บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

(Basic concepts)

ในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีซึ่งจะใช้เป็นพื้นฐานสำหรับบทต่อไป

1. เจนเนอรัลไลซ์ เซมิ-เมตริกสเปซ (Generalized semi-metric space)

นิยาม 2.1 ให้ X เป็นเซทซึ่งไม่เป็นเซทว่างและ R เป็นเซทของจำนวนจริงเจนเนอรัลไลซ์ เซมิ-เมตริกบน X คือฟังชั่น $d : X \times X \dashrightarrow R(\geq 0)^* = R(\geq 0) \cup \{\infty\}$ ที่สอดคล้องตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. $d(x,y) = d(y,x)$
2. ถ้า $x = y$ แล้ว $d(x,y) = 0$ หรือ $d(x,x) = 0$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$

เจนเนอรัลไลซ์ เมตริกบน X คือ d ในนิยาม 2.1 และเพิ่มเงื่อนไขดังนี้

ถ้า $d(x,y) = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

นั่นคือ d จะเป็นเจนเนอรัลไลซ์ เมตริก คุณสมบัติข้อ (2) จะเปลี่ยนเป็น

$d(x,y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ (if and only if) $x = y$

เจนเนอรัลไลซ์ เซมิ-เมตริกสเปซคือเซท X กับเจนเนอรัลไลซ์ เซมิ-เมตริก d บน X เขียนแทนด้วย (X, d)

เจนเนอรัลไลซ์ เมตริกสเปซคือเซท X กับเจนเนอรัลไลซ์ เมตริก d บน X เขียนแทนด้วย (X, d)

เจนเนอรัลไลซ์ เซมิ-เมตริกสเปซจะเรียกว่า เซมิ-เมตริกสเปซ ถ้าทุก ๆค่าของ d อยู่ใน $R(\geq 0)$

เจนเนอรัลไลซ์ เมตริกสเปซ จะเรียกว่า เมตริกสเปซ ถ้าทุก ๆ ค่าของ d อยู่ใน $R(\geq 0)$

จะเห็นได้ว่า เมตริกสเปซเป็นกรณีเฉพาะของเจนเนอรัลไลซ์ เซมิ-เมตริกสเปซ

<u>นิยาม 2.2</u> ให้ (X, d) เป็นเซมิ-เมตริกสเปซ บอลล์เปิด (Open ball) ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $x \in X$ และรัศมี $r > 0$ คือสับเซท $S(x, r)$ ของ X กำหนดโดย $S(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$

บอลล์ปิด (Closed ball) ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $x \in X$ และรัศมี $r > 0$ คือสับเซท $S[x, r]$ ของ X กำหนดโดย $S[x, r] = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$

<u>นิยาม 2.3</u> สับเซท G ของเซมิ-เมตริกสเปซ (X, d) จะเรียกว่าเซทเปิด (Open set) ถ้าสำหรับทุก ๆ $x \varepsilon G$ จะมี $r > 0$ ซึ่ง $S(x, r) \subset G$

<u>นิยาม 2.4</u> สับเซท C ของเซมิ-เมตริกสเปซ (X, d) จะเรียกว่าเซทปิด (Closed set) ถ้าคอมพลีเมนต์ (complement) ของ C เป็นเซทเปิด

<u>นิยาม 2.5</u> จุด x ของเซมิ-เมตริกสเปซ (X, d) จะเรียกว่าจุดลิมิตหรือจุดคลัสเตอร์ (Limit point หรือ Cluster point) ของ $A \subset X$ ถ้าสำหรับทุก ๆ $r > 0$ ซึ่ง $S(x, r) \cap A \neq \emptyset$

<u>นิยาม 2.6</u> ให้ (X, d) เป็นเซมิ-เมตริกสเปซโคลส์เชอร์ (Closure) ของ $A \subset X$ เป็นสับเซท $\bar{A}$ ของ X กำหนดโดย

$\bar{A} = \{x \varepsilon A \mid x$ เป็นจุดลิมิตของ $A\}$

<u>นิยาม 2.7</u> ซีเควนซ์ (Sequence) $\{x_n\}$ ในเซมิ-เมตริกสเปซ X จะเรียกว่าคอนเวอร์จ (converge) ไปยังจุด $x \varepsilon X$ ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $d(x_n, x) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$ จุด x จะเรียกว่าลิมิตของซีเควนซ์ $\{x_n\}$ นั่นคือ $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง x ต่อเมื่อ $d(x_n, x)$ คอนเวอร์จไปยัง 0

