บทที่ 3

ทฤษฎีคอนแทรกชั่นของบานัค

(Banach's Contraction Theorem)

นิยาม 3.1 ให้ (X, d) เป็นเซมิ-เมตริกสเปซ และ $\lambda \varepsilon [0, 1)$ ฟังชั่น $F : X \to X$ จะเรียกว่า λ- คอนแทรกชั่น (λ- contraction) ถ้า $d(F(x), F(y)) \leq \lambda\, d(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon X$ และฟังชั่น $F : X \to X$ จะเรียกว่าคอนแทรกชั่น (Contraction) ถ้ามี $\lambda \varepsilon [0, 1)$ ซึ่งทำให้ F เป็น λ-คอนแทรกชั่น

ทฤษฎีนำ 3.1 ให้ (X, d) เป็นเซมิ-เมตริกสเปซ ทุก ๆ ฟังชั่นคอนแทรกชั่น (Contraction function) F บน X เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง

พิสูจน์ สมมุติ $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง $x \varepsilon X$

ดังนั้นเมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $d(x_n, x) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$ เพราะว่า F เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น ดังนั้นจะต้องมี $\lambda \varepsilon [0,1)$ ที่ทำให้ $d(F(x_n), F(x)) \leq \lambda\, d(x_n, x)$

ฉะนั้น $d(F(x_n), F(x)) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geq N$

นั่นคือ $\{F(x_n)\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F(x)$

โดยทฤษฎี 2.1 F จะต้องเป็นฟังชั่นต่อเนื่อง

<u>นิยาม 3.2</u> ให้ F เป็นฟังชั่นจากเซท X ไปยังเซท X และให้จุด $x \in X$ จะเรียก x ว่าเป็นจุดคงที่ของ F(Fixed point of F) ถ้า $F(x) = x$

<u>นิยาม 3.3</u> ให้ F เป็นฟังชั่นจากเซท X ไปยังเซท X สำหรับจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ p ใด ๆ กำหนดฟังชั่น F^p ดังนี้

$$F^0(x) = x \quad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad x \in X$$

และ
$$F^{p+1}(x) = F^p(F(x)) \quad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad x \in X$$

<u>ทฤษฎี 3.1</u> (ทฤษฎีคอนแทรกชั่นของบานัค 1) ให้ (X, d) เป็นคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซ ถ้า $F : X \to X$ เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่นแล้วจะต้องมีจุดอย่างน้อย 1 จุด $x \in X$ สอดคล้องกับ $d(F(x),x) = 0$ และถ้า y เป็นจุดใด ๆ ใน X ซึ่งสอดคล้องกับ $d(F(y),y) = 0$ แล้ว $d(x,y) = 0$

<u>พิสูจน์</u> <u>ตอน 1</u> ให้ F เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น ดังนั้นจะต้องมี $\lambda \in [0,1)$ ซึ่ง $d(F(x), F(y)) \le \lambda\, d(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ ให้ x_0 เป็นจุดใด ๆ ใน X และกำหนดให้

$$x_1 = F(x_0) = F^1(x_0)$$
$$x_2 = F(x_1) = F^2(x_0)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$$

ถ้าให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้ว $d(x_{m+n}, x_n) \;=\; d(F^{m+n}(x_o), F^n(x_o))$

$$\leq \lambda^n d\,(F^m(x_o), x_o)$$

$$= \lambda^n d\,(x_m, x_o)$$

เนื่องจาก $d(x_m, x_o) \leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_1, x_o)$

$$\leq \lambda^{m-1} d(x_1, x_o) + \lambda^{m-2} d(x_1, x_o) + \dots + d(x_1, x_o)$$

$$= (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \dots + 1)\, d(x_1, x_0)$$

$$< (1 + \lambda + \dots + \lambda^{m-1} + \lambda^m + \dots)\, d(x_1, x_o)$$

$$= \frac{1}{1-\lambda}\, d(x_1, x_o)$$

นั่นคือ $d(x_{m+n}, x_m) \;<\; \dfrac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(x_1, x_o)$ ....(1)

ค่าทางขวามือของอสมการ (1) เป็น 0 เมื่อ $\lambda = 0$

และค่าทางขวามือของอสมการ (1) คอนเวอร์จไปยัง 0 เมื่อ $0 < \lambda < 1$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน X

เนื่องจาก X เป็นคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซ

ดังนั้น $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง $x \in X$

ฉะนั้น $d(x_n, x) = 0$

เนื่องจาก $\{F(x_n)\} = \{x_{n+1}\}$ เป็นสับซีเควนซ์ของ $\{x_n\}$ ดังนั้น $\{F(x_n)\}$ จะคอนเวอร์จไปยัง x จากสมมุติฐานที่ว่า F เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง

