# บทที่. 4

## ทฤษฎีจุดคงที่ในเซมิ - เมตริกสเปซ

(Fixed point Theory in semi-metric space)

นิยาม 4.1 ถ้า $\alpha$ เป็นฟังชั่นที่เป็นจำนวนจริง (real valued function) จะกล่าวว่า $\alpha$ เป็นฟังชั่นเพิ่มขึ้นโมโนโทน (Monotone increasing) บนช่วง $J$ ถ้า $\alpha(x) < \alpha(y)$ $(x < y;\ x, y \in J)$ และกล่าวว่า $\alpha$ เป็นฟังชั่นลดลงโมโนโทน(Monotone decreasing) บนช่วง $J$ ถ้า $\alpha(x) > \alpha(y)$ $(x < y;\ x, y \in J)$

นิยาม 4.2 ให้ $\mathscr{F}$ เป็นเซทของฟังชั่น $\alpha(x, y)$ สอดคล้องตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

(1) $\alpha(x, y) = \alpha(d(x,y))$

(2) $0 \leq \alpha(d) < 1$ สำหรับทุก ๆ $d > 0$

(3) $\alpha(d)$ เป็นฟังชั่นลดลงโมโนโทนของ $d$

จากการนิยามข้างบน สามารถเขียนทฤษฎี 3.1 ให้อยู่ในรูปทั่ว ๆไปดังต่อไปนี้

ทฤษฎี 4.1 ให้ $(X, d)$ เป็นคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซ และ $F : X \longrightarrow X$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่องโดยที่

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha(x,y)d(x,y) \text{ สำหรับทุก ๆ } x,y \in X$$

แล้วจะมีจุด $z \in X$ อย่างน้อยหนึ่งจุดซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

และถ้ามีจุด $\omega$ อื่น ๆอีกจุดหนึ่งซึ่ง $d(\omega, F(\omega)) = 0$

แล้วจะได้ $d(z, \omega) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x_0$ เป็นจุดใด ๆใน $X$

ให้ $x_1 = F(x_0)$

$$x_2 = F(x_1) = F^2(x_0)$$

$$x_3 = F(x_2) = F^3(x_0)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$$

ถ้า $m$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้ว
$$d(x_{m+n}, x_n) = d(F^{m+n}(x_0), F^n(x_0))$$

$$\leq \alpha(x_{m+n-1}, x_{n-1})d(x_{m+n-1}, x_{n-1})$$

$$\leq \alpha(x_{m+n-1}, x_{n-1})\alpha(x_{m+n-2}, x_{n-2}) \cdots$$

$$\alpha(x_m, x_0)d(x_m, x_0)$$

ถ้าให้ $\inf\limits_{m,n} d(x_{m+n}, x_n) \geq \varepsilon$ เมื่อ $\varepsilon > 0$

แล้วจะได้ $\sup\limits_{m,n} \alpha(x_{m+n}, x_n) \leq d(\varepsilon)$

$$
\begin{aligned}
d(x_m,x_0) &\leq d(x_m,x_{m-1}) + d(x_{m-1},x_{m-2}) + \cdots + d(x_2,x_1) + d(x_1,x_0) \\
&\leq \alpha(x_{m-1},x_{m-2})\alpha(x_{m-2},x_{m-3})\cdots\alpha(x_1,x_0)d(x_1,x_0) \\
&\qquad + \alpha(x_{m-2},x_{m-3})\cdots\alpha(x_1,x_0)d(x_1,x_0) \\
&\qquad \cdots \\
&\qquad + \alpha(x_1,x_0)d(x_1,x_0) \\
&\qquad + d(x_1,x_0) \\
&\leq \left\{ [\alpha(\varepsilon)]^{m-1} + [\alpha(\varepsilon)]^{m-2} + \cdots + [\alpha(\varepsilon)] + 1 \right\} d(x_1,x_0) \\
&< \left\{ 1 + [\alpha(\varepsilon)] + \cdots + [\alpha(\varepsilon)]^{m-2} + [\alpha(\varepsilon)]^{m-1} + \cdots \right\} d(x_1,x_0) \\
&= \frac{1}{1-[\alpha(\varepsilon)]} d(x_1,x_0) \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < \alpha(\varepsilon) < 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
d(x_{m+n},x_n) &\leq \alpha(x_{m+n-1},x_{n-1})\alpha(x_{m+n-2},x_{n-2})\cdots \\
&\qquad \alpha(x_m,x_0)d(x_m,x_0) \\
&\leq [\alpha(\varepsilon)]^n d(x_m,x_0) \\
&< \frac{[\alpha(\varepsilon)]^n}{1-[\alpha(\varepsilon)]} d(x_1,x_0)
\end{aligned}
$$

ค่าทางขวามือของอสมการข้างบนจะเป็น 0 เมื่อ $\alpha(\varepsilon) = 0$

และคอนเวอร์จไปยัง 0 เมื่อ $0 < \alpha(\varepsilon) < 1$

ฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน $X$

เพราะว่า $X$ คอมพลีท

ดังนั้น $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยังจุดใน $X$

ตอนต่อไปพิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎี 3.1

ทฤษฎี 4.2 ให้ $X$ เป็นเซมิ - เมตริกสเปซ

และ $F : X \dashrightarrow X$ เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น โดยที่มีจุดจุดหนึ่งซึ่ง $\{F^{n_i}(x_0)\}$

เป็นสับซีเควนซ์ที่คอนเวอร์จของ $\{F^n(x_0)\}$ และถ้า $z = \lim_{i \to \infty} F^{n_i}(x_0) \in X$

แล้ว $d(z, F(z)) = 0$

พิสูจน์ สมมุติตรงข้ามว่า $d(z, F(z)) \neq 0$

จากที่กำหนดให้ $\lim_{i \to \infty} F^{n_i}(x_0) = z \in X$

$$F(\lim_{i \to \alpha} F^{n_i}(x_0)) = F(z)$$

$$\lim_{i \to \alpha} F^{n_i+1}(x_0) = F(z)$$

ให้ $\triangle = \{(x, y) \mid x = y\}$

และ $Y = X \times X - \triangle$

ให้ฟังชั่น $r : Y \dashrightarrow R$

กำหนดโดย $r(x, y) = \dfrac{d(F(x), F(y))}{d(x,y)}$

หรือ $d(F(x), F(y)) = r(x,y)\ d(x,y)$ ............(1)

จะได้ $r$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน $Y$

ดังนั้นจะมีเนเบอร์ฮูด $N$ ของ $(z, F(z)) \in Y$ ซึ่งถ้า $x,y \in N$

แล้วจะได้ $0 \leq r(x, y) < q < 1$ .............(2)

พิจารณา $N_1 = N_1(z, \delta)$ และ $N_2 = N_2(F(z), \delta)$ เป็นเนเบอร์ฮูด

ที่มีจุดศูนย์กลางที่ $z$ และ $F(z)$ ตามลำดับ ซึ่งมีรัศมี $\delta > 0$

สมมุติให้ $d(z, F(z)) > 3\delta$

จากสมมุติฐานของทฤษฎีจะมี $x_0 \varepsilon X$ โดยที่

$\{F^{n_i}(x_0)\}$ เป็นสับซีเควนซ์ที่คอนเวอร์จของ $\{F^n(x_0)\}$

และถ้า $\lim\limits_{i \to \infty} F^{n_i}(x_0) = z \quad X \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

แล้วจะมีจำนวนเต็ม K ซึ่ง $i > K$

$$F^{n_i}(x_0) \quad \varepsilon \quad N_1(z, \delta)$$

เพราะว่า F เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น จะได้ $d(F(x), F(y)) < d(x,y)$

ดังนั้น $F^{n_i+1}(x_0) \quad \varepsilon \quad N_2(F(z), \delta)$ จาก (3)

พิจารณา $d(z, F^{n_i}(x_0)) + d(F^{n_i}(x_0), F^{n_i+1}(x_0))$

$$+ d(F^{n_i+1}(x_0), F(z))$$

$$\geq d(z, F(z))$$

$$> 3\delta$$

ฉะนั้นทางที่เป็นไปได้คือ $d(F^{n_i}(x_0), F^{n_i+1}(x_0)) > \delta$ เมื่อ $i > K$ (4)

จาก (1) และ (2) จะได้

$$d(F^{n_i+1}(x_0), F^{n_i+2}(x_0)) < q\, d(F^{n_i}(x_0), F^{n_i+1}(x_0))$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $l > j > k$

$$d(F^{n_l}(x), F^{n_l+1}(x)) < d(F^{n_{l-1}+1}(x), F^{n_{l-1}+2}(x))$$

$$< q\,d(F^{n_{l-1}}(x), F^{n_{l-1}+1}(x))$$

$$\leq \cdots$$

$n_j \qquad n_j+1$

และค่าทางขวามือของอสมการข้างบนนี้คอนเวอร์จไปยัง o เมื่อ $i \to \infty$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อ (4) ที่ว่า $d(F^{n_i}(x_0), F^{n_i+1}(x_0)) > \delta$ เมื่อ $i > K$

ดังนั้น $d(z, F(z)) = 0$

ถ้ามีจุดอื่น ๆคือ $w \neq z$ ซึ่ง $d(w, F(w)) = 0$

พิจารณา $d(z, w) \leq d(z, F(z)) + d(F(z), F(w)) + d(F(w), w)$

$\leq d(F(z), F(w))$

$< d(z, w)$

จะได้ว่า $d(z, w) = 0$

<u>นิยาม 4.3</u> ถ้า X เป็นเมตริกสเปซ แล้วเรียก X ว่าเป็นเซทที่<u>คอมแพค</u> (compact) ต่อเมื่อทุก ๆ open covering ของ X จะมี finite subcovering เสมอ

