บทที่ 7

อินทิกรัล (Integral)

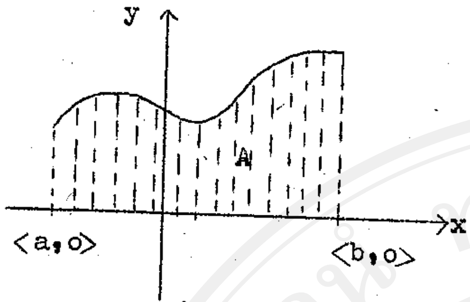
สำหรับเรื่องอินทิกรัลที่จะกล่าวถึงนั้น ได้แก่รีมานอินทิกรัล (Riemann - integral) ฟังชั่นที่อินทิเกรตได้ (integrable function) คุณสมบัติของรีมาน-อินทิกรัล (some properties of Riemann integral) และทฤษฎีพื้นฐานทางแคลคูลัส (the fundamental theorem of calculus) เรื่องอินทิกรัลนี้ต้องนำความรู้จากเรื่องสัจจพจน์คอมพลีท (Axioms of Completeness) มาใช้มาก

สำหรับรีมานอินทิกรัลนั้นเรากล่าวถึงฟังชั่นใน E^1 ที่บาวด์ในช่วงปิด โดยอาศัยการแบ่งช่วง การหาผลบวกของพจน์ถึง n พจน์ ซึ่งได้กล่าวไว้ในภาคผนวกแล้วจะนำมาใช้ และกำหนดเงื่อนไขที่ฟังชั่นจะอินทิเกรตได้ในช่วงปิดที่บาวด์ ส่วนที่สองกล่าวถึงฟังชั่นที่อินทิเกรตได้ โดยอาศัยเงื่อนไขดังกล่าว ฟังชั่นที่อินทิเกรตได้ ได้แก่ ฟังชั่นที่บาวด์ และโมโนโทนในช่วงปิด ฟังชั่นที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด และฟังชั่นที่บาวด์และต่อ-เนื่องบนช่วงเปิด (การพิสูจน์ในส่วนนี้ต้องอาศัยฟังชั่นต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ และฟังชั่นต่อเนื่องบนเซ็ทคอมแพคต์) และตอนท้ายของส่วนนี้กล่าวถึงรีมานซัม (Riemann sum) ซึ่งสัมพันธ์กับฟังชั่นที่อินทิเกรตได้ ส่วนต่อไปกล่าวถึงคุณสมบัติของรีมานอินทิกรัล และส่วนสุดท้ายกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานทางแคลคูลัส เพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ของอินทิกรัลกับอนุพันธ์

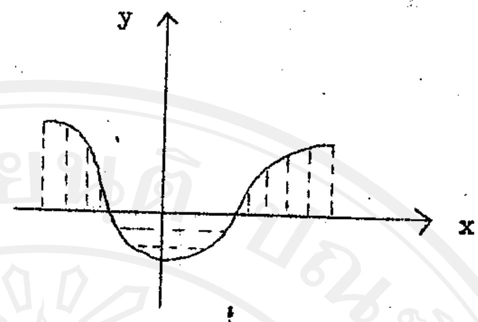
7.1 รีมานอินทิกรัล (The Riemann Integral)

มโนภาพพื้นฐานของอินทิกรัลได้แก่พื้นที่ ถ้ามีฟังชั่น f ซึ่ง $f(x) \geq 0$ สำหรับ x ทุกตัวในช่วง $[a,b]$ A เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยแกน x เส้นขนานกับแกน y ซึ่งผ่านจุด $\langle a,0\rangle$ เส้นขนานกับแกน y ซึ่งผ่านจุด $\langle b,0\rangle$ และกราฟของฟังชั่น f (ดังรูปที่ 7.1.1) เรียกจำนวนซึ่งเป็นพื้นที่ของบริเวณ A ว่าอินทิกรัลของ f บนช่วง $[a,b]$ ถ้า f ไม่มีคุณสมบัติดังกล่าวคือ " $f(x) \geq 0$ สำหรับ x ทุกตัวในช่วง $[a,b]$ " โดย f เป็นกราฟมีรูปดังรูปที่ 7.1.2 อินทิกรัล ..

ของ f คือผลต่างของพื้นที่ลงเส้นทึบเหนือแกน x แล้วพื้นที่ลงเส้นทึบใต้แกน x



รูปที่ 7.1.1



รูปที่ 7.1.2

<u>นิยาม 7.1.1</u> ถ้า $[a,b]$ เป็นช่วงปิดที่บาวด์ พาร์ทิชั่น (partition ของช่วง $[a, b]$ คือเซ็ทจำกัด $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ซึ่งประกอบด้วยจุดในช่วง $[a, b]$ รวมทั้ง a และ b โดยที่

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

ถ้า P เป็นพาร์ทิชั่น และให้ $|P| = \max(x_1-x_0, x_2-x_1, \ldots, x_n-x_{n-1})$ เรียก $|P|$ ว่า นอร์ม (norm หรือ mesh) ของพาร์ทิชั่น

และถ้า P, Q เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[a,b]$ และ $P \subset Q$ เรียก Q ว่า รีไฟน์เมนต์ (refinement) ของ P หรือ Q รีไฟน์ (refine) P

<u>ตัวอย่าง 7.1.1</u> ให้ $I = [0, 2]$ เป็นช่วงปิดที่บาวด์

P และ Q เป็นพาร์ทิชั่นของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$P = \{0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, 1, 3/2, 7/4, 2\}$$

และ $Q = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\}$

จะได้ว่า $|P| = \frac{1}{2}$ และ $|Q| = \frac{1}{3}$

จะเห็นว่าพาร์ทิชั่นก็คือการแบ่งช่วงปิด ออกเป็นช่วงปิดย่อย ๆ โดยแต่ละช่วงปิดย่อยมีจุดปลายของช่วงซ้ำกันเท่านั้น ในแต่ละช่วงจะมีพาร์ทิชั่นจำนวนมาก ซึ่งขึ้นอยู่กับการแบ่ง สำหรับ Q รีไฟน์ P หรือ $P \subseteq Q$ ในช่วง $[a,b]$ จุดปลายของ Q ต้องเป็นจุดปลายของ P ด้วย และพาร์ทิชั่น $P \cup Q$ จะเป็นรีไฟน์ของ P และ Q ทั้งคู่ นอกจากนั้นจะได้ว่า $|Q| \leq |P|$

<u>นิยาม 7.1.2</u> ถ้า $f : [a,b] \to E^1$ ซึ่ง f เป็นฟังชั่นที่บาวด์บนช่วง $[a,b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชั่นของ $[a,b]$

ให้ $m_i = \inf \{f(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$; $i = 1,2,3,\ldots,n$

$M_i = \sup \{f(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$; $i = 1,2,3,\ldots,n$

โลเวอร์รีมานซัมของ f (lower Riemann sums of f) เขียนแทนด้วย L(f; P) มีความหมายดังนี้

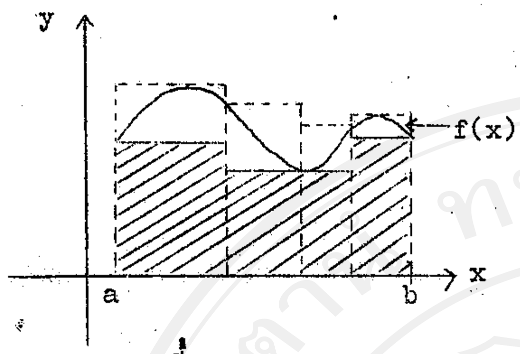
$$L(f; P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

อัปเปอร์รีมานซัมของ f (upper Riemann sums of f) เขียนแทนด้วย U (f; P) มีความหมายดังนี้

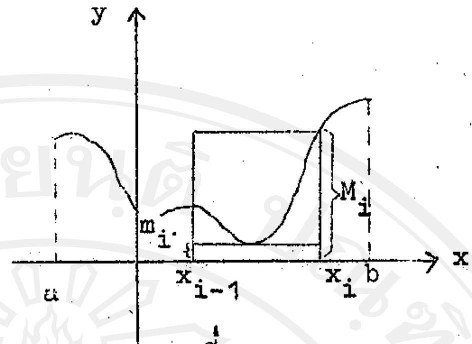
$$U(f ; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

สำหรับ f เป็นฟังชั่นที่บาวด์บน $[a,b]$ หมายถึง $f([a,b])$ เป็นเซ็ทที่บาวด์ และ f จะบาวด์ที่แต่ละช่วงย่อย (subinterval) $[x_{i-1}, x_i]$ ของช่วง $[a,b]$ ด้วย เมื่อ f บาวด์บน $[a,b]$ ทำให้มี inf และ sup ถึงแม้ f จะไม่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ก็ตาม