นั่นคือ $d(F(x_n), F(x)) = 0$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{F(x_n)\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F(x)$

เพราะว่า $d(F(x),x) \leq d(F(x),F(x_n)) + d(F(x_n),x)$ ......(2)

และค่าทางขวามือของ (2) จะต้องคอนเวอร์จไปยัง 0

ฉะนั้น $d(F(x), x) = 0$

<u>ตอนที่ 2</u> สมมุติว่ามี $x, y \in X$ ซึ่ง

$d(F(x), x) = 0$ และ $d(F(y), y) = 0$

โดยทฤษฎี 2.2

$F(x) \in \{\bar{x}\}$ และ $F(y) \in \{\bar{y}\}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(F(x), x) + d(F(x), F(y) + d(F(y), y) \\ &= d(F(x), F(y)) \\ &\leq \lambda d(x,y) \quad (\text{เนื่องจาก } F \text{ เป็นคอนแทรกชั่น}) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lambda \in [0, 1)$

ดังนั้น $d(x,y) = 0$

<u>ทฤษฎีบท 3.2</u> ให้ (X, d) เป็นคอมพลีทเมตริกสเปซ

ถ้า $F : X \rightarrow X$ เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น

แล้ว F จะต้องมีจุดคงที่จุดหนึ่งและจุดเดียว (Unique) เท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.1 จะต้องได้ $d(F(x), x) = 0$

และโดยนิยาม 2.1 จะได้ว่า $F(x) = x$

ต่อไปจะแสดงว่า F จะต้องมีจุดคงที่จุดหนึ่งและจุดเดียวเท่านั้น

สมมุติให้ $F(y) = y$

พิจารณา $d(F(x), F(y)) \leq \lambda\, d(x,y)$

ฉะนั้น $d(x, y) \leq \lambda\, d(x, y)$

นั่นคือ $d(x, y) = 0$ ซึ่ง $\lambda \in [0, 1)$

และโดยนิยาม 2.1 จะได้ว่า $x = y$

<u>ทฤษฎี 3.2</u> (ทฤษฎีคอนแทรกชั่นของบานัค 2) ให้ (X, d) เป็นคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซ

ถ้า $F : X \dashrightarrow X$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง และ F^p เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น สำหรับจำนวนเต็มบวก p บางตัว แล้วจะมี $x \in X$ อย่างน้อย 1 จุด ที่สอดคล้องกับ $d(F(x), x) = 0$

ถ้า y เป็นจุดใด ๆ ใน X ที่สอดคล้องกับ $d(F(y), y) = 0$ แล้วจะต้องได้ $d(x, y) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ F^p เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น สำหรับจำนวนเต็ม p บางตัว จะต้องมี $\lambda \in [0,1)$ ซึ่ง $d(F^p(x), F^p(y)) \leq \lambda d(x, y)$

สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$

ให้ $S = F^p$ ในกรณีที่ $p = 1$ ได้พิสูจน์แล้วในทฤษฎี 3.1

สำหรับทุก ๆ $x_0 \varepsilon X$ ซีเควนซ์ $\{x_n\} = \{F^n(x_0)\}$ คอนเวอร์จไปยัง

จุด $x \varepsilon X$ และ $d(F(x), x) = 0$

เพราะว่า F เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง

จะได้ว่า $d(F(x_n), F(x)) = 0$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{F(x_n)\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F(x)$

ฉะนั้น สับซีเควนซ์ $\{F(x_{n+1})\}$ ของ $\{F(x_n)\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F(x)$

แต่ S เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น ฉะนั้น S เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง

เนื่องจาก $d(F(x), S(F(x))) \leq d(F(x), F(x_{n+1}))$

$$+ d(F(x_{n+1}), S(F(x)))$$

แต่เพราะว่า

$$\begin{aligned} F(x_{n+1}) &= F(S(x_n)) \\ &= F(F^p(x_n)) \\ &= S(F(x_n)) \end{aligned}$$

ฉะนั้น $d(F(x), S(F(x)) \leq d(F(x), F(x_{n+1})) + d(S(F(x_n)), S(F(x))$

ค่าทางขวามือของอสมการจะคอนเวอร์จไปยัง 0

นั่นคือ $d(F(x), S(F(x))) = 0$

เนื่องจาก S เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่นจากทฤษฎี 3.1 จะได้ $d(S(x), x) = 0$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} d(F(x), x) &\leq d(F(x), S(F(x))) + d(S(F(x)), S(x)) + d(S(x), x) \\ &= d(S(F(x)), S(x)) \\ &\leq \lambda\, d(F(x), x) \end{aligned}$$

