่อเนื่อง แต่ส่วนกลับ (converse) ของทฤษฎีนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง

<u>ตัวอย่าง 6.4.2</u> ให้ $f: E^1 \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = |x|$ เป็นฟังชั่นที่มีความต่อเนื่องบน E^1 แต่ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 1$

จาก $f(x) = |x|$ เราได้ว่า $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

แต่ $f(0) = 0$ $\quad \therefore \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

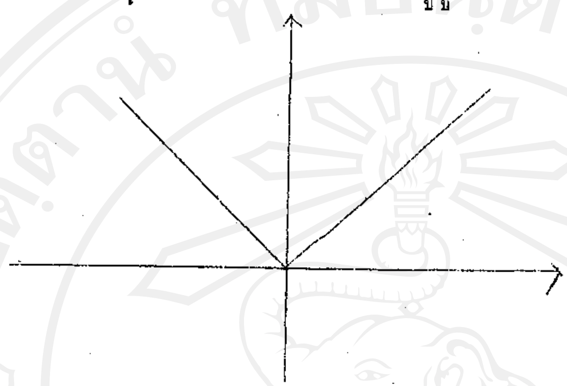
$\therefore$ f มีความต่อเนื่องที่ o

พิจารณาเศษส่วน $T(0+h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} 1 & h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$

ดังนั้น $\lim_{h \to 0^+} T(0+h) = 1$ แต่ $\lim_{h \to 0^-} T(0 + h) = -1$

$$\therefore \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \quad \text{หาค่าไม่ได้}$$

ดังนั้น f ไม่มีอนุพันธ์ที่ 0 (ดูรูปที่ 6.4.1)



รูปที่ 6.4.1

ต่อไปจะกล่าวถึงเงื่อนไขการดีฟเฟอเรนชิเบิลในรูปของซีเควนซ์ เนื่องจากการดีฟเฟอเรนชิเบิล ก็คือลิมิตของฟังชั่นนั่นเอง ดังนั้นทฤษฎีข้างล่างที่กล่าวนี้จะไม่พิสูจน์ (พิสูจน์เหมือน ทฤษฎี 5.12.2)

<u>ทฤษฎี 6.4.4</u> ให้ $f : E \to E^1$ ซึ่ง x_0 เป็นจุดลิมิตของ $E \subset E^1$ จะได้ว่า f ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกซีเควนซ์ $\{x_n\}_{n=1}^{\alpha}$ ของ $E - \{x_0\}$ ลู่เข้าสู่ x_0 จะได้ว่า $\left\{ \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \right\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้า $f'(x_0)$

พิจารณา $f : E^1 \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = |x|$

ให้ $x_0 = 0$ จะได้ว่า $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่เข้าสู่จำนวนศูนย์ ซึ่งศูนย์ไม่เป็นสมาชิกของซีเควนซ์นี้

สำหรับ n เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า

$$\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n} \text{ และ } \frac{f(1/_n) - f(0)}{1/_n} = 1$$

สำหรับ n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า

$$\frac{(-1)^n}{n} = -\frac{1}{n} \quad \text{และ} \quad \frac{f(-1/_n) - f(0)}{-1/n} = -1$$

ดังนั้น $\left\{ \frac{f((-1)^n/n) - f(0)}{(-1)^n/n} \right\}_{n=1}^{\alpha}$ เป็นซีเควนซ์ลู่ออก

$\therefore$ f ไม่ดิฟเฟอเรนชิเบิลที่ $x = 0$ (ทฤษฎี 6.4.4)

<u>แบบฝึกหัดชุด 6.4</u>

1. จากฟังชั่นข้างล่างนี้ เป็นฟังชั่นที่ดิฟเฟอเรนชิเบิลตามจุดที่กำหนดหรือไม่

1.1 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ที่ $x_0 = 0$

1.2 $f(x) = \sqrt{|x|}$ ที่ $x_0 = 0$

1.3 $f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

2. ถ้า $f : [a,b] \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นตัวคงที่ พิสูจน์ว่า $f'(x) = 0$ สำหรับ $x \in [a,b]$ ทุกตัว

3. ให้ $f, g: E \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง f และ g ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 และ $E \subset E^1$ จงพิสูจน์ว่า

3.1 $f + g$ ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 และ

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

3.2 $f - g$ ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 และ

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

3.3 fg ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 และ

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)\, g'(x_0) + g(x_0)\, f'(x_0)$$

3.4 ถ้า $g(x_0) \neq 0$ และ $g(x) \neq 0$ จะได้ว่า $1/_g$ ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 และ

$$(1/_g)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

3.5 ถ้า $g(x_0) \neq 0$ และ $g(x) \neq 0$ พิสูจน์ว่า $f/_g$ ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 และ

$$(f/_g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0)\, f(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

4. ให้ $f : D \dashrightarrow E^1$ และ $g : D' \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $D \subset E^1$, $D' \subset E^1$ และ $f(D) \subset D'$ ถ้า f และ g ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 และ $f(x_0)$ ตามลำดับ จะได้ว่า $g \circ f$ ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 และ

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

5. ถ้า $f(x) = x^n$ เมื่อ $n \in I$ จะได้ว่า $f'(x) = nx^{n-1}$ สำหรับ $x \in E^1$ ทุกตัว

6. ให้ $f : [a,b] \to E^1$ f อาจจะมีค่าสูงสุด หรือไม่ก็ค่าต่ำสุด ที่ $x_0 \in [a,b]$ ถ้า f ดีฟเฟอเรนชิเบิลที่ x_0 จะได้ว่า $f'(x_0) = 0$

7. (Rolle's Theorem) ให้ $f:[a,b] \to E^1$ ซึ่ง f มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และดีฟเฟอเรนชิเบิลบน (a, b) ถ้า $f(a) = f(b) = 0$ จะมี $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = 0$

8. (Mean - Value Thm) ถ้า $f : [a,b] \to E^1$ f มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ ดีฟเฟอเรนชิเบิลบน (a, b) จะมี $c \in (a, b)$ ที่ทำให้ $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