จากนิยาม 7.1.2 แสดงได้ดังรูปที่ 7.1.3 และ 7.1.4



รูปที่ 7.1.3



รูปที่ 7.1.4

จากรูปที่ 7.1.3 $L(f\ ;\ P)$ คือผลบวกของพื้นสี่เหลี่ยมมุมฉากที่แลเงา

$U(f\ ;\ P)$ คือผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมมุมฉากที่คลุมกราฟ f

<u>เลมม่า 7.1.3</u> ถ้า $f: [a,b] \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง f เป็นฟังชั่นที่บาวด์บนช่วง $[a,b]$ และ P เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[a,b]$

จะได้ว่า $m(b-a) \leq L(f;\ P) \leq U(f;\ P) \leq M(b-a)$

เมื่อ $m = \inf \{f(x)/x \in [a,b]\}$ และ

$M = \sup \{f(x)\ /\ x \in [a,b]\}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$

แต่ $m \leq m_i \leq M_i \leq M$ สำหรับ $i \in I^+$ ทุกตัว ซึ่ง m_i, M_i, มีความหมายตามนิยาม 7.1.2

$$\therefore\ m(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(x_i - x_{i-1}) \leq M(x_i - x_{i-1})$$

และ
$$\sum_{i=1}^{n} m\,(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M(x_i - x_{i-1})$$

$$m\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) \;\ldots\ldots 1)$$

แต่

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) = (x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\ldots+(x_{n-1}-x_{n-2})+(x_n-x_{n-1})$$

$$= x_n + (x_{n-1}-x_{n-1}) + \ldots + (x_1-x_1) - x_0$$

$$= b - a$$

จาก 1) $\therefore m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$

จากเลมมาเราทราบว่าเซ็ท $\{U(f;P)/$ สำหรับทุกพาร์ทิชั่น P ของ $[a,b]\}$ และ $\{L(f;P)/$ สำหรับทุกพาร์ทิชั่น P ของ $[a,b]\}$ เป็นเซ็ทที่บาวด์ทั้งคู่

ถ้า m_i เป็น inf ของฟังชั่น f ในช่วง ๆ หนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $-m_i$ เป็น sup ของฟังชั่น f ในช่วงนั้น ดังนั้น

$$L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1})$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(-m_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$= -U(-f;P)$$

<u>ทฤษฎี 7.1.4</u> ถ้า $f:[a,b] \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง f เป็นฟังชั่นที่บาวด์บนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า

1. (ก) $U(f;P') \leq U(f;P)$

   (ข) $L(f;P') \geq L(f;P)$ สำหรับ $P' \supset P$ ทุกพาร์ทิชั่น

2. $L(f;P_1) \leq U(f;P_2)$ เมื่อ P_1, P_2 เป็นพาร์ทิชั่นใด ๆ ของ $[a,b]$

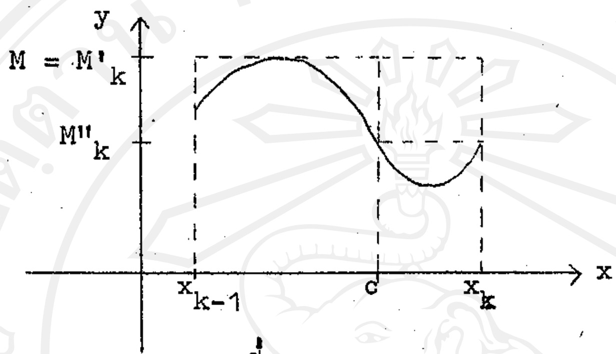
<u>พิสูจน์</u> 1. (ก) $U(f; P') \leq U(f; P)$

ตอนแรกจะพิจารณากรณีที่ P' มีจุดมากกว่า P หนึ่งจุด

$$\therefore P' = P \cup \{c\}$$

ให้ $M_k' = \sup\{f(x) / x_{k-1} \leq x \leq c\}$

$M_k'' = \sup\{f(x) / c \leq x \leq x_k\}$ (ดูรูปที่ 7.1.5)



<u>รูปที่ 7.1.5</u>

จะได้ว่า $U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$

$$U(f;P') = \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_k'(c - x_{k-1}) + M_k''(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

ให้ M_k เป็นอัปเปอร์บาวด์ของฟังชั่น f บนช่วง $[x_{k-1}, x_k]$ ดังนั้น M_k ย่อมเป็นอัปเปอร์บาวด์ของ f บนช่วง $[x_{k-1}, c]$ ซึ่งเป็นช่วงเล็กกว่าช่วงแรก (ดูจากรูปที่ 7.1.5)

$\therefore M_k' \leq M_k$ ในทำนองเดียวกัน $M_k'' \leq M_k$

ดังนั้น

$$M_k'(c - x_{k-1}) + M_k''(x_k - c) \leq M_k(c - x_{k-1}) + M_k(x_k - c) = M_k(x_k - x_{k-1})$$

จะได้ว่า $U(f;\, P') \leq U(f;\, P)$

ในกรณีทั่ว ๆ ไป ถ้า $P = P_1$ และเพิ่มครั้งละจุดไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ P'

นั่นคือ $P = P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots \subset P_m = P'$

โดยที่พาร์ทิชั่น P_{i+1} มีจุดมากกว่า P_i หนึ่งจุด

ดังนั้น

$$U(f;P') = U(f;P_m) \leq U(f;P_{m-1}) \leq \cdots \leq U(f;P_2) \leq U(f;P_1) = U(f;P)$$

$$\therefore\ U(f;\, P') \leq U(f;\, P)$$

ข้อ (ข) $L(f;P') \geq L(f;\, P)$

เราได้ว่า $L(f;P') = -\,U(-f;\, P')$

แต่ $-\,U(-f;\, P') \geq -\,U(-f;\, P) = L(f;P)$ (ทฤษฎี 7.1.4 ก)

$$\therefore\ L(f;\, P') \geq L(f;\, P)$$

2) ต้องพิสูจน์ว่า $L(f;\, P_1) \leq U(f;\, P_2)$ เมื่อ P_1, P_2 เป็นพาร์ทิชั่นใด ๆ ของ $[a,\, b]$

ให้พาร์ทิชั่น $P^* = P_1 \cup P_2$

$\therefore\ P^* \supset P_1$ และ $P^* \supset P_2$

และ $L(f;P_1) \leq L(f;P^*) \leq U(f;P^*) \leq U(f;\, P_2)$ ทฤษฎี 7.1.4 และ เลมมา 7.1.3

จากเลมมา 7.1.3 เราทราบว่าเซ็ท $\{U(f;P)/$ สำหรับทุกพาร์ทิชั่น P ของ $[a,b]\} = \{U(f;P)\}$ และ $\{L(f;P)/$ สำหรับทุกพาร์ทิชั่น P ของ $[a,b]\} = \{L(f;\, P)\}$ เป็นเซ็ทที่บาวด์ทั้งคู่ และจากทฤษฎี 7.1.4 ข้อ 2) เซ็ท $\{U(f;\, P)\}$ บาวด์ข้างล่างด้วยเซ็ท $\{L(f;\, P)\}$

$\therefore \quad \{ L(f;P)\} \leq \inf \{U(f;P)\}$

และ $\inf \{U(f;P)\}$ เป็นอัปเปอร์บาวด์ของเซ็ท $\{L(f;P)\}$

$\therefore \quad \sup \{L(f;P)\} \leq \inf \{U(f;P)\}$

<u>นิยาม 7.1.5</u> ถ้า $f:[a,b] \to E^1$ ซึ่ง f เป็นฟังชันที่บาวด์บนช่วง $[a,b]$ และ P เป็นพาร์ทิชั่นของ $[a,b]$ อัปเปอร์รีมานอินทิกรัล (upper Riemann integrals) ของ f เขียนแทนด้วย $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ หรือ $\overline{\int_a^b} f$ มีความหมายดังนี้

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \{U(f;P)\}$$

โลเวอร์รีมานอินทิกรัล (lower Riemann integrals) ของ f เขียนแทนด้วย $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$ หรือ $\underline{\int_a^b} f$ มีความหมายดังนี้

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \{ L(f;P)\}$$

เรากล่าวว่า f เป็นรีมานอินทิเกรเบิล (Riemann integrable) บน $[a,b]$ หรือ f อินทิเกรเบิล หรือ f อินทิเกรตได้ ก็ต่อเมื่อ

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$$

เรียกจำนวนจริงนี้ว่าอินทิกรัล (integral) ของ f บน $[a,b]$ เขียนแทนด้วย $\int_a^b f(x)dx$ หรือ $\int_a^b f$

จากนิยาม 7.1.5 ข้างต้น ถ้า f อินทิเกรเบิล ได้ว่า $\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f$