<u>นิยาม 4.4</u> ถ้า X เป็นเซมิ - เมตริกสเปซ แล้วเรียก X ว่าเป็นเซทที่คอมแพค (compact) ต่อเมื่อทุก ๆ open covering ของ X จะมี finite subcovering เสมอ

<u>ทฤษฎี 4.3</u> ให้ X เป็นเมตริกสเปซและให้ฟังชั่น $F: X \to X$ ซึ่ง

(1) $d(F(x), F(y)) < d(x,y)$ สำหรับ $x \neq y \in X$

(2) มี M เป็นสับเซทของ X และจุด $x_0 \in M$ ที่สอดคล้องตาม $2d(x_0, F(x_0)) + d(F(x), F(x_0)) \leq d(x_0, x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in X - M$

(3) ให้ $Y \subset X$ โดย $Y$ เป็นคอมแพค

และ $F : M \longrightarrow Y$

ดังนั้นจะมีจุดอย่างน้อย 1 จุดคือ $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ทุก ๆ $x_0 \in X$ โดย $x_0 \neq F(x_0)$

ให้ $x_1 = F(x_0)$

$$x_2 = F(x_1) = F^2(x_0)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$$

$$x_{2n} = F(x_{2n-1}) = F^{2n}(x_0)$$

$$x_{2n+1} = F(x_{2n}) = F^{2n+1}(x_0)$$

$$x_{2n+2} = F(x_{2n+1}) = F^{2n+2}(x_0)$$

จากเงื่อนไข (1) $d(F^2(x), F^2(y)) < d(F(x),F(y)) < d(x,y)$

พิจารณา $d(x_{2n}, x_{2n+1}) = d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))$

$$= d(F^{2n}(x_0), FF^{2n}(x_0))$$

$$< d(F^{2n-1}(x_0), F^{2n}(x_0))$$

$$< \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$< d(x_0, F(x_0))$$

$$= d(x_0, x_1)$$

และ $d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)}) = d(F^{2n+1}(x_0),\ F^{2(n+1)}(x_0))$

$$= d(F^{2n+1}(x_0),\ FF^{2n+1}(x_0))$$

$$< d(F^{2n}(x_0),\ F^{2n+1}(x_0))$$

$$< \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$< d(x_0,\ F(x_0))$$

$$= d(x_0,\ x_1)$$

พิจารณา $d(x_0, x_{2n+1}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{2(n+1)}) + d(x_{2(n+1)}, x_{2n+1})$

$$= d(x_0, F(x_0)) + d(F(x_0), F(x_{2n+1})) +$$

$$d(x_{2(n+1)},\ x_{2n+1})$$

ดังนั้น $d(x_0, x_{2n+1}) < 2d(x_0,\ F(x_0)) + d(F(x_0),\ F(x_{2n+1}))$

จากเงื่อนไข (2) สำหรับ $x_{2n+1} \in X - M$ จะสอดคล้องกับ

$$d(x_0, x_{2n+1}) \geq 2d(x_0, F(x_0)) + d(F(x_0),\ F(x_{2n+1}))$$

ฉะนั้น $x_{2n+1} \in M$

ในทำนองเดียวกัน $d(x_0, x_{2n}) \leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n})$

$$= d(x_0, F(x_0)) + d(F(x_0), F(x_{2n})) + d(x_{2n+1}, x_{2n})$$

$$d(x_0, x_{2n}) < 2d(x_0,\ F(x_0)) + d(F(x_0),\ F(x_{2n}))$$

จากเงื่อนไข (2) สำหรับ $x_{2n} \varepsilon X - M$ จะสอดคล้องกับ

$$d(x_0, x_{2n}) \geq 2d(x_0, F(x_0)) + d(F(x_0), F(x_{2n}))$$

ฉะนั้น $x_{2n} \varepsilon M$

นั่นคือ $\{d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))\}$ เป็นซีเควนซ์ลดลงของจำนวนจริง

ซึ่งบาวด์ข้างล่างโดย 0

จาก (3) $F : M \longrightarrow Y \subset X$

ฉะนั้นซีเควนซ์ $\{F^{2n}(x_0)\} \varepsilon$ คอมแพคสับเซทของ $X$

ดังนั้นสับซีเควนซ์ $\{F^{2n_k}(x_0)\}$ มีลิมิตที่จุด $y$

ฉะนั้นซีเควนซ์ $\{d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))\}$ คอนเวอร์จ

ทุก ๆ สับซีเควนซ์ $\{d(F^{2n_k}(x_0), F^{2n_k+1}(x_0)\}$ และ

$\{d(F^{2n_k+1}(x_0), F^{2n_k+2}(x_0))\}$

คอนเวอร์จและมีลิมิตเดียวกันคือ

$$d(y, F(y)) = \lim_{k \to \infty} d(F^{2n_k+1}(x_0), F^{2n_k+2}(x_0))$$

$$= \lim_{k \to \infty} d(FF^{2n_k}(x_0), F^2F^{2n_k}(x_0))$$

$$= d(F(y), F^2(y))$$

ดังนั้น $d(y, F(y)) = d(F(y), F^2(y))$

ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข (1)

ฉะนั้นจะมี $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

<u>บทแทรก 4.1</u> ให้ F เป็นฟังชั่นของเมตริกสเปซ X โดยที่ $F : X \to X$ ซึ่ง

(1) $d(F(x), F(y)) < d(x,y)$ สำหรับ $x \neq y \in X$

(2) จะมีจุด $x_0 \in X$ สอดคล้องตาม

$d(F(x), F(x_0)) \leq \alpha(x, x_0)d(x, x_0)$ สำหรับทุก ๆ $x \in X$

เมื่อ $\alpha(x, y) = \alpha(d(x, y)) \in \mathcal{F}$

(3) ให้ $r = \dfrac{2d(x_0, F(x_0))}{1-\alpha(2d(x_0, F(x_0))}$ และ Y เป็น

คอมแพคสับเซทของ X และให้ฟังชั่น $F : N(x_0, r) \to Y$

แล้วจะมีจุด $z \in X$ ซึ่ง $d(F(z), z) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ทุก ๆ $x_0 \in X$ และ $x_0 \neq F(x_0)$

ให้ $x_1 = F(x_0)$

$x_2 = F(x_1) = F^2(x_0)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$

$x_{2n} = F(x_{2n-1}) = F^{2n}(x_0)$

$x_{2n+1} = F(x_{2n}) = F^{2n+1}(x_0)$

$x_{2n+2} = F(x_{2n+1}) = F^{2n+2}(x_0)$

จากเงื่อนไข (1) จะได้

$d(F^2(x), F^2(y)) < d(F(x), F(y)) < d(x,y)$

พิจารณา $d(x_{2n}, x_{2n+1}) = d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))$

$$= d(F^{2n}(x_0), FF^{2n}(x_0))$$

$$< d(F^{2n-1}(x_0), F^{2n}(x_0))$$

$$< \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$< d(x_0, F(x_0))$$

$$= d(x_0, x_1)$$

และ $d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)}) = d(F^{2n+1}(x_0), F^{2(n+1)}(x_0))$

$$= d(F^{2n+1}(x_0), FF^{2n+1}(x_0))$$

$$< d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))$$

$$< \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$< d(x_0, F(x_0))$$

$$= d(x_0, x_1)$$

พิจารณาถ้ามี $N(x_0, r)$ เป็นสับเซทของ $X$ และจุด $x_0 \varepsilon N(x_0, r)$ ซึ่ง

สอดคล้องตาม $d(x_0,x) \geq r = \dfrac{2d(x_0, F(x_0))}{1 - \alpha(2d(x_0, F(x_0)))}$

หรือ $d(x_0, x) - \alpha(x_0, F(x_0))d(x,x_0) - \alpha(x_0,F(x_0))d(x,x_0) \geq 2d(x_0,F(x_0))$

$$2d(x_0, F(x_0)) + 2\alpha(x_0, F(x_0))d(x,x_0) \leq d(x_0,x)$$

สำหรับทุก ๆ $x \in X - N$

พิจารณา $d(x_0,x_{2n+1}) \leq d(x_0,x_1)+ d(x_1,x_{2(n+1)})+ d(x_{2(n+1)},x_{2n+1})$

$$= d(x_0,F(x_0))+ d(F(x_0),F(x_{2n+1}))$$
$$+ d(x_{2(n+1)}, x_{2n+1})$$
$$\leq d(x_0,F(x_0))+ \alpha(x_{2n+1}, x_0)d(x_{2n+1},x_0)$$
$$+ d(x_{2(n+1)}, x_{2n+1})$$
$$< d(x_0,F(x_0))+ 2\alpha(x_0,x_1)d(x_{2n+1},x_0)$$
$$+ d(x_{2(n+1)}, x_{2n+1})$$
$$< 2d(x_0,F(x_0))+ 2\alpha(x_0,x_1)d(x_{2n+1}, x_0)$$

จากเงื่อนไข (2) สำหรับ $x_{2n+1} \in X - N$ จะสอดคล้องกับ

$$d(x_0,x_{2n+1}) \geq 2d(x_0,F(x_0)) + 2\alpha(x_0,x_1)d(x_{2n+1}, x_0)$$

ฉะนั้น $x_{2n+1} \in N$

ในทำนองเดียวกัน

$$d(x_0,x_{2n}) \leq d(x_0,x_1)+ d(x_1,x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n})$$
$$= d(x_0,x_1)+ d(F(x_0),F(x_{2n}))+ d(x_{2n+1}, x_{2n})$$
$$\leq d(x_0,F(x_0))+\alpha(x_{2n},x_0)d(x_{2n},x_0)+ d(x_{2n+1}, x_{2n})$$
$$< d(x_0,F(x_0))+2\alpha(x_0,x_1)d(x_{2n},x_0)+ d(x_{2n+1}, x_{2n})$$
$$< 2d(x_0,F(x_0))+ 2\alpha(x_0,F(x_0))d(x_{2n},x_0)$$