<u>นิยาม 2.8</u> ให้ F เป็นฟังชั่นจากเซมิ-เมตริกสเปซ (X_1, d_1) ไปยังเซมิ-เมตริกสเปซ (X_2, d_2) F จะเรียกว่า ฟังชั่นต่อเนื่อง (Continuous function) ที่จุด $x_0 \in X_1$ ต่อเมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องมี $\delta > 0$ โดยที่ถ้า

$d_1(x, x_0) < \delta$ แล้ว $d_2(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $x \in X_1$

F จะเรียกว่าเป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน X ถ้า F เป็นฟังชั่นต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดบน X

<u>ทฤษฎี 2.1</u> ให้ F เป็นฟังชั่นจากเซมิ-เมตริกสเปซ (X_1, d_1) ไปยังเซมิ-เมตริกสเปซ (X_2, d_2) แล้ว F จะเป็นฟังชั่นต่อเนื่องต่อเมื่อซีเควนซ์ $\{F(x_n)\}$ ของ X_2 คอนเวอร์จไปยัง $F(x)$ เมื่อซีเควนซ์ $\{x_n\}$ ของ X_1 คอนเวอร์จไปยัง $x \in X_1$

<u>พิสูจน์</u> (==>) สมมุติให้ F เป็นฟังชั่นต่อเนื่องที่จุด $x \in X_1$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะต้องมี $\delta > 0$ โดยที่ถ้า $d_1(x, y) < \delta$ แล้ว $d_2(F(x), F(y)) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $y \in X_1$

แต่ $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง x ดังนั้นจะต้องมีจำนวนเต็ม N ซึ่งสำหรับทุก ๆ $n \geq N$ แล้ว $d_1(x_n, x) < \delta$

ดังนั้น $d_2(F(x_n), F(x)) < \varepsilon$

นั่นคือซีเควนซ์ $\{F(x_n)\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F(x)$

(<==) กำหนดให้ถ้า $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง x_0 แล้ว $\{F(x_n)\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F(x_0)$

สมมุติตรงข้ามว่า F ไม่ต่อเนื่องที่จุด x_0 แล้วจะต้องมี $\varepsilon > 0$ ซึ่งสำหรับแต่ละ $\delta > 0$ จะมี $x' \varepsilon X_1$ ซึ่ง $d_1(x', x_0) < \delta$ และ $d_2(F(x'), F(x_0)) \geq \varepsilon$

ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n เราสามารถเลือก x_n ซึ่ง

$d_1(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ และ $d_2(F(x_n), F(x_0)) \geq \varepsilon$

นั่นคือ $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง x_0 แต่ $\{F(x_n)\}$ ไม่ได้คอนเวอร์จไปยัง $F(x_0)$ ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งกำหนดให้

นั่นคือ F เป็นฟังชั่นต่อเนื่องที่จุด x

<u>นิยาม 2.9</u> ให้ F เป็น bounded real valued functions ใด ๆ ซึ่งกำหนดบนเซท X, M จะเรียกว่าซูพรีมัม (supremum) ของ F บน X ถ้า M เป็น upper bound ที่เล็กที่สุดของ F(X) และใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย $M = \sup_{x \varepsilon X} |F(x)|$

<u>นิยาม 2.10</u> ให้ F เป็น bounded real valued functions ใด ๆ ซึ่งกำหนดบนเซท X, N จะเรียกว่าอินฟรีมัม (inframum) ของ F บน X ถ้า N เป็น lower bound ที่ใหญ่ที่สุดของ F(X) และใช้สัญญลักษณ์ $N = \inf_{x \varepsilon X} |F(x)|$

นิยาม 2.11 $d(x, A) = \inf \{d(x,a) \mid a \in A\}$

ทฤษฎี 2.2 ให้ (X, d) เป็นเซมิ-เมตริกสเปซ และ $A \subset X$ ดังนั้น $d(x, A) = 0$ ต่อเมื่อ $x \in \bar{A}$

พิสูจน์ ($\Longrightarrow$) ให้ $d(x, A) = 0$

สมมุติตรงข้ามว่า $x \notin \bar{A}$ ดังนั้นจะมี $r_x > 0$ ซึ่ง $S(x, r_x) \cap A = \emptyset$ สำหรับทุก ๆ $y \in A$ แล้ว $y \notin S(x, r_x)$ และ $d(x,y) \geq r_x > 0$