และ $L(f;P) \leq \int_a^b f \leq U(f;P)$

และจะใช้ $R[a,b]$ แทนกลุ่ม (class) ของฟังชั่น f ทั้งหมดที่อินทิเกรเบิลบน $[a,b]$

สำหรับ $\int_a^b f$ จะมีความหมายก็ต่อเมื่อ $a < b$

<u>ตัวอย่าง 7.1.2</u> พิจารณาฟังชั่น $f(x) = c$ ซึ่ง $f : [a,b] \to E^1$

ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชั่นใด ๆ ของช่วง $[a,b]$

$$\because \quad m_i = M_i = c$$

$$\therefore L(f; P) = \sum_{i=1}^{n} c\,(x_i - x_{i-1})$$

$$= c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

และ $$\therefore U(f; P) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1})$$

$$= c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$$

$$\therefore \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a)$$

$\therefore$ f เป็นฟังชั่นที่อินทิเกรเบิลบนช่วง $[a, b]$ และ

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

<u>ตัวอย่าง 7.1.3</u> พิจารณา $f : [0,a] \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = x^2$ ซึ่ง $a > 0$

ให้ P_n เป็นพาร์ทิชั่นของ $[0, a]$ โดยแบ่ง $[0,a]$ ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน

$\because$ f เป็นฟังชั่นไม่ลดลงในช่วง $[0,a]$

$\therefore \quad M_i = (\frac{ia}{n})^2$

และ $m_i = (\frac{(i-1)a}{n})^2$ สำหรับ $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ ทุกตัว

$\therefore U(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{ia}{n})^2 \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$ ------1)

และ $L(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} (\frac{(i-1)a}{n})^2 \frac{a}{n} = \frac{a^3}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2$ ----2)

จาก 1) $\therefore U(f;P_n) = \frac{1}{6} a^3(1 + \frac{1}{n})(2+ \frac{1}{n})$

($\because \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$)

ดังนั้น $U(f;P_n)$ เข้าใกล้ $\frac{1}{3} a^3$ เมื่อ n เข้าสู่อนันต์

$\therefore \overline{\int_0^a} f \leq \frac{a^3}{3}$ ------------3)

จาก 2) $\therefore L(f; P_n) = \frac{1}{6} a^3(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n})$

($\because \sum_{i=1}^{n} (i - 1)^2 = \frac{1}{6} (n - 1)n.(2n - 1)$)

ดังนั้น $L(f; P_n)$ เข้าใกล้ $\frac{1}{3} a^3$ เมื่อ n เข้าสู่อนันต์

$\therefore \underline{\int_0^a} f \geq \frac{a^3}{3}$ -------------4)

จาก 3) และ 4) $\therefore \overline{\int_0^a} f = \underline{\int_0^a} f = \frac{a^3}{3}$

ดังนั้น f เป็นฟังชั่นอินทิเกรชั่นบน $[0, a]$ และ

$\int_0^a f(x)\,dx = \frac{a^3}{3}$

<u>ตัวอย่าง 7.1.4</u> พิจารณาฟังชั่น $f(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \text{ เป็นจำนวนตักยะ} \\ 0 \ , & x \text{ เป็นจำนวนอตักยะ} \end{cases}$

ซึ่ง $f : [0,1] \longrightarrow E^1$

ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชั่นใดของช่วง $[0,1]$

$\therefore M_i = 1$ เนื่องจากมีจำนวนตักยะในช่วง $[x_{i-1}- x_i]$

$m_i = 0$ เนื่องจากมีจำนวนอตักยะในช่วง $[x_{i-1}-x_i]$

$$\therefore U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} 1(x_i - x_{i-1}) = 1$$

$$L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} 0(x_i - x_{i-1}) = 0$$

$\therefore \overline{\int_0^1} f = 1$ และ $\underline{\int_0^1} f = 0$

ดังนั้น f ไม่อินทิเกรเบิลบนช่วง $[0, 1]$

<u>ทฤษฎี 7.1.6</u> (Riemann's condition) ถ้า $f : [a,b] \to E^1$ และ f เป็นฟังชั่นที่บาวด์บนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า $f \in R[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมีพาร์ทิชั่น P ของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon$$

พิสูจน์ 1) สมมติว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมีพาร์ทิชั่น P ของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon$$

(จะพิสูจน์ว่า $f \in R[a,b]$)

เนื่องจาก $\overline{\int}_a^b f \leq U(f;P)$ และ $\underline{\int}_a^b f \geq L(f;P)$

$\therefore 0 \leq \overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f \leq U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$

$\therefore \overline{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f$

$\therefore f$ เป็นฟังก์ชันอินทิเกรเบิลบน $[a,b]$

2) สมมติว่า $f \in R[a,b]$ จะได้ว่า

สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชั่น P_1 ของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$\overline{\int}_a^b f = \inf \{U(f;P_1)\}$$

$$\therefore U(f;P_1) < \overline{\int}_a^b f + \varepsilon/2$$

$(\because U(f;P_1) \geq \inf\{U(f;P_1)\})$

และสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชั่น P_2 ของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$\inf\{U(f;P_1)\} = \sup\{L(f;P_2)\} = \underline{\int}_a^b f$$

$$\therefore L(f;P_2) > \underline{\int}_a^b f - \varepsilon/2$$

ให้พาร์ทิชั่น $P = P_1 \cup P_2$

จะได้ $U(f;P) \leq U(f;P_1) < \overline{\int}_a^b f + \varepsilon/2$

และ $L(f;P) \geq L(f;P_2) > \underline{\int}_a^b f - \varepsilon/2$

$\therefore U(f;P) - L(f;P) < \overline{\int}_a^b f + \varepsilon/2 - \underline{\int}_a^b f + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$(\because \overline{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f)$

นั่นคือ $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$

<u>ตัวอย่าง 7.1.5</u> พิจารณาฟังก์ชั่น $f : [0,1] \to E^1$ ซึ่ง $f(x) = x$

ให้ $P_n = \{0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n, n/n=1\}$ เป็นพาร์ทิชั่นของ $[0,1]$, f เป็นฟังก์ชั่นไม่ลดลงบนช่วง $[0,1]$

$\therefore M_i = i/n \quad , \quad i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ ทุกตัว

$m_i = (i-1)/n \, , \quad i \in \{1,2,3,\ldots,n\}$ ทุกตัว

$$\therefore U(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= (n+1)/2n \qquad (\because \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2)$$

$$L(f;P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{(n)}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{(n)} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1)$$

$$= \frac{(n-1)}{2n}$$

$$\therefore U(f;P_n) - L(f;P_n) = \frac{n+1}{2n} - \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{n}$$

สำหรับ $\varepsilon > 0$ เลือก $n > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\therefore U(f;P_n) - L(f;P_n) < \varepsilon$$

$$\therefore f \in R[0,1]$$

<u>ตัวอย่าง 7.1.6</u> ถ้า $f : [0, 2] \longrightarrow E^1$ ซึ่งฟังชั่น

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & 0 \leq x < 1 \\ 2 , & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $h = \min\{1, \varepsilon/2\}$

P เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[0,2]$ ซึ่งประกอบด้วยจุด x_0, x_1, x_2, x_3 ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

$x_0 = 0, \quad x_1 = 1-h, \quad x_2 = 1 + h$ และ $x_3 = 2$

จะได้ $m_1 = M_1 = 1$; $m_2 = 1, \quad M_2 = 2$

$m_3 = M_3 = 2$

$$\therefore L(f;P) = 1(1-h) + 1(2h) + 2(1-h) = 3-h$$

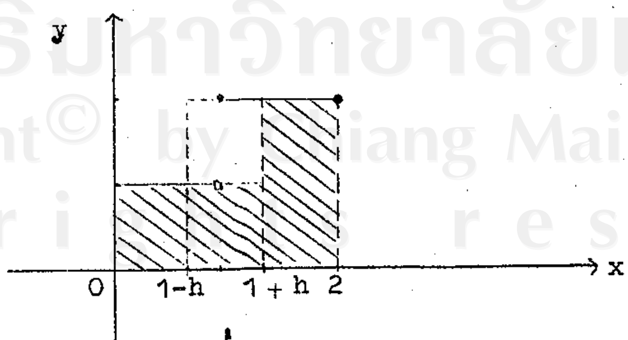
$$U(f;P) = 1(1-h) + 2(2h) + 2(1-h) = 3+h$$

$$U(f;P) - L(f;P) = 2h < \varepsilon$$

$\therefore f \in R[0,2]$ ดูรูปที่ 7.1.6

L(f:P) แทนด้วยพื้นที่

U(f;P) แทนด้วยพื้นที่ พื้นที่



รูปที่ 7.1.6

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงหาโลเวอร์รีมานซัมและอัปเปอร์รีมานซัม โดยใช้พาร์ทิชั่นที่กำหนด พร้อมทั้งเขียนรูป