จากเงื่อนไข (2) สำหรับ $x_{2n} \in X - N$ จะสอดคล้องกับ

$d(x_0, x_{2n}) \geq 2d(x_0, F(x_0)) + 2\alpha(x_0, F(x_0))d(x_{2n}, x_0)$

ฉะนั้น $x_{2n} \in N$

ดังนั้น $\{d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))\}$ เป็นซีเควนซ์ลดลงของจำนวนจริงซึ่งบาวด์ข้างล่างโดย 0

จาก (3) $F : N \longrightarrow Y \subset X$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{F^{2n}(x_0)\} \in Y \subset X$

ฉะนั้นสับซีเควนซ์ $\{F^{2n_k}(x_0)\}$ มีค่าลิมิตเท่ากับ $y$

เพราะว่าซีเควนซ์ $\{d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))\}$ คอนเวอร์จ

ฉะนั้นทุก ๆ สับซีเควนซ์ $\{d(F^{2n_k}(x_0), F^{2n_k+1}(x_0))\}$ และ $\{d(F^{2n_k+1}(x_0), F^{2n_k+2}(x_0))\}$

คอนเวอร์จและมีค่าลิมิตเดียวกันคือ

$$d(y, F(y)) = \lim_{k \to \infty} d(F^{2n_k+1}(x_0), F^{2n_k+2}(x_0))$$

$$= \lim_{k \to \infty} d(FF^{2n_k}(x_0), F^2F^{2n_k}(x_0))$$

$$= d(F(y), F^2(y))$$

ดังนั้น $d(y, F(y)) = d(F(y), F^2(y))$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อ (1)

นั่นคือจะมี $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

<u>ทฤษฎี 4.4</u> ถ้า $F_1$ และ $F_2$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่องจากเซมิ-เมตริกสเปซ $X$ ไปยัง $X$ ซึ่งมีเงื่อนไข

(1) $d(F_1(x), F_2(y)) < d(x,y)$ สำหรับ $x \neq y \in X$

(2) มี $x \in X$ และมีซีเควนซ์ $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง $x$

แล้ว $d(x, F_1(x)) = 0$ $\quad d(x, F_2(x)) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ทุก ๆ $x_0 \in X$ ซึ่ง $d(x_0, F_i(x_0)) \neq 0,\ i = 1,2$

และ

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F_1(x_0), & x_2 &= F_2(x_1) \\
x_3 &= F_1(x_2), & x_4 &= F_2(x_3) \\
x_5 &= F_1(x_4), & x_6 &= F_2(x_5) \\
&\vdots & &\vdots \\
x_{2n-1} &= F_1(x_{2n-2}), & x_{2n} &= F_2(x_{2n-1}) \\
x_{2n+1} &= F_1(x_{2n}), & x_{2n+2} &= F_2(x_{2n+1})
\end{aligned}
$$

กำหนดให้ $\lim_{n \to \infty} x_n = x \in X$

ดังนั้น $F_1(\lim_{n \to \infty} x_{2n}) = F_1(x),\ F_2(\lim_{n \to \infty} x_{2n+1}) = F_2(x)$

ให้ $\triangle = \{(x,y) \mid x = y\}$

และ $Y = X \times X - \triangle$

ให้ฟังชั่น $r : Y \to R$

กำหนดโดย $r(y,z) = \dfrac{d(F_1(y),F_2(z))}{d(y,z)}$ หรือ

$d(F_1(y), F_2(z)) = r(y, z)d(y, z)$ (1)

ดังนั้น $r$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่องบน $Y$ จะมีเนเบอร์ฮูด $N$ ของ $(x,F_1(x))\varepsilon\, Y$

ซึ่ง $y,z \;\varepsilon\; N \Longrightarrow 0 \le r(y,z) < q < 1$ (2)

พิจารณา $N_1 = N_1(x, \delta)$ เป็นเนเบอร์ฮูดซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $x$

และ $N_2 = N_2(F_1(x), \delta)$ เป็นเนเบอร์ฮูดซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $F_2(x)$

ซึ่งมีรัศมี $\delta > 0$ สมมุติให้ $d(x, F_1(x)) > 3\delta$

สมมุติให้มี $x_0 \;\varepsilon\; X$ และมี $\{F_2^{2n_i}(x_0)\}$ เป็นสับซีเควนซ์ของ $\{F_2^{2n}(x_0)\}$

โดยที่ $\lim\limits_{i\to\infty} F_2^{2n_i}(x_0) = x \;\varepsilon\; X$ (3)

แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก $N$ ซึ่ง $i > N$, $F_2^{2n_i}(x_0) \;\varepsilon\; N_1(x, \delta)$

และโดยที่ $F_1, F_2$ เป็นฟังชั่นคอนแทรกชั่น

ดังนั้น $d(F_1(x), F_2(y)) < d(x,y)$ จะได้ว่า $F_1^{2n_i+1}(x_0)\varepsilon N_2(F_1(x),\delta)$

พิจารณา $d(x,F_2^{2n_i}(x_0))+d(F_2^{2n_i}(x_0),F_1^{2n_i+1}(x_0)) + d(F_1^{2n_i+1}(x_0),$

$F_1(x)) \ge d(x, F_1(x)) > 3\delta$

ฉะนั้นทางที่เป็นไปได้คือ $d(F_2^{2n_i}(x_0),F_1^{2n_i+1}(x_0)) > \delta,\ i > N$ (4)

จาก (1) และ (2) เราพิจารณา $\dfrac{d(F_1^{2n_i+1}(x_0),\ F_2^{2n_i+1}(x_0))}{d(F_2^{2n_i}(x_0),\ F_1^{2n_i+1}(x_0))} < q < 1$

ดังนั้น $d(F_1^{2n_i+1}(x_0),\ F_2^{2n_i+2}(x_0)) < qd(F_2^{2n_i}(x_0),\ F_1^{2n_i+1}(x_0))$

ในทำนองเดียวกันเมื่อ $i > j > N$

$$d(F_2^{2n_l}(y),\ F_1^{2n_l+1}(y)) < d(F_1^{2n_{l-1}+1}(y),\ F_2^{2n_{l-1}+2}(y))$$

$$< qd(F_2^{2n_{l-1}}(y),\ F_1^{2n_{l-1}+2}(y)$$

$$\leq \ \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$< \ q^{l-j}d(F_2^{2n_j}(y),\ F_1^{2n_j+1}(y))$$

และค่าทางขวามือของอสมการข้างบนจะคอนเวอร์จไปยัง 0 เมื่อ $0 < q < 1$ ซึ่งขัดแย้งกับ (4) ดังนั้น $d(x, F_i(x)) = 0$ นั่นคือ $d(x, F_1(x)) = 0$ และ $d(x,\ F_2(x)) = 0$

<u>ทฤษฎี 4.5</u> ให้ $F_1$ และ $F_2$ เป็นฟังก์ชันจากเซมิ-เมตริกสเปซ $X$ ไปยัง $X$ ซึ่ง

(1) $d(F_1(x),\ F_2(y)) < d(x,y)$ สำหรับ $x \neq y \in X$

(2) ถ้ามี $M$ เป็นสับเซทของ $X$ และจุด $x_0 \in M$ ซึ่ง

$$2d(x_0,\ F_1(x_0)) + d(F_1(x_0),\ F_1F_2(x)) \leq d(x_0,\ F_i(x))$$

สำหรับทุก ๆ $x \in X - M$, $i = 1, 2$ และ $F_1F_2 = F_2F_1$

(3) ให้ $Y \subset X$ โดย $Y$ เป็นคอมแพค

และ $F_1, F_2 : M \dashrightarrow Y$

แล้วจะมีจุด $z$ ซึ่ง $d(z,\ F_1(z)) = 0 = d(z,\ F_2(z))$

<u>พิสูจน์</u> ให้ทุก ๆ $x_0 \varepsilon X$ และ $x_0 \neq F_i(x_0)$, $i = 1, 2$

ให้

$$
\begin{array}{llll}
x_1 = F_1(x_0) & , & x_2 = F_2(x_1) \\
x_3 = F_1(x_2) & , & x_4 = F_2(x_3) \\
x_5 = F_1(x_4) & , & x_6 = F_2(x_5) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
x_{2n+1} = F_1(x_{2n}) & , & x_{2n+2} = F_2(x_{2n+1})
\end{array}
$$

จากเงื่อนไข (1) $d(F_1^2(x), F_2^2(x)) < d(F_1(x), F_2(y)) < d(x,y)$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
d(x_{2n}, x_{2n+1}) &= d(F_2^{2n}(x_0), F_1^{2n+1}(x_0)) \\
&= d(F_2^{2n}(x_0), F_1F_2(x_{2n-1})) \\
&= d(F_2^{2n}(x_0), F_1F_2^{2n}(x_0)) \\
&< d(F_2^{2n-1}(x_0), F_1F_2^{2n-1}(x_0)) \\
&< \cdots \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
&< d(x_0, F_1(x_0)) \\
&= d(x_0, x_1)
\end{aligned}
$$