ดังนั้น $d(x,A) = \inf \{d(x,y) \mid y \in A\} \geq r_x > 0$ ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งกำหนดให้ที่ว่า $d(x, A) = 0$

ฉะนั้น $x \in \bar{A}$

($\Longleftarrow$) ให้ $x \in \bar{A}$

สมมุติตรงข้ามว่า $d(x, A) = r > 0$

เพราะว่า $d(x, y) \geq d(x, A) = r$ สำหรับทุก ๆ $y \in A$

นั่นคือจะต้องมี $r > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $y \in A$ แล้ว $y \notin S(x,r)$

และดังนั้น $A \cap S(x,r) = \emptyset$ ฉะนั้น $x \notin \bar{A}$

ซึ่งขัดแย้งกับสิ่งกำหนดให้ที่ว่า $x \in \bar{A}$

นั่นคือ $d(x, A) = 0$

นิยาม 2.12 ซีเควนซ์ $\{x_n\}$ ในเซมิ-เมตริกสเปซ (X, d) จะเรียกว่าซีเควนซ์โคชี (Cauchy sequence) ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ

$\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนเต็ม N ซึ่งถ้า $n, n' \geq N$ แล้ว $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$

นิยาม 2.13 เซมิ-เมตริกสเปซ (X, d) จะเรียกว่าคอมพลีท (Complete) ถ้าทุก ๆ ซีเควนซ์โคชีใน X คอนเวอร์จไปยังสมาชิกใน X

2. เมตริกสเปซ และคอมพลีทเมตริกสเปซ

ทฤษฎี 2.3 เซทของทุก ๆ จำนวนจริง R กับฟังชั่น d ซึ่ง $d(x, y) = |x - y|$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะเป็นเมตริกสเปซ โดยจะแทนเมตริกสเปซนี้ด้วย (R, d)

พิสูจน์ ฟังชั่น d เป็นฟังชั่นซึ่งไม่เป็นลบและสอดคล้องตามคุณสมบัติ (1) และ (2) ของนิยาม 2.1 สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in X$ ให้

$a = x - z, \quad b = z - y$

เนื่องจาก $|a + b| \leq |a| + |b|$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a, b

ฉะนั้น $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$

นั่นคือ (X, d) เป็นเมตริกสเปซ

ทฤษฎีนำ 2.1 ถ้า F_1, F_2 เป็น bounded real valued functions ใด ๆ ซึ่งกำหนดบนเซท X แล้ว

$$\sup_{x\in X} \left| F_1(x) + F_2(x) \right| \leq \sup_{x\in X} \left| F_1(x) \right| + \sup_{x\in X} \left| F_2(x) \right|$$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า F_1 และ F_2 เป็น bounded real valued functions

เพราะฉะนั้น $F_1 + F_2$ เป็น bounded real valued function ด้วย

ให้ $a = \sup_{x\varepsilon X} |F_1(x)|$, $b = \sup_{x\varepsilon X} |F_2(x)|$

แต่ $|F_1(x)| \leq a$ และ $|F_2(x)| \leq b$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon X$

ดังนั้น $|F_1(x) + F_2(x)| \leq |F_1(x)| + |F_2(x)| \leq a + b$

นั่นคือ $\sup_{x\varepsilon X} |F_1(x) + F_2(x)| \leq \sup_{x\varepsilon X} |F_1(x)| + \sup_{x\varepsilon X} |F_2(x)|$

<u>ทฤษฎี 2.4</u> เซทของฟังชั่นต่อเนื่อง ซึ่งกำหนดบนช่วงปิด (closed interval) $[a, b]$ กับฟังชั่น d ที่กำหนดโดย

$$d(F_1, F_2) = \sup_{a\leq x\leq b} |F_1(x) - F_2(x)|$$ เป็นเมตริกสเปซ

และให้ $C_{[a,b]}$ แทนเมตริกสเปซนี้

<u>พิสูจน์</u> ให้ F_1, F_2, F_3 เป็นฟังชั่นใด ๆ ใน $C_{[a,b]}$

ฉะนั้น $d(F_1, F_2) = \sup_{a\leq x\leq b} |F_1(x) - F_2(x)|$

$$\leq \sup_{a\leq x\leq b} \{|F_1(x) - F_3(x)| + |F_3(x) - F_2(x)|\}$$

โดยทฤษฎีบท 2.1

$$d(F_1, F_2) \leq \sup_{a\leq x\leq b} |F_1(x) - F_3(x)| + \sup_{a\leq x\leq b} |F_3(x) - F_2(x)|$$