   (1.1) $f(x) = 2x$; $P = \{0, 1, 3/2, 3, 5\}$

   (1.2) $f(x) = 1-x$; $P = \{-2, -\frac{4}{3}, 0, 1, 3, 9\}$

   (1.3) $f(x) = x^2$; $P = \{-3, -2, -1, 1/2, 2\}$

   (1.4) $f(x) = \sin x$; $P = \{-\pi, -\pi/2, \pi/6, 2\pi/3, 2\pi\}$

2. ให้นิยามฟังชั่น f ดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ 0 \le x < 1 \\ 1-x & ; \ 1 \le x < 2 \\ x-2 & , \ 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

   และให้พาร์ทิชั่น $P = \{0, 1/2, 3/4, 5/2, 3\}$ จงหาโลเวอร์รีมานซัมและอัปเปอร์รีมานซัม พร้อมทั้งเขียนรูป

3. ให้ $f: [a,b] \dashrightarrow E^1$ เป็นฟังชั่นที่บาวด์บนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า

   3.1 $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ และ $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ มีความหมาย

   3.2 $\underline{\int_a^b} f(x)dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

4. ถ้า $f: [a,b] \dashrightarrow E^1$ จะได้ว่า $f \in R[a,b]$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ซึ่งถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชั่น P ของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง $|U(f;P)-L| < \varepsilon$, $|L - L(f;P)| < \varepsilon$ และ $\int_a^b f(x)\,dx = L$

7.2 ฟังชั่นที่อินทิเกรตได้ (Integrable Function)

ทฤษฎี 7.2.1 ถ้า $f : [a,b] \to E^1$ ซึ่ง f เป็นฟังชั่นที่บาวด์และโมโนโทน บนช่วงปิด $[a,b]$ จะได้ว่า $f \in R[a,b]$

พิสูจน์ ถ้า f เป็นฟังชั่นคงที่ บนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า $f \in R[a,b]$ (ตัวอย่าง 7.1.2)

ถ้า f ไม่ใช่ฟังชั่นคงที่ ให้ f เป็นฟังชั่นที่มีค่าไม่ลดลง จะได้ $f(a) < f(b)$

ให้ $\varepsilon > 0$ และ P เป็นพาร์ทิชั่นของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$|P| < \varepsilon / (f(b) - f(a))$$

$\because$ f เป็นฟังชั่นไม่ลดลง

$\therefore$ $M_i = f(x_i)$ สำหรับ i ทุกตัว

$m_i = f(x_{i-1})$ สำหรับ i ทุกตัว

$$\therefore U(f;P) - L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{n=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1}))(\varepsilon / (f(b) - f(a)))$$

$$< (f(b) - f(a)) \cdot \frac{\varepsilon}{(f(b) - f(a))} = \varepsilon$$

$\therefore$ $f \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.1.6)

ถ้า f เป็นฟังชันไม่เพิ่มขึ้น จะได้ $f(a) > f(b)$

ให้ $\varepsilon > 0$ และ P เป็นพาร์ทิชั่นของ $[a,b]$ ซึ่ง

$|P| < \varepsilon / (f(a) - f(b)$

$\because$ f เป็นฟังชันไม่เพิ่มขึ้น

$\therefore$ $M_i = f(x_{i-1})$ สำหรับ i ทุกตัว

$m_i = f(x_i)$ สำหรับ i ทุกตัว

$$\therefore U(f;P) - L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1} - x_i))\,(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} (f(x_{i-1} - x_i).(\varepsilon/(f(a) - f(b))$$

$$< (f(a) - f(b)\ .\ \frac{\varepsilon}{(f(a)-f(b))} = \varepsilon$$

$\therefore$ $f \in R\,[a,b]$ (ทฤษฎี 7.1.6)

<u>ตัวอย่าง 7.2.1</u> พิจารณา $f : [0,4] \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \leq x < 3 \\ 3 & \quad 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

เนื่องจาก f มีค่าไม่ลดลงในช่วง $[0,4]$ ดังนั้น $f \in R\,[0,4]$

<u>ตัวอย่าง 7.2.2</u> พิจารณาฟังชัน $f : [0,1] \dashrightarrow E^1$ ดังนี้

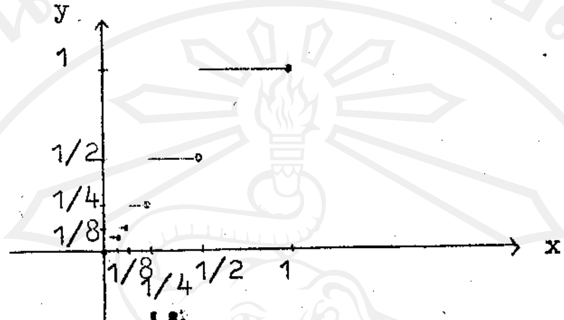
$$f(x) = \begin{cases} 1/2^n & \text{สำหรับ } 1/2^{n+1} < x \leq 1/2^n \text{ เมื่อ } n \in I \text{ และ } n \geq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

กราฟของ f แสดงได้ดังรูป 7.2.1

ฟังชั่น f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $1/_{2^n}$ สำหรับ $n > 0$ ทุกตัว

แต่ f เป็นฟังชั่นไม่ลดลงบนช่วง $[0,1]$ ดังนั้น $f \in R[0,1]$

จะเห็นว่าฟังชั่นไม่ต่อเนื่องในช่วงที่กำหนด แต่อินทิเกรตในช่วงกำหนดได้



รูปที่ 7.2.1

__เลมม่า 7.2.2__ ถ้า $f : [a,b] \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง f เป็นฟังชั่นที่ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$

สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชั่น P ที่ทำให้ $U(f;P)-L(f;P) < \varepsilon$

__พิสูจน์__ $\because$ f มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $[a,b]$ (ทฤษฎี 6.3.2)

นั่นคือ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $d(x', x'') < \delta)$ จะได้ว่า

$d(f(x'), f(x'') < \varepsilon/_{(b-a)}$ สำหรับ $x', x'' \in D_f$ ทุกตัว

จาก $d(x', x'') < \delta$ จะได้ $|x' - x''| < \delta$ และ

$d(f(x'); f(x'')) < \varepsilon/(b-a)$ จะได้

$|f(x') - f(x'')| < \delta/(b-a)$

ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[a,b]$

และ $|P| < \delta$

แต่จะมีค่าของ f ซึ่งเท่ากับ M_i และ m_i ดังนั้น ถ้า $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ จะได้ว่า $|M_i - m_i| < \varepsilon/(b-a)$ สำหรับ i ทุกตัว

$$\therefore U(f;P) - L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

จากเลมมา 7.2.2 จะได้ทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 7.2.3</u> ถ้า $f : [a,b] \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง f เป็นฟังชั่นต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า $f \in R[a,b]$

<u>ตัวอย่าง 7.2.3</u> ฟังชั่น $f(x) = x + 1$ บนช่วง $[1, 2]$ ซึ่ง f มีความต่อเนื่องบน $[1, 2]$ ดังนั้น $f \in R[1,2]$

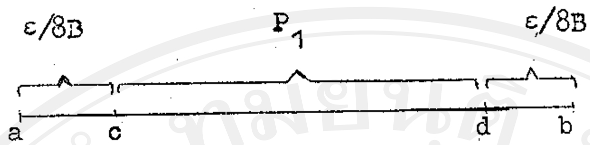
<u>ทฤษฎี 7.2.4</u> ถ้า $f : [a,b] \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง f เป็นฟังชั่นที่บาวด์ และมีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด (a,b) จะได้ว่า $f \in R[a,b]$

<u>พิสูจน์</u> $\because$ f เป็นฟังชั่นที่บาวด์บนช่วง $[a,b]$

ดังนั้นจะมี $B \in R$ ซึ่ง $|f(x)| < B$ สำหรับ $x \in [a,b]$ ทุกตัว

สำหรับ $\varepsilon > 0$ ให้ $c = a + \frac{\varepsilon}{8B}$, $d = b - \frac{\varepsilon}{8B}$ ซึ่ง $c < d$

(ดูรูปที่ 7.2.2)