และ $d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)}) = d(F_1(x_{2n}), F_2(x_{2n+1}))$

$$= d(F_1^{2n+1}(x_0), F_2^{2(n+1)}(x_0))$$

$$= d(F_1^{2n+1}(x_0), F_2F_1^{2n+1}(x_0))$$

$$< d(F_1^{2n}(x_0), F_2F_1^{2n}(x_0))$$

$$< \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$< d(x_1, F_2(x_1))$$

$$= d(x_1, x_0)$$

พิจารณา $d(x_0,x_{2n+1}) \leq d(x_0,x_1)+ d(x_1,x_{2(n+1)})+d(x_{2(n+1)},x_{2n+1})$

$$= d(x_0,F_1(x_0))+d(F_1(x_0),F_2(x_{2n+1}))$$

$$+ d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)})$$

$$= d(x_0,F_1(x_0))+d(F_1(x_0),F_2F_1(x_{2n}))$$

$$+ d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)})$$

นั่นคือ $d(x_0,F_1(x_{2n})) < 2d(x_0,F_1(x_0))+ d(F_1(x_0),F_1F_2(x_{2n}))$

จากเงื่อนไข (2) สำหรับ $x_{2n} \varepsilon X - M$ จะสอดคล้องกับ

$$d(x_0,F_1(x_{2n})) \geq 2d(x_0,F_1(x_0))+ d(F_1(x_0),F_1F_2(x_{2n}))$$

ฉะนั้น $x_{2n} \varepsilon M$

ในทำนองเดียวกัน

$$d(x_0,x_{2(n+1)}) \le d(x_0,x_1)+ d(x_1,x_{2(n+1)+1})+d(x_{2(n+1)+1},x_{2(n+1)})$$

$$= d(x_0,F_1(x_0))+ d(F_1(x_0), F_1(x_{2(n+1)}))$$

$$+ d(x_{2(n+1)+1}, x_{2(n+1)})$$

$$= d(x_0,F_1(x_0))+ d(F_1(x_0), F_1F_2(x_{2n+1}))$$

$$+ d(x_{2(n+1)+1}, x_{2(n+1)})$$

ดังนั้น $d(x_0,F_2(x_{2n+1})) < 2d(x_0,F_1(x_0))+d(F_1(x_0),F_1F_2(x_{2n+1}))$

จากเงื่อนไข (2) สำหรับ $x_{2n+1} \varepsilon X - M$ จะสอดคล้องกับ

$$d(x_0,x_{2n+1}) \ge 2d(x_0,F_1(x_0))+ d(F_1(x_0),F_1F_2(x_{2n+1}))$$

ฉะนั้น $x_{2n+1} \varepsilon M$

ดังนั้น $\{d(F_2^{2n}(x_0), F_1^{2n+1}(x_0))\}$ เป็นซีเควนซ์ลดลงของจำนวนจริง
บาวด์ข้างล่างโดย $0$

จาก (3) $F_1, F_2 : M \longrightarrow Y , Y \subset X$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{F_2^{2n}(x_0)\} \varepsilon Y , Y \subset X$

ฉะนั้นสับซีเควนซ์ $\{F_2^{2n_k}(x_0)\}$ มีลิมิตที่จุด $y$ ดังนั้นซีเควนซ์
$\{d(F_2^{2n}(x_0), F_1^{2n+1}(x_0))\}$ คอนเวอร์จ

ทุก ๆ สับซีเควนซ์ $\{d(F_2^{2n_k}(x_0), F_1^{2n_k+1}(x_0))\}$ และ
$\{d(F_1^{2n_k+1}(x_0), F_2^{2n_k+2}(x_0))\}$

คอนเวอร์จและมีลิมิตเดียวกัน คือ

$$d(y, F_1(y)) = \lim d(F_1^{2n_k+1}(x_0), \; F_2^{2n_k+2}(x_0))$$

$$= \lim_{k \to \infty} d(F_1 F_2^{2n_k}(x_0), \; F_1^2 F_2^{2n_k}(x_0))$$

$$= d(F_1(y), \; F_1^2(y))$$

ดังนั้น $d(y, F_1(y)) = d(F_1(y), F_1^2(y))$

ในทำนองเดียวกัน

$$d(y, F_2(y)) = d(F_2(y), F_2^2(y))$$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อที่ (1)

ดังนั้นจะมี $z$ ซึ่ง $d(z, F_1(z)) = 0$ และ $d(z, F_2(z)) = 0$

<u>ทฤษฎี 4.6</u> ให้ $F_1$ และ $F_2$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่องจากคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซ $X$ ไปยัง $X$ ซึ่ง

(1) $d(F_1(x), F_2(y)) < d(x,y)$ สำหรับ $x \neq y \in X$

(2) ให้มี $M$ เป็นสับเซทของ $X$ และจุด $x_0 \in M$ สอดคล้องตาม

(2.1) $2d(x_0, F_1(x_0)) + d(F_1(x_0), F_1F_2(x))$ $\leq d(x_0, F_1(x))$ สำหรับทุก ๆ $x \in X - M$ และ $i = 1, 2$

(2.2) $d(F_1(x), F_2(y)) \leq \alpha(x,y) d(x, F_1(x))$ $+ \beta(x,y) d(y, F(y))$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in M$ เมื่อ $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y) \in \mathcal{F}$ และมีฟังชั่นลดลงของ $d$

ซึ่ง $\alpha(d(x,y)) + \beta(d(x,y)) < 1$

และ $\alpha(x,y) = \alpha(y,x)$ , $\beta(x,y) = \beta(y,x)$

จะมีจุด $z \in X$ ซึ่ง $d(F_1(z),z) = 0 = d(F_2(z),z)$

<u>พิสูจน์</u> ให้ทุก ๆ $x_0 \in X$ และ $x_0 \neq F_i(x_0)$, $i = 1, 2$

ให้
$$\begin{array}{llll} x_1 = F_1(x_0) & , & x_2 = F_2(x_1) \\ x_3 = F_1(x_2) & , & x_4 = F_2(x_3) \\ x_5 = F_1(x_4) & , & x_5 = F_2(x_5) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{2n+1} = F_1(x_{2n}) & , & x_{2n+2} = F_2(x_{2n+1}) \end{array}$$

จาก (1)
$$\begin{aligned} d(x_{2n},x_{2n+1}) &= d(F_2^{2n}(x_0), F_1^{2n+1}(x_0)) \\ &= d(F_2^{2n}(x_0), F_1F_2(x_{2n-1})) \\ &= d(F_2^{2n}(x_0), F_1F_2^{2n}(x_0)) \\ &< \cdots \\ &\vdots \\ &< d(x_0, F_1(x_0)) \\ &= d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

และ
$$
\begin{aligned}
d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)}) &= d(F_1(x_{2n}), F_2(x_{2n+1})) \\
&= d(F_1^{2n+1}(x_0), F_2^{2(n+2)}(x_0)) \\
&= d(F_1^{2n+1}(x_0), F_2F_1^{2n+1}(x_0)) \\
&< \cdots \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
&< d(x_1, F_2(x_1)) \\
&= d(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
d(x_0,x_{2n+1}) &\leq d(x_0,x_1)+d(x_1,x_{2(n+1)})+d(x_{2(n+1)},x_{2n+1}) \\
&= d(x_0,F_1(x_0))+d(F_1(x_0),F_2F_1(x_{2n})) \\
&\quad + d(x_{2(n+1)}, x_{2n+1}) \\
&= d(x_0,F_1(x_0))+d(F_1(x_0),F_1F_2(x_{2n})) \\
&\quad + d(x_{2(n+1)}, x_{2n+1})
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $d(x_0,F_1(x_{2n})) < 2d(x_0,F_1(x_0))+ d(F_1(x_0),F_1F_2(x_{2n}))$

จากข้อ (2.1) นั้นคือ $x_{2n} \in M$

จะแสดงว่า $\{x_n\}$ บาวด์

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
d(x_0,x_{2n+1}) &\leq d(x_0,x_1)+d(x_1,x_{2(n+1)})+d(x_{2(n+1)},x_{2n+1}) \\
&\leq d(x_0,x_1)+d(F_1(x_0),F_2(x_{2n+1})) \\
&\quad + d(x_{2(n+1)}, x_{2n+1})
\end{aligned}
$$

$$\leq d(x_0,x_1)+\alpha(x_0,x_{2n+1})d(x_0,F_1(x_0)) + \beta(x_0,x_{2n+1})d(x_{2n+1},F_2(x_{2n+1}))+d(x_{2(n+1)},x_{2n+1})$$

$$< d(x_0,x_1)+ \alpha(x_0,x_{2n+1})d(x_0,x_1) + \beta(x_0,x_{2n+1})d(x_0,x_1) + d(x_0,x_1)$$

$$< 2d(x_0,x_1)+ \left[\alpha(x_0,x_{2n+1})+\beta(x_0,x_{2n+1})\right] d(x_0,x_1)$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนกำหนดให้ $0 < d_0 \leq d(x_0, x_{2n+1})$

แล้ว $\alpha(d)$, $\beta(d)$ เป็นฟังชั่นลดลงของ $d$

ดังนั้น $d(x_0,x_{2n+1}) < \left[2 + \alpha(d_0)+ \beta(d_0)\right] d(x_0,x_1)$

พิจารณา

$$d(x_0,x_{2(n+1)}) \leq d(x_0,F_1(x_0))+ d(F_1(x_0),F_2(x_{2n-1})) + d(F_2(x_{2n-1}),F_1(x_{2n}))+ d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)})$$

$$\leq d(x_0,x_1) + \alpha(x_0,x_{2n-1})d(x_0,F_1(x_0)) + \beta(x_0,x_{2n-1})d(x_{2n-1}, F_2(x_{2n-1})) + d(x_{2n},x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)})$$

$$\leq d(x_0,x_1)+\alpha(x_0,x_{2n-1})d(x_0,x_1) + \beta(x_0,x_{2n-1})d(x_0,x_1) + d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)})$$

$$< d(x_0,x_1)+ \alpha(x_0,x_{2n-1})d(x_0,x_1)+ \beta(x_0,x_{2n-1})d(x_0,x_1)+ d(x_0,x_1)+ d(x_0,x_1)$$