$$= d(F_1, F_3) + d(F_3, F_2)$$

ยิ่งกว่านั้น d สอดคล้องตามคุณสมบัติ (1) และ (2) ในนิยาม 2.1

นั่นคือ $C_{[a,b]}$ เป็นเมตริกสเปซ

<u>ทฤษฎีนำ 2.2</u> ให้ F_i, F_i' สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

เป็น bounded real value functions กำหนดบนเซท X

แล้ว สำหรับทุก ๆ $x \in X$ และ $i = 1, 2, \ldots, n$ จะได้

$$\sup_{x \in X} \left| F_i(x) + F_i'(x) \right| \leq \sup_{x \in X} \left| F_i(x) \right| + \sup_{x \in X} \left| F_i'(x) \right|$$

<u>พิสูจน์</u> F_i, F_i' เป็น bounded real valued functions

ดังนั้น $F_i + F_i'$ เป็น bounded real valued function สำหรับ

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

ให้ $a = \sup_{x \in X} \left| F_i(x) \right|$, $b = \sup_{x \in X} \left| F_i'(x) \right|$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ x และ i

$$\left| F_i(x) \right| \leq a \quad , \quad \left| F_i'(x) \right| \leq b$$

และดังนั้น $\left| F_i(x) + F_i'(x) \right| \leq \left| F_i(x) \right| + \left| F_i'(x) \right|$

$$\leq a + b$$

ฉะนั้น $\sup_{x \in X} \left| F_i(x) + F_i'(x) \right| \leq \sup_{x \in X} \left| F_i(x) \right| + \sup_{x \in X} \left| F_i'(x) \right|$

<u>ทฤษฎี 2.5</u> ให้ ${}^nC_{[a,b]}$ เป็นสเปซของ $n-$ ทูปเปิล (n-tuple)

$F = (F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n)$ ของฟังก์ชันต่อเนื่อง $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$

กำหนด $d(F, F') = \sup_{x \in X} \left| F_i(x) - F_i'(x) \right|$ บน $[a,b]$

แล้วจะได้ ${}^nC_{[a,b]}$ เป็นเมตริกสเปซ

<u>พิสูจน์</u> ให้ F, F', F'' เป็นฟังชั่นใด ๆ ใน ${}^nC_{[a,b]}$

ดังนั้น $d(F, F') = \sup\limits_{x\varepsilon X} \left| F_i(x) - F_i'(x) \right|$

$$\leq \sup_{x\varepsilon X} \{ \left| F_i(x) - F_i''(x) \right| + \left| F_i''(x) - F_i'(x) \right| \}$$

โดยทฤษฎีนำ 2

$$d(F,F') \leq \sup \left| F_i(x) - F_i''(x) \right| + \sup_{x\varepsilon X} \left| F_i''(x) - F_i'(x) \right|$$

$$= d(F, F'') + d(F'', F)$$

ฉะนั้น d สอดคล้องตามคุณสมบัติ (3) ของนิยาม 2.1

ยิ่งกว่านั้น d สอดคล้องตามคุณสมบัติ (1) และ (2) ของนิยาม 2.1

นั่นคือ ${}^nC_{[a,b]}$ เป็นเมตริกสเปซ

<u>ทฤษฎีนำ 2.3</u> ซีเควนซ์โคชี $\{x_n\}$ ใน R จะต้องบาวด์ (bound)

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน R

ให้ $\varepsilon = 1$ จะต้องมี N ซึ่ง $|x_n - x_m| < 1$ สำหรับทุก ๆ $m, n \geq N$

แต่ $x_n = x_n - x_N + x_N$

ดังนั้น $|x_n| \leq |x_n - x_N| + |x_N|$

$\leq |x_N| + 1$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$

ให้ $M = \sup(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1)$

ดังนั้น $|x_n| \leq M$ สำหรับทุก ๆ n

<u>ทฤษฎี 2.6</u> เมตริกสเปซ (R, d) จะต้องคอมพลีท

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีของจุดใน R

กำหนดให้ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะต้องมี N ซึ่ง $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก ๆ $m, n \geq N$