เพราะว่า $\lambda \varepsilon [0, 1)$

ฉะนั้น $d(F(x), x) = 0$

สมมุติว่ามี $x, y \in X$

ซึ่ง $d(F(x),x) = 0$ และ $d(F(y),y) = 0$

โดยทฤษฎี 2.2 เราได้ว่า $F(x) \in \overline{\{x\}}$ และ $F(y) \in \overline{\{y\}}$

เนื่องจาก F เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง

$F^2(x) = F(F(x)) \in F\overline{\{x\}} \subset \overline{\{F(x)\}} \subset \overline{\overline{\{x\}}} = \overline{\{x\}}$

โดยการกระทำซ้ำ ๆ กันจะได้ $F^p(x) \in \overline{\{x\}}$

ในทำนองเดียวกัน $F^p(y) \in \overline{\{y\}}$

โดยทฤษฎี 2.2 $d(F^p(x),x) = 0$ และ $d(F^p(y),y) = 0$

ดังนั้น $d(x,y) \leq d(F^p(x),x) + d(F^p(x),F^p(y)) + d(F^p(y),y)$

$= d(F^p(x), F^p(y))$

$\leq \lambda\, d(x, y)$

เพราะว่า $\lambda \in [0, 1)$

นั่นคือ $d(x, y) = 0$

<u>ทฤษฎี 3</u> ให้ (X, d) เป็นเซมิ-เมตริกสเปซ

และ $F : X \to X$ เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น

ถ้า $\{F^n(x)\}$ มีสับซีเควนซ์ $\{F^{n_k}(x)\}$ ซึ่งคอนเวอร์จไปยัง x_0

แล้ว $\{F^n(x)\}$ จะต้องคอนเวอร์จไปยัง x_0 ด้วย

และ $d(x_0, F(x_0)) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ x เป็นจุดใด ๆ ใน X

และกำหนดให้

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F(x) \\
x_2 &= F(x_1) = F^2(x) \\
x_3 &= F(x_2) = F^3(x) \\
&\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\
x_n &= F(x_{n-1}) = F^n(x)
\end{aligned}
$$

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$
\begin{aligned}
d(x_{m+n}, x_n) &= d(F^{m+n}(x), F^n(x)) \\
&\leq \lambda^n d(F^m(x), x) \\
&= \lambda^n d(x_m, x)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
d(x_m, x) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + d(x_1, x) \\
&\leq \lambda^{m-1} d(x_1, x_0) + \lambda^{m-2} d(x_1, x_0) + \dots + d(x_1, x) \\
&= (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \dots + 1)\, d(x_1, x) \\
&\leq \frac{1}{1-\lambda}\, d(x_1, x)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $d(x_{m+n}, x_n) < \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\, d(x_1, x)$ ....(1)

ค่าทางขวามือของอสมการ (1) เป็น 0 เมื่อ $\lambda = 0$

และค่าทางขวามือของอสมการ (1) คอนเวอร์จไปยัง 0 เมื่อ $0 < \lambda < 1$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน X

เพราะว่า $\{F^{n_k}(x)\} = \{x_{n_k}\}$ คอนเวอร์จไปยังจุด $x_0 \in X$

หรือ $\lim\limits_{k\to\infty} F^{n_k}(x) = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$

ดังนั้น $\{F^n(x)\} = \{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยังจุด $x_0 \in X$

หรือ $\lim\limits_{n\to\infty} F^n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

เนื่องจาก F เป็นฟังชั่นต่อเนื่อง

ฉะนั้น $F(x_0) = F(\lim\limits_{k\to\infty} F^{n_k}(x)) = \lim\limits_{k\to\infty} F^{n_k+1}(x)$

$$F^2(x_0) = F(\lim_{k\to\infty} F^{n_k+1}(x)) = \lim_{k\to\infty} F^{n_k+2}(x)$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} d(x_0, F(x_0)) &= d(\lim_{k\to\infty} F^{n_k}(x), \lim_{k\to\infty} F^{n_k+1}(x)) \\ &= d(\lim_{k\to\infty} F^{n_k+1}(x), \lim_{k\to\infty} F^{n_k+2}(x)) \\ &= d(F(x_0), F^2(x_0)) \\ &\leq \lambda\, d(x_0, F(x_0)) \end{aligned}$$
ซึ่งเป็นไปได้เฉพาะ $\lambda = 0$

นั่นคือ $d(x_0, F(x_0)) = 0$