$< \left[3+\alpha(d_0')+\beta(d_0')\right] d(x_0,x_1)$ สำหรับบาง $d_0' > 0$ และ

$d_0' \leq d(x_0, x_{2n-1})$

นั่นคือซีเควนซ์ $\{x_n\}$ บาวด์

จะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

พิจารณา $d(x_1,x_2) = d(F_1(x_0),F_2(x_1)) \leq \alpha(x_0,x_1)d(x_0,F_1(x_0))$

$$+\beta(x_0,x_1)d(x_0,F_2(x_1))$$

ดังนั้น $d(x_1,x_2) \leq \alpha(x_0,x_1)d(x_0,x_1)+\beta(x_0,x_1)d(x_1,x_2)$

$$d(x_1,x_2) - \beta(x_0,x_1)d(x_1,x_2) \leq \alpha(x_0,x_1)d(x_0,x_1)$$

$$(1-\beta(x_0,x_1))d(x_1,x_2) \leq \alpha(x_0,x_1)d(x_0,x_1)$$

$$d(x_1,x_2) \leq \frac{\alpha(x_0, x_1)}{1-\beta(x_0,x_1)} d(x_0,x_1)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$d(x_3,x_2) = d(F_1(x_2),F_2(x_1)) \leq \alpha(x_2,x_1)d(x_2,F_1(x_2))$$
$$+ \beta(x_2,x_1)d(x_1,F_2(x_1))$$

ดังนั้น $d(x_2,x_3) \leq \alpha(x_1,x_2)d(x_2,x_3) + \beta(x_1,x_2)d(x_1,x_2)$

$$d(x_2,x_3) - \alpha(x_1,x_2)d(x_2,x_3) \leq \beta(x_1,x_2)d(x_1,x_2)$$

$$(1-\alpha(x_1,x_2))d(x_2,x_3) \leq \beta(x_1,x_2)d(x_2,x_2)$$

$$d(x_2,x_3) \leq \frac{\beta(x_1,x_2)}{1-\alpha(x_1, x_2)} d(x_1,x_2)$$

ดังนั้น $d(x_2,x_3) \leq \frac{\beta(x_1,x_2)}{1-\alpha(x_1,x_2)} \cdot \frac{\alpha(x_0,x_1)}{1-\beta(x_0, x_1)} d(x_0,x_1)$

ในกรณีทั่ว ๆ ไป

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \leq \frac{\beta(x_{2n-1},x_{2n})}{1-\alpha(x_{2n-1},x_{2n})} \cdot \frac{\alpha(x_{2n-2},x_{2n-1})}{1-\beta(x_{2n-2},x_{2n-1})} \cdots$$

$$\cdot \frac{\alpha(x_2, x_3)}{1-\beta(x_2,x_3)} \cdot \frac{\beta(x_1, x_2)}{1-\alpha(x_1,x_2)} \cdot \frac{\alpha(x_0, x_1)}{1-\beta(x_0,x_1)} d(x_0,x_1)$$

และ $d(x_{2n+1},x_{2(n+1)}) \leq \frac{\alpha(x_{2n},x_{2n+1})}{1-\beta(x_{2n},x_{2n+1})} \cdot \frac{\beta(x_{2n-1}, x_{2n})}{1-\alpha(x_{2n-1},x_{2n})} \cdots$

$$\cdot \frac{\alpha(x_2, x_3)}{1-\beta(x_2,x_3)} \cdot \frac{\beta(x_1,x_2)}{1-\alpha(x_1,x_2)} \cdot \frac{\alpha(x_0,x_1)}{1-\beta(x_0,x_1)} d(x_0,x_1)$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq d(x_i,x_{i+1})$, $i = 0,1,2,\ldots,2n$

$$\alpha(x_i, x_{i+1}) \leq \alpha(\varepsilon)$$

$$\beta(x_i, x_{i+1}) \leq \beta(\varepsilon) , i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$$

โดยสิ่งกำหนดให้ $\alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon) < 1$

$$\alpha(\varepsilon) < 1 - \beta(\varepsilon)$$

$$\frac{\alpha(\varepsilon)}{1-\beta(\varepsilon)} < 1$$

และ $\frac{\beta(\varepsilon)}{1-\alpha(\varepsilon)} < 1$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $r_1 = \frac{\alpha(\varepsilon)}{1-\beta(\varepsilon)}$ และ $r_2 = \frac{\beta(\varepsilon)}{1- \alpha(\varepsilon)}$

ดังนั้น $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq r_1^n r_2^n d(x_0, x_1)$

และ $d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)}) \leq r_1^{n+1} r_2^n d(x_0, x_1)$

พิจารณา

$$d(x_{2n}, x_{2n+p}) \leq d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) + \cdots + d(x_{2n+p-1}, x_{2n+p})$$

$$< r_1^n r_2^n d(x_0, x_1) + r_1^{n+1} r_2^n d(x_0, x_1) + \cdots$$

$$= r_1^n r_2^n \left[ 1 + r_1(1 + r_1 r_2 + r_1^2 + r_2^2 + \cdots) + r_1 r_2 (1 + r_1 r_2 + \cdots) \right] d(x_0, x_1)$$

$$= \frac{r_1^n r_2^n (1 - r_1)}{1 - r_1 r_2} d(x_0, x_1)$$

ค่าทางขวามือคอนเวอร์จไปยัง 0 เมื่อ $0 < r_1, r_2 < 1$

ในทำนองเดียวกัน $d(x_{2n+1}, x_{2n+p+1})$ คอนเวอร์จไปยัง 0 เมื่อ $0 < r_1, r_2 < 1$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

ฉะนั้น X คอมพลีท

ดังนั้น $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยังจุด $y \in X$

นั่นคือซีเควนซ์ $\{F_2^{2n}(x_0)\} = \{x_{2n}\}$ ซึ่งเป็นสับซีเควนซ์ของ $\{x_n\}$ จะคอนเวอร์จไปยัง y

โดยความต่อเนื่องของ $F_1$, ซีเควนซ์ $\{F_1F_2^{2n}(x_0)\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F_1(y)$
ดังนั้น $\{d(F_2^{2n}(x_0), F_1^{2n+1}(x_0))\}$ เป็นซีเควนซ์ลดลงของจำนวนบาวด์ข้างล่างโดย 0

ดังนั้นสับซีเควนซ์ $\{F_2^{2n_k}(x_0)\}$ มีลิมิตที่จุด $y$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{d(F_2^{2n}(x_0), F_1^{2n+1}(x_0))\}$ คอนเวอร์จ

ทุก ๆสับซีเควนซ์ $\{d(F_2^{2n_k}(x_0), F_1^{2n_k+1}(x_0))\}$ และ
$\{d(F_1^{2n_k+1}(x_0), F_2^{2n_k+2}(x_0))\}$

คอนเวอร์จและมีลิมิตเดียวกันคือ

$$\begin{aligned} d(y,F_1(y)) &= \lim_{k\to\infty} d(F_1^{2n_k+1}(x_0), F_2^{2n_k+2}(x_0)) \\ &= \lim_{k\to\infty} d(F_1F_2^{2n_k}(x_0), F_1^2F_2^{2n_k}(x_0)) \\ &= d(F_1(y), F_1^2(y)) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน $d(y, F_2(y)) = d(F_2(y), F_2^2(y))$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อที่ (1)

ดังนั้นจะมี $z$ ซึ่ง $d(z, F_1(z)) = 0$ และ $d(z,F_2(z)) = 0$

<u>บทแทรก 4.2</u> ถ้า $F$ เป็นฟังชั่นต่อเนื่องของเมตริกสเปซ $X$ ซึ่ง

(1) $d(F(x), F(y)) < d(x,y)$

(2) มี $M$ เป็นสับเซทของ $X$ และจุด $x_0 \varepsilon M$ สอดคล้องตาม

(2.1) $2d(x_0,F(x_0)) + d(F(x_0),F^2(x)) \leq d(x_0,F(x))$

สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon X - M$

(2.2) $d(F(x),F(y)) \leq \alpha(x,y)\left[d(x,F(x))+d(y,F(y))\right]$

สำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon M$ และ $\alpha(x, y) \varepsilon \mathcal{F}$

แล้วจะมีจุด $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ทุก ๆ $x_0 \varepsilon X$ และ $x_0 \neq F(x_0)$

ให้ $x_1 = F(x_0)$

$$x_2 = F(x_1) = F^2(x_0)$$

$$\vdots$$

$$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$$

$$x_{2n} = F(x_{2n-1}) = F^{2n}(x_0)$$

$$x_{2n+1} = F(x_{2n}) = F^{2n+1}(x_0)$$

จาก (2) $d(x_{2n},x_{2n+1}) = d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))$

$$= d(F^{2n}(x_0), FF^{2n}(x_0))$$

$$< d(F^{2n-1}(x_0), FF^{2n-1}(x_0))$$

$$< \cdots$$

$$\vdots$$

$$< d(x_0, F(x_0))$$

$$= d(x_0, x_1)$$

และ $d(x_{2n+1},x_{2(n+1)}) = d(F^{2n+1}(x_0),\ F^{2(n+1)}(x_0))$

$$= d(F^{2n+1}(x_0),\ FF^{2n+1}(x_0))$$

$$< d(F^{2n}(x_0),\ FF^{2n}(x_0))$$

$$< \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$< d(x_0,\ F(x_0))$$

$$= d(x_0,\ x_1)$$

พิจารณา $d(x_0,x_{2n+1}) \leq d(x_0,x_1)+d(x_1,x_{2(n+1)})+d(x_{2(n+1)},x_{2n+1})$

$$= d(x_0,F(x_0))+d(F(x_0),F^2(x_{2n}))$$

$$+ d(x_{2(n+1)},\ x_{2n+1})$$

ดังนั้น $d(x_0,F(x_{2n})) < 2d(x_0,F(x_0))+ d(F(x_0),F^2(x_{2n}))$

จากข้อ (2.1) นั่นคือ $x_{2n} \varepsilon M$

ในทำนองเดียวกัน

$d(x_0,x_{2(n+1)}) \leq d(x_0,x_1)+ d(x_1,x_{2(n+1)+1})+d(x_{2(n+1)+1},x_{2(n+1)})$