รูปที่ 7.2.2

$\because$ f มีความต่อเนื่องบน $[c,d]$ จะมีพาร์ทิชั่น P_1 ของ $[c,d]$ ซึ่ง

$U(f;P_1) - L(f;P_1) < \varepsilon/2$, เลมมา 7.2.2

ให้ $M' = \sup\{f(x) / x \in [a,c]\}$

$m' = \inf\{f(x) / x \in [a,c]\}$

$M'' = \sup\{f(x) / x \in [d,b]\}$

$m'' = \inf\{f(x) / x \in [d,b]\}$

จะได้ว่า $M' \leq B$, $-m' \leq B$

$M'' \leq B$, $-m'' \leq B$

ให้ P เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[a,b]$ ซึ่งได้จากการเพิ่มจุด a และ b ลงในพาร์ทิชั่น P_1

$$\begin{aligned}\therefore U(f;P) - L(f;P) &= (M'(c-a) + U(f;P_1) + M''(b-d)) - \\ &\quad (m'(c-a) + L(L;P_1) + m''(b-d)) \\ &\leq U(f;P_1) - L(f;P_1) + B\cdot\frac{\varepsilon}{8B} + B\cdot\frac{\varepsilon}{8B} + B\cdot\frac{\varepsilon}{8B} + B\cdot\frac{\varepsilon}{8B} \\ &\leq U(f;P_1) - L(f;P_1) + 4B\cdot\frac{\varepsilon}{8B} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

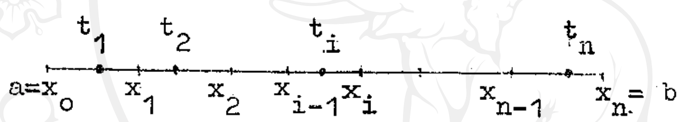
รีมานซัม (Riemann Sums)

พิจารณา $f: [a,b] \to E^1$ ซึ่งฟังชั่น f บาวด์บนช่วง $[a,b]$ และ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชั่นของ $[a,b]$ ถ้า $t_i \in [x_{i-1}x_i]$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots, n$ (ดูรูปที่ 7.2.3) และ M_i, m_i เป็น sup, inf ของฟังชั่น f บนช่วง $[x_{i-1}\ x_i]$ ตามลำดับ

จะได้ว่า $m_i \leq f(t_i) \leq M_i$

และ $L(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i-x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1}) \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} M_i\ (x_i-x_{i-1}) = U(f;P) \quad \text{------- } 7.2.5)$$



รูปที่ 7.2.3

__นิยาม 7.2.5__ ผลบวก $\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1})$ ในสมการ 7.2.5) เรียกว่า รีมานซัม (Riemann sum of f over $[a,b]$ relative to P) ของ f บนช่วง $[a,b]$

__นิยาม 7.2.6__ $f : [a,b] \to E^1$ ซึ่งฟังชั่น f บาวด์บนช่วง $[a,b]$ รีมานซัมของฟังชั่น f บนช่วง $[a,b]$ ลู่เข้าสู่จำนวน L ถ้า กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $|P| < \delta$ ซึ่งถ้า P เป็นพาร์ทิชั่นของ $[a, b]$ จะได้ว่า

$$|S(f;\ P) - L| < \varepsilon$$

เมื่อ S(f;P) เป็นรีมานซัมใดของฟังชั่น f บนช่วง $[a,b]$

<u>ทฤษฎี 7.2.7</u> ให้ $f : [a,b] \to E^1$ ถ้ารีมานซัมของฟังชั่น f บนช่วง $[a,b]$ ลู่เข้าสู่จำนวน L จะได้ว่า $f \in R[a,b]$ ซึ่ง $\int_a^b f = L$

พิสูจน์ (จะพิสูจน์ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชั่น P ของ $[a,b]$ ซึ่งทำให้ $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$; แต่จะพิสูจน์ว่า $|U(f;P) - L| < \varepsilon/2$ และ $|L - L(f;P)| < \varepsilon/2$ ก่อน)

ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$M_i = \sup \{f(x) / x \in [x_i, x_{i-1}]$$

ดังนั้นจะมี $t_i \in [x_i, x_{i-1}]$ สำหรับ i แต่ละตัว ซึ่ง

$$0 \leq M_i - f(t_i) < \varepsilon/4(b-a)$$

และ $$0 \leq M_i(x_i - x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$< (\varepsilon/4(b-a))(x_i - x_{i-1})$$

ดังนั้น $$0 \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$
$$< \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon/4(b-a))(x_i - x_{i-1})$$

$$0 \leq U(f;P) - S(f;P) \leq [\varepsilon/(4(b-a))]\,(b-a) ;$$

$$\therefore\ U(f;P) - S(f;P) < \varepsilon/4 \qquad \text{------1)}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$m_i = \inf \{f(x) / x \in [x_i - x_{i-1}]\}$$

ดังนั้นจะมี $t_i \in [x_i, x_{i-1}]$ สำหรับ i แต่ละตัว ซึ่ง

$$0 \leq f(t_i) - m_i < \varepsilon/4\,(b-a)$$

จะได้ว่า $0 \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}) <$

$$< \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon/4\,(b-a))\,(x_i - x_{i-1})$$

$$0 \leq S'(f;P) - L(f;P) < \varepsilon/4 \;;$$

(รีมานซัม $S'(f;P) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$)

$$\therefore \left| S'(f;P) - L(f;P) \right| < \varepsilon/4 \qquad \text{--------- 2)}$$

$\because$ รีมานซัม ลู่เข้าสู่จำนวน L ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|P| < \delta$ เมื่อ P เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า

$|S(f;P) - L| < \varepsilon/4$ เมื่อ $S(f;P)$ เป็นรีมานซัมของ f บนช่วง $[a,b]$ -----------3)

และ $|S'(f;P) - L| < \varepsilon/4$ เมื่อ $S'(f;P)$ เป็นรีมานซัมของ f บนช่วง $[a,b]$ ----------4)

$$\therefore (U(f;P) - L) \leq |U(f;P) - L| = |U(f;P) - S(f;P) + S(f;P) - L|$$

$$\leq |U(f;P) - S(f;P)| + |S(f;P) - L|$$

$$< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 \qquad \text{จาก 1), 3)}$$

$$\therefore U(f;P) - L < \varepsilon/2 \qquad \text{----------5)}$$

และ $(L - L(f;P)) \leq \left| L-L(f;P) \right| = \left| L-S'(f;P) + S(f;P) - L(f;P) \right|$

$$\leq \left| L-S'(f;P) \right| + \left| S'(f;P)-L(f;P) \right|$$

$$< \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2 \quad \text{จาก 4), 2)}$$

$$\therefore L - L(f;P) < \varepsilon/2$$

5) + 6) $\quad U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$

$$\therefore f \in R[a,b] \qquad \text{(ทฤษฎี 7.1.6)}$$

<u>ทฤษฎี 7.2.8</u> ให้ $f : [a,b] \dashrightarrow E^1$ และ $f \in R[a,b]$ จะได้ว่า รีมานซัมของฟังชั่น f บนช่วง $[a,b]$ ลู่เข้าสู่ $\int_a^b f(x)dx$

<u>พิสูจน์</u> $\because f \in R[a,b]$ ดังนั้นให้ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชั่น P ของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง $|P| < \delta$ เมื่อ $\delta > 0$ จะได้ว่า

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon \quad \text{--------------1)}$$

ให้ $S(f;P)$ เป็นรีมานซัมของฟังชั่น f บนช่วง $[a,b]$

ซึ่ง $L(f;P) \leq S(f;P) \leq U(f;P) \quad \text{---- 2)}$

แต่ $L(f;P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f;P) \quad \text{-----3)}$

จาก 1), 2) และ 3)

$$\therefore \left| S(f;P) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

$\therefore$ รีมานซัมของฟังชั่น f บนช่วง $[a,b]$ ลู่เข้าสู่ $\int_a^b f(x)\,dx$

จากทฤษฎี 7.2.7 และ 7.2.8 จะได้ว่า ถ้า $f : [a,b] \to E^1$ ซึ่ง $f \in R[a,b]$ ก็คือเมื่อรีมานซัมของฟังชั่น f บนช่วง $[a,b]$ ลู่เข้าสู่จำนวนจริง L เมื่อ $\int_a^b f(x)dx = L$

<u>แบบฝึกหัดชุด 7.2</u>

1. ฟังชันต่อไปนี้อินทิเกรตได้หรือไม่ บนช่วงที่กำหนดให้ เพราะเหตุใด

1.1 $f(x) = \begin{cases} 1 , & 0 \leq x < 3 \\ 3 , & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

1.2 $g(x) = \begin{cases} 3 , & -2 \leq x < 3 \\ -3 , & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$

1.3 $h(x) = x^3$ บนช่วง $[-1, 1]$

1.4 $H(x) = \begin{cases} x^2 ; & -2 \leq x < 0 \\ x ; & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

1.5 $G(H) = 1/x$; บนช่วง $(-1,0)$

1.6 $F(x) = \begin{cases} 12 ; & x = -2 \\ x ; & -2 < x < 2 \\ -12 ; & x = 2 \end{cases}$