ให้ $A_{N+k} = \{x_n \mid n \geq N+k$ สำหรับจำนวนเต็ม k ที่ไม่เป็นลบ $\}$ ซึ่ง $A_N \supset A_{N+1} \supset A_{N+2} \supset \cdots$

โดยทฤษฎีนำ 2.3 A_{N+k} จะต้องบาวด์ข้างบน (Bounded above) โดยจำนวนเต็ม M

ดังนั้นแต่ละ A_{N+k} จะต้องมีซูพรีมัม

ให้ $\alpha_k = \sup A_{N+k}$ แล้ว $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \cdots$

ให้ $B = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots\}$

ฉะนั้น B มีโลเวอร์บาวด์ (Lower bound) คือ $-M$

เพราะว่า $-M \leq x_n \leq M$ สำหรับทุก ๆ n

ดังนั้น B มีอินฟรีมัม

ให้ $x = \inf B$ แล้วจะต้องมี α_{k_0} ซึ่ง

$$x < \alpha_{k_0} < x + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

เมื่อ $\alpha_{k_0} = \sup A_{N+k_0}$

ฉะนั้นจะต้องมี $x_m \in A_{N+k_0}$

ซึ่ง $\alpha_{k_0} - \frac{\varepsilon}{2} < x_m \leq \alpha_{k_0}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

เมื่อ $m \geq N + k_0$

โดยสมการ (1) และ (2) จะได้ว่า

$$x - \frac{\varepsilon}{2} < x_m < x + \frac{\varepsilon}{2}$$

และดังนั้น $|x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

สำหรับทุก ๆ $n \geq m$ จะได้

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_m| + |x_m - x|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ฉะนั้น $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง x

นั่นคือ (R, d) คอมพลีท

<u>นิยาม 2.14</u> ให้ $\{F_n\}$ เป็นซีเควนซ์ของฟังชั่น จากเซท X ใด ๆ ไปยังเมตริกสเปซ (Y, d) แล้ว $\{F_n\}$ จะเรียกว่าคอนเวอร์จสม่ำเสมอ (converge uniformly) ไปยังฟังชั่น $F : X \longrightarrow Y$ ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $n \geq N$ แล้ว $|F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

<u>ทฤษฎีนำ 2.4</u> ให้ $\{F_n\}$ เป็นซีเควนซ์ของฟังชั่นต่อเนื่องบน $[a,b]$ ซึ่งคอนเวอร์จสม่ำเสมอไปยัง F แล้ว F จะต้องเป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน $[a,b]$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $\{F_n\}$ คอนเวอร์จสม่ำเสมอไปยัง F ดังนั้นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|F_n(x) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ สำหรับทุก ๆ $n > N$ และ $x \in [a,b]$

ให้ x_0 เป็นสมาชิกใด ๆ ใน $[a, b]$ โดย F_N เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x_0 นั่นคือ จะต้องมี $\delta > 0$ โดยที่ถ้า $|x-x_0| < \delta$ แล้ว $|F_N(x)-F_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

ฉะนั้นจะได้
$$|F(x)-F(x_0)| \leq |F(x)-F_N(x)| + |F_N(x) - F_N(x_0)| + |F_N(x_0) - F(x_0)|$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \text{ เมื่อ } |x - x_0| < \delta$$

นั่นคือ F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$

<u>ทฤษฎี 2.7</u> เมตริกสเปซ $C_{[a,b]}$ พร้อมด้วย d ที่กำหนดในทฤษฎี 2.4 จะเป็นคอมพลีทสเปซ

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\{F_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใด ๆ ในเมตริกสเปซ $C_{[a,b]}$

ฉะนั้นสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$d(F_n, F_{n'}) = \sup_{a \leq x \leq b} |F_n(x) - F_{n'}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ สำหรับทุก ๆ } n, n' \geq N$$

ฉะนั้นจะได้ $|F_n(x) - F_{n'}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก ๆ $n, n' \geq N$ และทุก ๆ $x \in [a, b]$ ... (*)

สำหรับแต่ละ x fixed ใน $[a, b]$ ซีเควนซ์ $\{F_n(x)\}$ จะต้องเป็นซีเควนซ์โคชีใน R และเนื่องจาก R คอมพลีท