$$= d(x_0,F(x_0))+ d(F(x_0),F^2(x_{2n+1})) +$$

$$d(x_{2(n+1)+1},\ x_{2(n+1)})$$

ฉะนั้น $d(x_0,x_{2(n+1)}) < 2d(x_0,F(x_0))+d(F(x_0),\ F^2(x_{2n+1}))$

จากข้อ (2.1) นั่นคือ $x_{2n+1} \varepsilon M$

จะแสดงว่า $\{x_n\}$ บาวด์

พิจารณา $d(x_0,x_{2n+1}) \leq d(x_0,x_1)+d(x_1,x_{2(n+1)})$

$+ d(x_{2(n+1)}, x_{2n+1})$

$\leq d(x_0,x_1)+ d(F(x_0),F(x_{2n+1})) +$

$d(x_{2(n+1)},x_{2n+1})$

$\leq d(x_0,x_1)+\alpha(x_0,x_{2n+1}) [ d(x_0,F(x_0)) +$

$d(x_{2n+1}, F(x_{2n+1}))] + d(x_{2(n+1)},x_{2n+1})$

$< 2d(x_0,x_1)+ 2\alpha(x_0,x_{2n+1})d(x_0,x_1)$

$= 2(1 + \alpha(x_0, x_{2n+1}))d(x_0,x_1)$

เพื่อความสะดวกในการเขียน

กำหนดให้ $d_0 > 0$, $d_0 \leq d(x_0, x_{2n+1})$

แล้ว $\alpha(d)$, $\beta(d)$ เป็นฟังชั่นลดลงของ $d$

ดังนั้น $d(x_0,x_{2n+1}) < 2\left[1 + \alpha(d_0)\right] d(x_0, x_1)$

พิจารณา

$d(x_0,x_{2(n+1)}) \leq d(x_0,F(x_0))+d(F(x_0),F(x_{2n-1}))+d(F(x_{2n-1}),$

$F(x_{2n})) + d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)})$

$\leq d(x_0,x_1)+ \alpha(x_0,x_{2n-1}) [ d(x_0,F(x_0))$

$+ d(x_{2n-1}, F(x_{2n-1}))] + d(x_{2n}, x_{2n+1})$

$+ d(x_{2n+1}, x_{2(n+1)})$

$$< d(x_0,x_1) + \alpha(x_0,x_{2n-1})\left[d(x_0,x_1) + d(x_0,x_1)\right]$$

$$+ d(x_0,x_1) + d(x_0, x_1)$$

$$< \left[3 + \alpha(2d_0')\right] d(x_0, x_1)$$

สำหรับบาง $d_0' > 0$ และ $d_0' \leq d(x_0, x_{2n-1})$

นั่นคือ $\{x_n\}$ บาวด์

จะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

พิจารณา $d(x_1,x_2) = d(F(x_0),F(x_1)) \leq \alpha(x_0,x_1)\left[d(x_0,F(x_0)) + d(x_1, F(x_1))\right]$

ดังนั้น $d(x_1,x_2) \leq \alpha(x_0,x_1)d(x_0,x_1) + \alpha(x_0,x_1)d(x_1,x_2)$

$$\left[1 - \alpha(x_0,x_1)\right] d(x_1,x_2) \leq \alpha(x_0,x_1)d(x_0,x_1)$$

$$d(x_1,x_2) \leq \frac{\alpha(x_0,x_1)}{1-\alpha(x_0,x_1)}\, d(x_0,x_1)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$d(x_2,x_3) = d(F(x_1),F(x_2)) \leq \alpha(x_1,x_2)\left[d(x_1,F(x_1)) + d(x_2, F(x_2))\right]$$

$$\left[1 - \alpha(x_1,x_2)\right] d(x_2,x_3) \leq \alpha(x_1,x_2)d(x_1,x_2)$$

$$d(x_2,x_3) \leq \frac{\alpha(x_1, x_2)}{1- \alpha(x_1,x_2)}\, d(x_1,x_2)$$

ดังนั้น $d(x_2,x_3) \leq \dfrac{\alpha(x_1,x_2)}{1-\alpha(x_1,x_2)} \cdot \dfrac{\alpha(x_0,x_1)}{1-\alpha(x_0,x_1)}\, d(x_1,x_2)$

ในกรณีทั่ว ๆ ไป

$$d(x_{2n},x_{2n+1}) \leq \frac{\alpha(x_{2n-1},x_{2n})}{1-\alpha(x_{2n-1}, x_{2n})} \cdot \frac{\alpha(x_{2n-2}, x_{2n-1})}{1-\alpha(x_{2n-2},x_{2n-1})} \cdots$$

$$\cdot \frac{\alpha(x_2, x_3)}{1-\alpha(x_2,x_3)} \cdot \frac{\alpha(x_1, x_2)}{1-\alpha(x_1,x_2)} \cdot \frac{\alpha(x_0, x_1)}{1-\alpha(x_0,x_1)} d(x_0,x_1)$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $\varepsilon > 0, \ \varepsilon \leq d(x_i,x_{i+1}),$

$i = 0, 1, 2, \ldots, 2n$

$$\alpha(x_i, x_{i+1}) \leq \alpha(\varepsilon)$$

โดยสิ่งกำหนดให้ $\alpha(\varepsilon + \varepsilon) < 1$

$$\alpha(\varepsilon) < 1 - \alpha(\varepsilon)$$

$$\frac{\alpha(\varepsilon)}{1 - \alpha(\varepsilon)} < 1$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $r = \dfrac{\alpha(\varepsilon)}{1 - \alpha(\varepsilon)}$

ดังนั้น $d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq r^{2n} d(x_0, x_1)$

พิจารณา $d(x_{2n},x_{2n+p}) \leq d(x_{2n},x_{2n+1})+d(x_{2n+1},x_{2n+2})+\cdots+$

$$d(x_{2n+p-1}, x_{2n+p})$$

$$\leq r^{2n}d(x_0,x_1)+r^{2n+1}d(x_0,x_1)+\cdots+$$

$$r^{2n+p-1}d(x_0,x_1)$$

$$\leq r^{2n}\left[1+r + r^2 +\cdots+ r^{p-1}\right] d(x_0,x_1)$$

$$< r^{2n}\left[1+r + r^2+ \cdots \right] d(x_0,x_1)$$

$$< \frac{r^{2n}}{1- r} d(x_0, x_1)$$

ค่าทางขวามือของอสมการข้างบนคอนเวอร์จไปยัง o เมื่อ $0 < r < 1$

ในทำนองเดียวกัน $d(x_{2n+1}, x_{2n+p+1})$ คอนเวอร์จไปยัง o เมื่อ

$0 < r < 1$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

เพราะว่า X คอมพลีท

นั่นคือ $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยังจุด $y \in X$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{F^{2n}(x_0)\} = \{x_{2n}\}$ ซึ่งเป็นสับซีเควนซ์ของ $\{x_n\}$

จะคอนเวอร์จไปยัง y

โดยความต่อเนื่องของ F ซีเควนซ์ $\{FF^{2n}(x_0)\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F(y)$

ดังนั้น $\{d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))\}$ เป็นซีเควนซ์ลดลงของจำนวนจริงบวกค้างล่างโดย o

ดังนั้นสับซีเควนซ์ $\{F^{2n_k}(x_0)\}$ มีลิมิตที่จุด y,

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))\}$ คอนเวอร์จ

ทุก ๆ สับซีเควนซ์ $\{d(F^{2n_k}(x_0), F^{2n_k+1}(x_0))\}$ และ

$\{d(F^{2n_k+1}(x_0), F^{2n_k+2}(x_0))\}$

คอนเวอร์จและมีลิมิตเดียวกันคือ

$$d(y, F(y)) = \lim_{k\to\infty} d(F^{2n_k+1}(x_0), F^{2n_k+2}(x_0))$$

$$= \lim_{k\to\infty} d(FF^{2n_k}(x_0), F^2F^{2n_k}(x_0))$$

$$= d(F(y), F^2(y))$$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อที่ (1)

นั่นคือจะมี $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

<u>บทแทรก 4.3</u> ให้ $X$ เป็นคอมพลีทเซมิ - เมตริกสเปซ และ $\alpha, \beta$ เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ ซึ่ง $\alpha + \beta < 1$ ถ้า $d(F_1(x), F_2(y)) \leq \alpha d(x, F_1(x)) + \beta d(y, F_2(y))$ แล้วจะมีจุดอย่างน้อย 1 จุด $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

ถ้ามีจุด $w \in X$ ซึ่ง $d(w, F_i(w)) = 0$, $i = 1, 2$ แล้ว $d(w, z) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x_0$ เป็นจุดใด ๆ ใน $X$

ให้
$$
\begin{aligned}
x_1 &= F_1(x_0), & x_2 &= F_2(x_1)\\
x_3 &= F_1(x_2), & x_4 &= F_2(x_3)\\
x_5 &= F_1(x_4), & x_6 &= F_2(x_5)\\
&\vdots & &\vdots\\
x_{2n-1} &= F_1(x_{2n-2}), & x_{2n} &= F_2(x_{2n-1})\\
x_{2n+1} &= F_1(x_{2n}), & x_{2n+2} &= F_2(x_{2n+1})
\end{aligned}
$$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
d(x_1, x_2) &= d(F_1(x_0), F_2(x_1))\\
&\leq \alpha d(x_0, F_1(x_0)) + \beta d(x_1, F_2(x_1))\\
&= \alpha d(x_0, x_1) + \beta d(x_1, x_2)
\end{aligned}
$$

$$(1-\beta)d(x_1, x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1)$$

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{\alpha}{1-\beta} d(x_0, x_1)$$