2. ถ้า A เป็นจำนวนจริง $A < \varepsilon$ สำหรับ ε ทุกตัว และ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $A \leq 0$

3. ถ้า $h : [a,b] \to E^1$ จะเรียกว่า ฟังชั่นขั้นบันได (step function) ถ้าสำหรับพาร์ทิชั่น $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ บางพาร์ทิชั่นของ $[a,b]$ จะมีค่าคงที่ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ ซึ่ง $h(x) = c_k$ สำหรับ $x \in (x_{k-1}, x_k)$ ทุกตัว $k = 1, 2, \ldots, n$

จงพิสูจน์ว่า $f \in R[a,b]$

7.3 คุณสมบัติของรีมานอินทิกรัล (The Properties of Riemann Integral)

สำหรับ $f \in R[a,b]$ นั้น f เป็นฟังชั่น ซึ่ง $f : [a,b] \to E^1$

ทฤษฎี 7.3.1 (ก) ถ้า $f \in R[a,b]$ และ $a < c < b$ จะได้ว่า

$f \in R[a,c]$, $f \in R[c,b]$ และ

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(ข) ถ้า $f \in R[a,c]$ และ $f \in R[c,b]$ จะได้ว่า

$f \in R[a,b]$

พิสูจน์ (ก) สมมติว่า $f \in R[a,b]$

ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัว จะมีพาร์ทิชั่น $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ของ $[a,b]$ ซึ่ง $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$ (ทฤษฎี 7.1.6)

ให้ P_1 เป็นพาร์ทิชั่นของ $[a,b]$ ซึ่ง

$P_1 = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \cup \{c\}$ หรือ $P_1 \supset P$

$\therefore U(f;P) \geq U(f;P_1) \geq L(f;P_1) \geq L(f;P)$

(ทฤษฎี 7.1.4 ข้อ ก.)

และจะได้ว่า $U(f;P_1) - L(f;P_1) \leq U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$ -- 1)

ให้ $P' = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_i\}$ เป็นพาร์ทิชั่นของ $[a,c]$

และ $P'' = \{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ เป็นพาร์ทิชั่นของ $[c,b]$

จะได้ว่า $L(f;P_1) = L(f;P') + L(f;P'')$ ------------2)

และ $U(f;P_1) = U(f;P') + U(f;P'')$ ------------3)

ดังนั้น $U(f;P) - L(f;P) = \left[U(f;P_1) - L(f;P_1)\right] + \left[U(f;P_2) - L(f;P_2)\right]$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\therefore \quad f \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.1.6)

<u>นิยาม 7.3.2</u> ถ้า $f \in R[a,b]$ เราให้นิยามเพิ่มเติมดังนี้

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

และ $\int_b^a f = -\int_a^b f$ เมื่อ $a < b$

<u>ทฤษฎี 7.3.3</u> ถ้า $f \in R[a,b]$ และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$cf \in R[a,b]$ และ $\int_a^b cf = c\int_a^b f$

<u>พิสูจน์</u> 1) ถ้า $c > 0$

$\because f \in R[a,b]$ ดังนั้นให้ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชั่น P ของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon/c$$

$$\therefore L(cf;P) = \sum_{i=1}^{n} cm_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= c\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$= c\,L(f;P)$$

และในทำนองเดียวกัน $U(cf;P) = c\,U(f;P)$

$$\therefore U(cf;P) - L(cf;P) = cU(f;P) - cL(f;P)$$

$$= c\left[U(f;P) - L(f;P)\right]$$

$$< c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

$\therefore\ cf \in R[a,b]$ เมื่อ $c > 0$

$$\because\ \overline{\int_a^b} cf = \inf\{U(cf;P)\}$$

$$= \inf\{c\,U(f;P)\}$$

$$= c \cdot \inf\{U(f;P)\}$$

$$= c \overline{\int_a^b} f \qquad \text{------ } 1')$$

และ $\because\ \underline{\int_a^b} cf = \sup\{L(cf;P)\}$

$$= \sup\{c \cdot L(f;P)\}$$

$$= c \cdot \sup\{L(f;P)\}$$

$$= c \underline{\int_a^b} f \qquad \text{--------- } 2')$$

จาก $1')$ และ $2')$ $\therefore \int_a^b cf = c\int_a^b f$

2) ถ้า $c = 0$ จะได้ว่า $cf \in R[a,b]$ และ

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f$$

3) ถ้า $c < 0$ ให้ $\lambda = -c > 0$

$\because f \in R[a,b]$ ดังนั้นให้ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชัน P ของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon/\lambda$$

$$\lambda U(f;P) - \lambda L(f;P) < \varepsilon$$

$$U(\lambda f;P) - L(\lambda f;P) < \varepsilon$$

$\therefore\ \lambda f \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.1.6)

และจะได้ว่า $-cf \in R[a,b]$ $(\because \lambda = -c)$

$$\therefore \int_a^b cf = \int_a^b (-\lambda)f$$

$$= \int_a^b (-\lambda f)$$

$$= \inf \{U(-\lambda f; P)\}$$

$$= \inf \{-L(\lambda f; P)\}$$

$$= -\sup \{L(\lambda f; P)\}$$

$$= -\int_a^b \lambda f$$

$$= -\lambda \int_a^b f$$

$$= c \int_a^b f$$

จากกรณีที่ 1), 2) และ 3) จะได้ว่า $cf \in R[a,b]$ และ $\int_a^b cf = c\int_a^b f$

จากทฤษฎี 7.3.3 ถ้า $f \in R[a,b]$ จะได้ว่า $-f \in R[a,b]$ เมื่อ $c = -1$

<u>เลมมา 7.3.4</u> ถ้า $f : [a,b] \longrightarrow E^1$ และ $g : [a,b] \longrightarrow E^1$ ซึ่ง f และ g เป็นฟังก์ชันที่บาวด์บนช่วง $[a,b]$, P เป็นพาร์ทิชันของช่วง $[a,b]$ จะได้ว่า

$$U(f+g;\ P) \leq U(f;P) + U(g;P)$$

และ $$L(f+g;\ P) \geq L(f;P) + L(g;P)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้พาร์ทิชั่น $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ และ

$$m_i = \inf \{(f+g)(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$m_i' = \inf \{f(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$m_i'' = \inf \{g(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i = \sup \{(f+g)(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i' = \sup \{f(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i'' = \sup \{g(x) / x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$\therefore (f+g)(x) = f(x) + g(x) \geq m_i' + m_i''$

(สำหรับ $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ทุกตัว)

ดังนั้น $m_i' + m_i''$ เป็นโลเวอร์บาวด์ของ $f + g$ ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$

$\therefore m_i \geq m_i' + m_i''$ ------------- 1)

และ $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leq M_i' + M_i''$

(สำหรับ $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ทุกตัว)

ดังนั้น $M_i' + M_i''$ เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ $f + g$ ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$

$\therefore M_i \leq M_i' + M_i''$ -------- 2)

$$U(f+g; P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i' + M_i'')(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{จาก 2)}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} M_i' (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} M_i''(x_i - x_{i-1})$$

$\therefore\ U(f+g;P) \le U(f;P) + U(g,P)$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน $L(f+g;P) \ge L(f;P) + L(g;P)$

<u>ทฤษฎี 7.3.5</u> ถ้า $f \in R[a,b]$ และ $g \in R[a,b]$ จะได้ว่า

$$f + g \in R[a,b] \text{ และ } \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

<u>พิสูจน์</u> $\because\ L(f+g;P) \ge L(f;P) + L(g;P)$

และ $U(f+g;P) \le U(f;P) + U(g;P)$ เลมมา 7.3.4

$\therefore\ L(f;P) + L(g;P) \le L(f+g;P) \le U(f+g;P) \le U(f;P) + U(g;P)$

$\because\ f \in R[a,b]$ และ $g \in R[a,b]$ จะมีพาร์ทิชั่น P_1 และ P_2 ของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(f;P_1) - L(f;P_1) < \varepsilon/2 \quad \text{------ 1)}$$

$$U(g;P_2) - L(g;P_2) < \varepsilon/2 \quad \text{------ 2)}$$

ให้พาร์ทิชั่น $P = P_1 \cup P_2$

$$\therefore\ \left[U(f,P) + U(g;P)\right] - \left[L(f;P) + L(g;P)\right] \le \left[U(f;P_1) - L(f;P_1)\right] + \left[U(g,P_2) - L(g;P_2)\right]$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(ทฤษฎี 7.1.4 ก. และ สมการ 1), 2))

$U(f+g,P) - L(f+g;P) < \varepsilon$

$\therefore\ f + g \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.1.6)

(ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$)