ดังนั้น $\{F_n(x)\}$ คอนเวอร์จไปยังสมาชิกใน R

ให้ $c_x = \lim_{n \to \infty} F_n(x)$

โดยกำหนดฟังก์ชัน F บน $[a,b]$ ซึ่ง $F(x) = c_x$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$ แล้วจะได้ $F(x) = \lim_{n \to \infty} F_n(x)$ สำหรับแต่ละ $x \in [a,b]$

โดยให้ n' เข้าสู่ ∞ ใน (*)

จะได้ $|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geq N$ และ $x \in [a,b]$

นั่นคือ $\{F_n\}$ คอนเวอร์จสม่ำเสมอไปยัง F

โดยทฤษฎีบท จะได้ $F \in C_{[a,b]}$

ฉะนั้น $\{F_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F \in C_{[a,b]}$

นั่นคือ เมตริกสเปซ $C_{[a,b]}$ จะต้องคอมพลีท

<u>ทฤษฎี 2.8</u> เมตริกสเปซ ${}^{n}C_{[a,b]}$ เมื่อ d กำหนดในทฤษฎี 2.5 จะต้องคอมพลีท

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\{F^{(p)}\} = \{(F_1^{(p)}, F_2^{(p)}, \ldots, F_n^{(p)})\}$ เป็นซีเควนซ์โคชี ของฟังชั่นต่อเนื่องของเมตริกสเปซ ${}^{n}C_{[a,b]}$

ให้ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$d(F^{(p)}, F^{(q)}) = \sup_{x \in [a,b]} |F_i^{(p)}(x) - F_i^{(q)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

สำหรับทุก ๆ $p, q \geq N$

ดังนั้น $|F_i^{(p)}(x) - F_i^{(q)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก ๆ $p, q \geq N$ $x \in [a, b]$ และ $i = 1, 2, \ldots, n$ ... (**)

สำหรับแต่ละ x และ i ซึ่งเป็นค่าคงที่ $\{F_i^{(p)}(x)\}$ จะต้องเป็นซีเควนซ์โคชีใน F และเนื่องจาก R เป็นคอมพลีท

ดังนั้น $\{F_i^{(p)}(x)\}$ จะคอนเวอร์จไปยังสมาชิกใน R

ให้ $c_{i,x} = \lim_{p\to\infty} F_i^{(p)}(x)$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

ให้ฟังชั่น F_i บน $[a, b]$ ซึ่ง

$F_i(x) = c_{i,x}$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$ และ $i = 1,2,3,\ldots,n$

ดังนั้น $F_i(x) = \lim_{p\to\infty} F_i^{(p)}(x)$

ฉะนั้นจะต้องมีจำนวนเต็มบวก N_i ซึ่ง $\left|F_i^{(p)}(x) - F_i(x)\right| < \varepsilon$

สำหรับทุก ๆ $p \geq N_i$, $x \in [a, b]$ และ $i = 1,2,\ldots, n$

ให้ $N = \sup \{N_1, N_2, N_3, \ldots, N_n\}$

ถ้า $p \geq N$ แล้ว $d(F^{(n)}, F) = \sup_{x\varepsilon[a,b]} \left|F_i^{(p)}(x) - F_i(x)\right| < \varepsilon,$

$i = 1, 2, \ldots, n$

นั่นคือ $\{F^{(p)}\}$ คอนเวอร์จไปยัง F

ถ้าให้ q เข้าสู่ ∞ ใน (* *)

จะได้ $\left|F_i^{(p)}(x) - F_i(x)\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2,3,\ldots, n$

และ $x \in [a, b]$

นั่นคือ $\{F_i^{(p)}\}$ คอนเวอร์จสม่ำเสมอไปยัง F_i

โดยทฤษฎีนำ 2.4 F_i จะเป็นฟังชั่นต่อเนื่องสำหรับ $i = 1,2,3,\ldots, n$

และดังนั้น $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) \in {}^nC_{[a,b]}$

นั่นคือ ${}^nC_{[a,b]}$ เป็นคอมพลีทเมตริกสเปซ

<u>ทฤษฎี 2.9</u> ถ้า (Y, d) เป็นสับสเปซปิด (Closed subspace) ของคอมพลีทเมตริกสเปซ (X, d) แล้ว (Y, d) จะต้องคอมพลีท

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน $Y \subset X$

เนื่องจาก (X, d) เป็นคอมพลีท

และ Y เป็นสับสเปซปิด

จะได้ $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยังจุด $x \in Y$

นั่นคือ (Y, d) จะต้องคอมพลีท