ฉะนั้น $\alpha + \beta < 1$

ดังนั้น $\frac{\alpha}{1-\beta} < 1$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $r = \frac{\alpha}{1-\beta}$

ในทำนองเดียวกัน
$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &= d(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\ &\leq \alpha d(x_1, F_1(x_1)) + \beta d(x_2, F_2(x_2)) \\ &= \alpha d(x_1, x_2) + \beta d(x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$(1-\beta)\ d(x_2, x_3) \leq \alpha d(x_1, x_2)$$

$$d(x_2, x_3) \leq \frac{\alpha}{1-\beta} d(x_1, x_2)$$

$$d(x_2, x_3) \leq \frac{\alpha}{1-\beta} d(x_1, x_2)$$

ดังนั้น $d(x_2, x_3) \leq r^2 d(x_0, x_1)$

ในทำนองเดียวกัน

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq r^n d(x_0, x_1)$$

พิจารณา
$$\begin{aligned} d(x_n, x_{m+n}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots \\ &\quad + d(x_{m+n-1}, x_{m+n}) \\ &\leq r^n d(x_0, x_1) + r^{n+1} d(x_0, x_1) + \cdots \\ &\quad + r^{m+n-1} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

$$< r^n [1 + r + r^2 + \ldots] d(x_0, x_1)$$

$$< \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1)$$

ค่าทางขวามือของอสมการข้างบนคอนเวอร์จไปยัง 0 เมื่อ $0 < r < 1$

ฉะนั้น $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน X

ดังนั้น X คอมพลีท

นั่นคือ $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง $x \in X$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{F_i(x_n)\} = \{x_{n+1}\}$ เป็นสับซีเควนซ์ของ $\{x_n\}$ ดังนั้นจะคอนเวอร์จไปยัง x

พิจารณา $d(x,F_i(x)) \leq d(x,x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F_i(x))$

$$= d(x,x_{n+1}) + d(F_i(x_n), F_i(x))$$

$$= d(x,x_{n+1}) + d(F_i(x_n),F_i(x))$$

$$\leq d(x,x_{n+1}) + \alpha d(x_n,F_i(x_n)) + \beta d(x,F_i(x))$$

$$= d(x,x_{n+1}) + \alpha d(x_n,x_{n+1}) + \beta d(x,F_i(x))$$

$d(x,x_{n+1})$, $d(x_n,x_{n+1})$ คอนเวอร์จไปยัง 0

ดังนั้น $d(x, F_i(x)) \leq \beta d(x, F_i(x))$

นั่นคือ $d(x, F_i(x)) = 0$

ถ้ามีจุด $w \in X$ ซึ่ง $d(w, F_i(w)) = 0$

โดยทฤษฎี 2.2 เราได้ว่า $F(x) \in \overline{\{x\}}$ และ $F(y) \in \overline{\{y\}}$

ดังนั้น $d(x,y) \leq d(x,F_1(x)) + d(F_1(x),F_2(y)) + d(F_2(y),y)$

$$= d(F_1(x), F_2(y))$$

$$\leq \alpha d(x, F_1(x)) + \beta d(y, F_2(y))$$

นั่นคือ $d(x, y) = 0$

<u>บทแทรก 4.4</u> สำหรับค่า $\alpha$, $\beta$ ตามบทแทรก 4.3 ถ้าเราทำให้ $\alpha = \beta$ จะได้ผลต่อไปนี้

ถ้า $X$ เป็นคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซและ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ และ $d(F_1(x), F_2(y)) \leq \alpha\left[d(x, F_1(x)) + d(y, F_2(y))\right]$

แล้วจะมีจุด $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$ และถ้ามีจุดอื่น ๆ $w \in X$ สอดคล้องกับ $d(w, F(w)) = 0$ แล้ว $d(z, w) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ทุก ๆ $x_0 \in X$ โดย $d(x_0, F_i(x_0)) \neq 0$, $i = 1, 2$

และให้

$$\begin{aligned}
x_1 &= F_1(x_0), & x_2 &= F_2(x_1) \\
x_3 &= F_1(x_2), & x_4 &= F_2(x_3) \\
x_5 &= F_1(x_4), & x_6 &= F_2(x_5) \\
&\vdots & &\vdots \\
x_{2n-1} &= F_1(x_{2n-2}), & x_{2n} &= F_2(x_{2n-1}) \\
x_{2n+1} &= F_1(x_{2n}), & x_{2n+2} &= F_2(x_{2n+1})
\end{aligned}$$

พิจารณา $d(x_1,x_2) = d(F_1(x_0), F_2(x_1))$

$$\leq \alpha \left[ d(x_0, F_1(x_0)) + d(x_1,F_2(x_1)) \right]$$

$$= \alpha d(x_0,x_1) + \alpha d(x_1,x_2)$$

$$(1 - \alpha)\, d(x_1,x_2) \leq \alpha d(x_0, x_1)$$

$$d(x_1,x_2) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\, d(x_0, x_3)$$

เพราะว่า $\alpha < \frac{1}{2}$

ฉะนั้น $\alpha + \alpha < 1$

นั่นคือ $\frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $r = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

ในทำนองเดียวกัน

$$d(x_2,x_3) = d(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

$$\leq \alpha \left[ d(x_1,F_1(x_1)) + d(x_2,F_1(x_2)) \right]$$

$$= \alpha\, d(x_1,x_2) + \alpha d(x_2, x_3)$$

$$(1-\alpha) d(x_2,x_3) = \alpha\, d(x_1, x_2)$$

$$d(x_2,x_3) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\, d(x_1, x_2)$$

นั่นคือ $d(x_2,x_3) \leq r^2\, d(x_0, x_1)$

พิจารณา $d(x_n,x_{m+n}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \dots +$

$$d(x_{m+n-1}, x_{m+n})$$

$$\leq r^n d(x_0,x_1) + r^{n+1} d(x_0,x_1) + \dots +$$

$m+n-1$ ..

$$\leq r^n \left[1 + r + r^2 + \dots + r^{m-1}\right] d(x_0, x_1)$$

$$< r^n \left[1 + r + r^2 + \dots \right] d(x_0, x_2)$$

$$< \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1)$$

ค่าทางขวามือของอสมการข้างบนคอนเวอร์จไปยัง $0$ เมื่อ $0 < r < 1$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน $X$

เพราะว่า X คอมพลีท

นั่นคือ $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยังจุด $x \in X$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{F_i(x_n)\} = \{x_{n+1}\}$ เป็นสับซีเควนซ์ของ $\{x_n\}$

ดังนั้นจะคอนเวอร์จไปยัง $x$

พิจารณา $d(x,F_i(x)) \leq d(x,x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F_i(x))$

$$= d(x,x_{n+1}) + d(F_i(x_n), F_i(x))$$

$$\leq d(x,x_{n+1}) + \alpha \left[d(x_n, F_i(x_n)) + d(x,F_i(x))\right]$$

$$= d(x, x_{n+1}) + \alpha d(x_n,x_{n+1}) + \alpha d(x,F_i(x))$$

$d(x,x_{n+1})$, $d(x_n, x_{n+1})$ จะคอนเวอร์จไปยัง $0$

$d(x, F_i(x)) \leq \alpha d(x, F_i(x))$

นั่นคือ $d(x, F_i(x)) = 0$

ถ้ามีจุด $w \in X$ ซึ่ง $d(w), F_i(w)) = 0$

โดยทฤษฎี 2.2 $F_1(x) \in \overline{\{x\}}$ และ $F_2(x) \in \overline{\{y\}}$

ดังนั้น $d(x,y) \leq d(x,F_1(x)) + d(F_1(x), F_2(y)) + d(F_2(y),y)$

$$= d(F_1(x), F_2(y))$$

$$\leq \alpha \left[ d(x, F_1(x)) + d(y, F_2(y)) \right]$$

นั่นคือ $d(x, y) = 0$

<u>บทแทรก 4.4</u> ถ้า $X$ เป็นคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซและ $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

และ $d(F(x), F(y)) \leq \alpha \left[ d(x,F(x)) + d(y, F(y)) \right]$

แล้วจะมีจุด $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

และถ้าจะมีจุดอื่น ๆ $w \in X$ สอดคล้องตาม $d(w,F(w)) = 0$

แล้ว $d(z, w) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x_0$ เป็นจุดใด ๆใน $X$

ให้ $x_1 = F(x_0)$

$$x_2 = F(x_1) = F^2(x_0)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$$

$$x_{n+1} = F(x_n) = F^{n+1}(x_0)$$

พิจารณา $d(x_1,x_2) = d(F(x_0), F(x_1))$

$$\leq \alpha \left[ d(x_0, F(x_0)) + d(x_1, F(x_1)) \right]$$

$$= \alpha\, d(x_0, x_1) + \alpha\, d(x_1, x_2)$$

$(1 - \alpha)d(x_1, x_2) \leq \alpha\, d(x_0, x_1)$

นั่นคือ $d(x_1, x_2) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_0, x_1)$

เพราะว่า $\alpha < \frac{1}{2}$

ฉะนั้น $\alpha + \alpha < 1$

นั่นคือ $\frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $r = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} d(x_2,x_3) &= d(F(x_1),F(x_2)) \\ &\leq \alpha \left[ d(x_1,F(x_1))+d(x_2,F(x_2)) \right] \\ &= \alpha\, d(x_1,x_2) + \alpha\, d(x_2, x_3) \\ (1-\alpha)d(x_2, x_3) &\leq \alpha\, d(x_1, x_2) \\ d(x_2, x_3) &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