กำหนด $\varepsilon > 0$, $f \in R[a,b]$ และ $g \in R[a,b]$

$$\therefore U(f;P) < \int_a^b f + \varepsilon$$

$$U(g;P) < \int_a^b g + \varepsilon$$

แต่ $\int_a^b (f+g) \leq U(f+g;\ P) \leq U(f;P) + U(g;\ P)$ (นิยาม 7.1.5 และ
เลมมา 7.3.4)

$$\therefore \int_a^b (f+g) \leq U(f;P) + U(g;P) < \int_a^b f + \int_a^b g + 2\varepsilon$$

ดังนั้น $\int_a^b (f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$ ($\because$ ε เป็นจำนวนใด ๆ) --3)

จาก 3) แทน f และ g ด้วย -f และ -g ตามลำดับ

จะได้ว่า $\int_a^b((-f) + (-g)) \leq \int_a^b(-f) + \int_a^b (-g)$

$\int_a^b(-1)(f+g) \leq -\int_a^b f + (-1)\int_a^b g$ (ทฤษฎี 7.3.3)

$(-1)\int_a^b (f+g) \leq (-1)(\int_a^b f + \int_a^b g)$ (ทฤษฎี 7.3.3)

$\int_a^b (f+g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g$ ------4)

จาก 3) และ 4) $\therefore \int_a^b(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

<u>เลมมา 7.3.6</u> ถ้า $f(x) \leq g(x)$ สำหรับ x ทุกตัวในช่วง $[a,b]$ และถ้า
$f \in R[a,b]$ และ $g \in R[a,b]$ จะได้ว่า $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

<u>พิสูจน์</u> ให้ P เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[a,b]$

$$M_i = \sup\{f(x)/x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$$M_i' = \sup\{g(x)/x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

$\therefore\ M_i \leq M_i'$ (M_i' เป็นอัปเปอร์บาวด์ของฟังชั่น f ในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$)

$\because\ \overline{\int_a^b} f \leq U(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$ (นิยาม 7.1.5)

$\leq \sum_{i=1}^{n} M_i' (x_i - x_{i-1})$

$\leq U(g;P)$

ดังนั้น $\overline{\int_a^b}$ เป็นโลเวอร์บาวด์ของอัปเปอร์รีมานซัมของ g ทุกตัว

$\therefore\ \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} g$

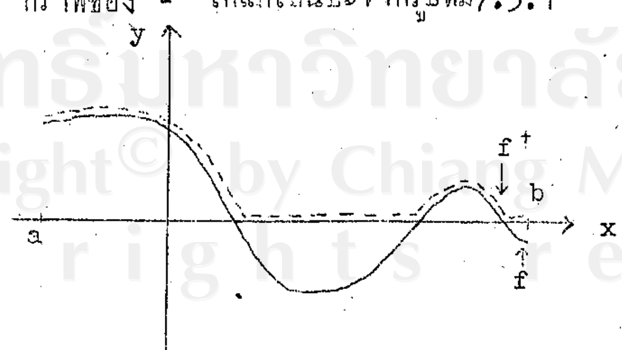
แต่ $\overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$ และ $\overline{\int_a^b} g = \int_a^b g$

$\therefore\ \int_a^b f \leq \int_a^b g$

<u>นิยาม 7.3.7</u> ถ้า $f : [a,b] \rightarrow E^1$ และ $f^+ : [a,b] \rightarrow E^1$ ซึ่ง f^+ มีความหมายดังนี้

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ถ้า } f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

กราฟของ f^+ ได้แก่เส้นประจากรูปที่ 7.3.1



รูปที่ 7.3.1

<u>เลมมา 7.3.8</u> ถ้า $f \in R[a,b]$ จะได้ว่า $f^+ \in R[a,b]$

<u>พิสูจน์</u> $\because f \in R[a,b]$ ดังนั้นให้ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชั่น

$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon \qquad \text{-------- } 1)$$

ให้ $M_i = \sup\{f(x)/x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$

$m_i = \inf\{f(x)/x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$

$M_i^+ = \sup\{f^+(x)/\ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$

$m_i^+ = \inf\{f^+(x)/\ x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$

$\therefore m_i \leq m_i^+$ ($\because f(x) \leq f^+(x)$ สำหรับ x ทุกตัว)

ถ้า $M_i > 0$ จะได้ว่า $M_i^+ = M_i$ และ

$$M_i^+ - m_i^+ \leq M_i - m_i$$

ถ้า $M_i \leq 0$ จะได้ว่า $M_i^+ = m_i^+ = 0$

$$\therefore M_i^+ - m_i^+ = 0 \leq M_i - m_i$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
U(f^+;P) - L(f^+;P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^+(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i^+(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i^+ - m_i^+)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq U(f;P) - L(f;P) \\
&< \varepsilon \qquad \because f \in R[a,b]
\end{aligned}$$

$\therefore f^+ \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.1.6)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันใด ๆ เราให้ $|f|(x) = |f(x)|$ สำหรับ $x \in D_f$ ทุกตัว

<u>ทฤษฎี 7.3.9</u> ถ้า $f \in R[a,b]$ จะได้ว่า $|f| \in R[a,b]$ และ

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

พิสูจน์ $\because$ $|f| = f^+ + (-f)^+$ เมื่อ $f(x) \geq 0$ และ $f(x) < 0$

แต่ $f \in R[a,b]$

$\therefore$ $-f$, f^+ และ $(-f)^+ \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.3.3, เลมมา 7.3.8)

$\therefore$ $|f| \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.3.5)

$\because$ $f(x) \leq |f(x)|$ และ $-f(x) \leq |f(x)|$

$\therefore$ $\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ และ $\int_a^b (-f) \leq \int_a^b |f|$ (เลมมา 7.3.6)

แต่ $\left|\int_a^b f\right|$ เท่ากับ $\int_a^b f$ หรือ $\int_a^b (-f)$

$$\therefore \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b f$$

<u>เลมมา 7.3.10</u> ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in S$ ทุกตัว ให้ M, m เป็น sup และ inf ของฟังชั่น f บน S ตามลำดับ จะได้ว่า M^2 และ m^2 เป็น sup และ inf ของ f^2 บน S ตามลำดับ

<u>พิสูจน์</u> $\because$ $f(x) \leq M$ สำหรับ $x \in S$ ทุกตัว

$\therefore$ $f^2(x) \leq M^2$ สำหรับ $x \in S$ ทุกตัว ($\because$ $f(x) \geq 0$)

ดังนั้น M^2 เป็นอัปเปอร์บาวด์ของ f^2 บน S

(จะพิสูจน์ M^2 เป็น sup ต้องพิสูจน์ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ทุกตัวจะมี $x_0 \in S$ ซึ่ง $M^2 - f^2(x_0) < \varepsilon$)

$\because$ M เป็น sup ของ f บน S ดังนั้นจะมี $x_0 \in S$ ซึ่ง

$$M - f(x_0) < \varepsilon/(2M + 1)$$

$$\therefore M^2 - f^2(x_0) = (M - f(x_0))(M + f(x_0))$$

$$< \left[\varepsilon/(2M + 1)\right] (M + M)$$

$$(\because f(x_0) \le M)$$

$$< \varepsilon$$

$\therefore M^2$ เป็น sup ของ f^2 บน S

ในทำนองเดียวกัน เราทราบว่า m^2 เป็นโลเวอร์บาวด์ของ f^2

$\because m$ เป็น inf ของ f บน S ดังนั้นจะมี $x_0 \in S$ ซึ่ง

$$f(x_0) - m < \varepsilon/(2M + 1)$$

$$\therefore f^2(x_0) - m^2 = (f(x_0) - m)(f(x_0) + m)$$

$$< \left[\varepsilon/(2M + 1)\right] (M + M)$$

$$(\because f(x_0) \le M,\ m \le M)$$

$$< \varepsilon$$

$\therefore m^2$ เป็น inf ของ f^2 บน S

<u>ทฤษฎี 7.3.11</u> ถ้า $f \in R[a,b]$ จะได้ว่า $f^2 \in R[a,b]$

<u>พิสูจน์</u> $\because f$ บาวด์บนช่วง $[a,b]$ ดังนั้นจะมี $B \in R$ ซึ่ง $|f(x)| \le B$ สำหรับ $x \in [a,b]$ ทุกตัว

และ $\because f \in R[a,b]$

$\therefore |f| \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.3.9)

ดังนั้นให้ $\varepsilon > 0$ จะมีพาร์ทิชั่น P ของช่วง $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(|f|; P) - L(f; P) < \varepsilon/2B$$

ให้ $M_i = \sup \{ |f(x)| / x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$

$m_i = \inf \{ |f(x)| / x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$

$M_i^2 = \sup \{ |f(x)|^2 / x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$

$m_i^2 = \inf \{ |f(x)|^2 / x_{i-1} \leq x \leq x_i \}$

$$\therefore U(|f|^2; P) - L(|f|^2; P) = \sum_{i=1}^{n} (M_i^2 - m_i^2)(x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i + m_i)(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} (B+B)(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) ;$$

$$(m_i, M_i \leq B)$$

$$\leq 2B \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\leq 2B \left[U(|f|;P) - L(|f|;P) \right]$$

$$< 2B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon$$

$\therefore f^2 = |f|^2 \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.1.6)

<u>ทฤษฎี 7.3.12</u> ถ้า $f \in R[a,b]$ และ $g \in R[a,b]$ จะได้ว่า

$fg \in R[a,b]$

<u>พิสูจน์</u> $\because$ $fg = \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$ ------ 1)

และ $f+g$, f^2, g^2 และ $(f+g)^2 \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.3.5, 7.3.11)

$\therefore fg \in R[a,b]$ (จาก ทฤษฎี 7.3.3 และ 7.3.5)

<u>ทฤษฎี 7.3.13</u> (The Mean Value Theorem for integrals) ถ้า $f : [a,b] \to E^1$ ซึ่งฟังชั่น f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ ได้ว่าจะมีจำนวนจริง $c \in [a,b]$ ซึ่ง

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ P เป็นพาร์ทิชั่นของช่วง $[a,b]$

และ $M = \sup\{f(x) / x \in [a,b]\}$;

$m = \inf\{f(x) / x \in [a,b]\}$

จะได้ว่า $m \leq f(x) \leq M$ สำหรับ $x \in [a,b]$ ทุกตัว

$\therefore\ m(b-a) \leq L(f;P) \leq U(f;P) \leq M(b-a)$

(เลมมา 7.1.3)

แต่ $f \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.2.3)

$\therefore\ m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

จะมีจำนวนจริง $B \in [m, M]$ ซึ่ง $B(b-a) = \int_a^b f(x)dx$ ---1)

แต่ f เป็นฟังชั่นที่ต่อเนื่องบนคอมแพคต์เซ็ท $[a,b]$ จะได้ว่า

$f([a,b])$ เป็นเซ็ทคอมแพคต์ (ทฤษฎี 6.2.6)

$\therefore\ m, M \in f([a,b])$

จาก Intermediate Value Theorem ได้ว่า จะมี $c \in [a,b]$ ซึ่ง

$f(c) = B$

$\therefore\ \int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$ จาก 1)

แบบฝึกหัดชุด 7.3

1. จากเลมม่า 8.3.4 จงพิสูจน์ว่า $L(f+g;P) \geq L(f;P)+L(g;P)$

2. ถ้า $f:[a,b] \to E^1$ ซึ่ง $f \in R[a,b]$ และ $c \in [a,b]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

3. ถ้า $f(x) = x$ จงหา

(ก) $\int_{-2}^{3} f^+(x)\,dx$

(ข) $\int_{-2}^{3} (-f)^+(x)dx$

(ค) $\int_{-2}^{3} \left[f^+(x) + (-f)^+(x)\right] dx$

(ง) $\int_{-2}^{3} |f|(x)\,dx$

(จ) $\left|\int_{-2}^{3} f(x)dx\right|$

4. ถ้า $f:[a,b] \to E^1$ ซึ่ง f มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และถ้า $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ซึ่ง $x \in [a,b]$ จงพิสูจน์ว่า F มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$

5. ถ้า $f:[a,b] \to E^1$ ซึ่ง $f \in R[a,b]$ และ $f(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in [a,b]$ ทุกตัว จงพิสูจน์ว่า $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

6. ถ้า $f:[a,b] \to E^1$ ซึ่ง f มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in [a,b]$ ทุกตัว และ $f(c) > 0$ สำหรับ $c \in [a,b]$ บางตัว

จงพิสูจน์ว่า $\int_a^b f(x)\,dx > 0$

7.4 ทฤษฎีพื้นฐานทางแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of Calculus)

ทฤษฎี 7.4.1 ให้ $f : [a,b] \rightarrow E^1$ ซึ่ง $f \in R[a,b]$ และ $F : [a,b] \rightarrow E^1$ ซึ่ง $F(x) = \int_a^x f$ ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ $c \in [a,b]$ จะได้ว่า $F'(c) = f(c)$

พิสูจน์ ถ้า $h > 0$

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f$$

ให้ $M_h = \sup\{f(x) / c \le x \le c+h\}$

$m_h = \inf\{f(x) / c \le x \le c+h\}$

$$\therefore m_h(c+h-c) \le \int_c^{c+h} f \le M_h(c+h-c)$$

(จากเล่มมา 7.1.3 และ $f \in R[c, c+h]$)

ดังนั้น $m_h \le \dfrac{F(c+h) - F(c)}{h} \le M_h$

ถ้า $h < 0$ พิสูจน์ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$m_h(c-c-h) \le \int_{c+h}^{c} f \le M_h(c-c-h)$$

$$m_h \le \frac{F(c) - F(c+h)}{-h} \le M_h$$

$$m_h \le \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \le M_h$$

$\because f$ มีความต่อเนื่องที่ $c \in [a,b]$

$$\lim_{h \to 0} m_h \le \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \le \lim_{h \to 0} M_h$$

$$f(c) \le F'(c) \le f(c)$$

$$\therefore F'(c) = f(c)$$

<u>ตัวอย่าง 7.4.1</u> ถ้า $F(x) = \int_a^x t^2\,dt$ ซึ่ง $f : [a,b] \to E^1$ และ $f(x) = x^2$ จะได้ว่า $F'(x) = x^2$

จะเห็นว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ F ดิฟเฟอเรนชิเบิลที่ทุกจุดบนช่วง $[a,b]$ และ $F' = f$

<u>ทฤษฎี 7.4.2</u> (The Second Fundamental Theorem of Calculus)

ให้ $f : [a,b] \to E^1$ และ f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $f = G'$ สำหรับฟังก์ชัน G บางตัว จะได้ว่า

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

<u>พิสูจน์</u> $\because$ f มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$

$\therefore f \in R[a,b]$ (ทฤษฎี 7.2.3)

ให้ $F : [a,b] \to E^1$

ซึ่ง $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ จะได้ว่า $F' = f = G'$ บนช่วง $[a,b]$

$\therefore$ จะมีจำนวนจริง B ซึ่ง $F = G + B$

แต่ $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$

ดังนั้น $0 = F(a) = G(a) + B$

$\therefore B = -G(a)$

ดังนั้น $F(x) = G(x) - G(a)$

$\therefore \int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) - G(a)$

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

จากทฤษฎี **7.4.2** การหาค่า $\int_a^b f(t)\,dt$ ขึ้นอยู่กับการหาฟังชั่น G ซึ่งมีอนุพันธ์เท่ากับ f และจะได้ $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

<u>ตัวอย่าง 7.4.2</u> พิจารณาฟังชั่น $G(x) = \frac{x^5}{5}$ ซึ่ง $G : [a,b] \dashrightarrow E^1$

$$\therefore G'(x) = x^4 = f(x)$$

$$\therefore \int_a^b x^4 = \frac{b^5}{5} - \frac{a^4}{5}$$

เรียกฟังชั่น G ซึ่ง $G' = f$ ว่า พริมิทีฟ (primitive) หรือ antiderivative) ของ f

<u>ตัวอย่าง 7.4.3</u> ให้ $F : [0,5] \dashrightarrow E^1$ ซึ่ง $F(x) = \frac{2}{3}(x+4)^{3/2}$

F เป็นพริมิทีบของ $f(x) = \sqrt{x+4}$

$$\therefore \int_0^5 \sqrt{x+4}\;dx = F(5) - F(0)$$

$$= \frac{2}{3}(27) - \frac{2}{3}(8) = 38/3$$

<u>แบบฝึกหัดชุด 7.4</u>

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังชั่นต่อไปนี้

(1.1) $F(x) = \int_a^x (2t+1)dt$

(1.2) $F(x) = \int_a^{x^2} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$

(1.3) $G(x) = \int_{x^2}^{a} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt$

(1.4) $G(x) = \left(\int_a^x \frac{1}{1+\sin^2 t}\right)^2$

(ข้อแนะนำ, ข้อ(1.2)ถึง (1.4) ถ้า $G(x) = F(C(x)$ จะได้

$G'(x) = F'(C(x)).\ C'(x)$)

2. จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

(2.1) $\int_0^3 \frac{5x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(2.2) $\int_1^2 (x+1)(x^2+2x+2)^{1/3}\,dx$

(2.3) $\int_{-2}^0 x\sqrt{2x^2+1}\,dx$

(2.4) $\int_1^3 (2x+1)\,dx$