นั่นคือ $d(x_2, x_3) \leq r^2 d(x_0, x_1)$

ในกรณีทั่วไป

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq r^n d(x_0, x_1)$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x_n,x_{m+n}) &\leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \dots + d(x_{m+n-1}, x_{m+n}) \\ &\leq r^n d(x_0,x_1) + r^{n+1} d(x_0,x_1) + \dots + r^{m+n-1} d(x_0, x_1) \\ &\leq r^n \left[ 1 + r + r^2 + \dots + r^{m-1} \right] d(x_0,x_1) \end{aligned}$$

$$< r^n \left[ 1 + r + r^2 + \dots \right] d(x_0, x_1)$$

$$= \frac{r^n}{1 - r} \; d(x_0, x_1)$$

ค่าทางขวามือของอสมการข้างบนคอนเวอร์จไปยัง $0$ เมื่อ $0 < r < 1$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

เพราะว่า X คอมพลีท

ดังนั้น $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยังจุด $x \in X$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{F(x_n)\} = \{x_{n+1}\}$ เป็นสับซีเควนซ์ของ $\{x_n\}$

ดังนั้นจะคอนเวอร์จไปยัง $x$

พิจารณา $d(x, F(x)) \leq d(x,x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F(x))$

$$= d(x,x_{n+1}) + d(F(x_n), F(x))$$

$$\leq d(x,x_{n+1}) + \alpha \left[ d(x_n, F(x_n)) + d(x,F(x)) \right]$$

$$= d(x,x_{n+1}) + \alpha d(x_n,x_{n+1}) + \alpha d(x,F(x))$$

$d(x,x_{n+1})$, $d(x_n,x_{n+1})$ จะคอนเวอร์จไปยัง $0$

ดังนั้น $d(x, F(x)) \leq \alpha\, d(x, F(x))$

นั่นคือ $d(x, F(x)) = 0$

ถ้ามีจุด $w \in X$ , $d(w, F(w)) = 0$

โดยทฤษฎี 2.2 $F(x) \in \overline{\{x\}}$ และ $F(y) \in \overline{\{y\}}$

ดังนั้น $d(x,y) \leq d(x,F(x)) + d(F(x),F(y)) + d(F(y),y)$

$$= d(F(x), F(y))$$

$$\leq \alpha \left[ d(x,F(x)) + d(y,F(y)) \right]$$

<u>ทฤษฎี 4.7</u> ถ้า F เป็นฟังชั่นของคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซ X ซึ่ง

(1) $d(F(x),F(y)) < d(x,y)$

(2) มี M เป็นสับเซทของ X และจุด $x_0 \varepsilon M$ สอดคล้องตาม

(2.1) $d(x_0,F(x_0))+d(F(x),F(x_0)) \leq d(x,x_0)$

สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon X - M$

(2.2) $d(F(x),F(y)) \leq \lambda(x,y)d(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon M$ เมื่อ $\lambda(x,y) = \lambda(d(x,y))$, $0 \leq \lambda(d) < 1$ และ $\lambda(d)$ เป็นฟังชั่นลดลงโมโนโทนของ d

แล้วจะมีจุด z ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

ถ้ามีจุดอื่น ๆ $w \varepsilon X$ ซึ่ง $d(w,F(w)) = 0$ แล้ว $d(z,w) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ทุก ๆ $x_0 \varepsilon X$ และ $x_0 \neq F(x_0)$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F(x_0) \\
x_2 &= F(x_1) = F^2(x_0) \\
&\vdots \\
x_n &= F(x_{n-1}) = F^n(x_0) \\
x_{2n} &= F(x_{2n-1}) = F^{2n}(x_0) \\
x_{2n+1} &= F(x_{2n}) = F^{2n+1}(x_0)
\end{aligned}
$$

จาก (1) $$\begin{aligned} d(x_{2n},x_{2n+1}) &= d(F^{2n}(x_0),\ F^{2n+1}(x_0)) \\ &= d(F^{2n}(x_0),\ FF^{2n}(x_0)) \\ &< d(F^{2n-1}(x_0),\ FF^{2n-1}(x_0)) \\ &< \ldots \\ &\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ &< d(x_0,\ F(x_0)) \\ &= d(x_0,\ x_1) \end{aligned}$$

พิจารณา $$\begin{aligned} d(x_0,\ x_n) &\leq d(x_0,\ x_1) + d(x_1,\ x_n) \\ &< d(x_0,\ x_1) + d(x_1,\ x_{n+1}) \\ d(x_0,\ x_n) &< d(x_0,x_1) + d(F(x_0),\ F(x_n)) \end{aligned}$$

จากข้อ (2.1) นั่นคือ $x_n \in M$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} d(x_0,\ x_{n+1}) &\leq d(x_0,x_1) + d(x_1,x_{n+1}) \\ &< d(x_0,x_1) + d(x_1,x_{n+2}) \\ d(x_0,x_{n+1}) &< d(x_0,x_1) + d(F(x_0),\ F(x_{n+1})) \end{aligned}$$

จากข้อ (2.1) นั่นคือ $x_{n+1} \in M$

จะแสดงว่า $\{x_n\}$ บาวด์พิจารณา

$$\begin{aligned} d(x_0,x_{n+1}) &\leq d(x_0,x_1) + d(x_1,\ x_{n+1}) \\ &< d(x_0,x_1) + d(x_1,\ x_{n+2}) \end{aligned}$$

$$= d(x_0,x_1) + d(F(x_0), F(x_{n+1}))$$

$$\leq d(x_0,x_1) + \lambda(x_0,x_{n+1})d(x_0,x_{n+1})$$

$$\left[1- \lambda d(x_0,x_{n+1})\right] d(x_0,x_{n+1}) < d(x_0,x_1)$$

$$d(x_0,x_{n+1}) < \frac{1}{1-\lambda(x_0, x_{n+1})} d(x_0, x_1)$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนกำหนดให้ $d_0 > 0$, $d_0 \leq d(x_0, x_{n+1})$

แล้ว $\lambda(d)$ เป็นฟังชั่นโมโนโทนลดลงของ $d$

นั่นคือ $d(x_0,x_{n+1}) < \frac{1}{1-\lambda(d)} d(x_0, x_{n+1})$

พิจารณา $d(x_0,x_{n+2}) \leq d(x_0,x_1) + d(x_1,x_{n+2})$

$$< d(x_0,x_1) + d(x_1,x_{n+3})$$

$$= d(x_0,x_1) + d(F(x_0), F(x_{n+2}))$$

$$\leq d(x_0,x_1) + \lambda(x_0,x_{n+2})d(x_0,x_{n+2})$$

$$\left[1 - \lambda(x_0,x_{n+2})\right] d(x_0,x_{n+2}) < d(x_0,x_1)$$

$$d(x_0,x_{n+2}) < \frac{1}{1-\lambda(x_0, x_{n+2})} d(x_0,x_1)$$

สำหรับบาง $d_0' > 0$ และ $d_0' \leq d(x_0, x_{n+2})$

นั่นคือ $\{x_n\}$ บาวด์

จะแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

พิจารณา $d(x_1,x_2) = d(F(x_0),F(x_1)) \leq \lambda(x_0,x_1)d(x_0,x_1)$

$$d(x_2,x_3) = d(F(x_1),F(x_2)) \leq \lambda(x_1,x_2)d(x_1,x_2)) \leq \lambda(x_1,x_2)\lambda(x_0,x_1)d(x_0,x_1)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(F(x_{n-1}),F(x_n)) \leq \lambda(x_{n-1},x_n)\lambda(x_{n-2},x_{n-1})\cdots$$

$$\cdots\lambda(x_2,x_3)\ \lambda(x_1,\ x_2)\ \lambda(x_0,\ x_1)d(x_0,\ x_1)$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $\varepsilon > 0,\ \varepsilon \leq d(x_i,x_{i+1}), i=0,1,2,\ldots,n$

โดยสิ่งกำหนดให้ $\lambda(d) < 1$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $\lambda = \lambda(d)$

นั่นคือ $d(x_n,\ x_{n+1}) \leq \lambda^n\ d(x_0,\ x_1)$

พิจารณา $d(x_n,x_{m+n}) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \cdots +$

$$d(x_{n+m-1},x_{n+m})$$

$$\leq \lambda^n d(x_0,x_1) + \lambda^{n-1}d(x_0,x_1) + \cdots +$$

$$\lambda^{n+m-1}d(x_0,x_1)$$

$$< \lambda^n \left[1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots\right] d(x_0,\ x_1)$$

$$< \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\ d(x_0,\ x_1)$$

ค่าทางขวามือของอสมการข้างบนคอนเวอร์จไปยัง $0$ เมื่อ $0 < \lambda < 1$

นั่นคือ $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชี

เพราะว่า $X$ คอมพลีท

ดังนั้น $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยัง $y \in X$

ฉะนั้นซีเควนซ์ $\{F^{2n}(x_0)\} = \{x_{2n}\}$ ซึ่งเป็นสับซีเควนซ์ของ $\{x_n\}$ จะคอนเวอร์จไปยัง $y$

ดังนั้น $\{d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))\}$ เป็นซีเควนซ์ลดลงของจำนวนจริงบาวด์ข้างล่างโดย $0$

ฉะนั้นสับซีเควนซ์ $\{F^{2n_k}(x_0)\}$ มีลิมิตที่จุด $y$,

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{d(F^{2n}(x_0), F^{2n+1}(x_0))\}$ คอนเวอร์จ

ทุก ๆสับซีเควนซ์ $\{d(F^{2n_k}(x_0), F^{2n_k+1}(x_0))\}$ และ $\{d(F^{2n_k+1}(x_0), F^{2n_k+2}(x_0))\}$

คอนเวอร์จและมีลิมิตเดียวกัน คือ

$$d(y,F(y)) = \lim_{k \to \infty} d(F^{2n_k+1}(x_0), F^{2n_k+2}(x_0))$$

$$= \lim_{k \to \infty} d(FF^{2n_k}(x_0), F^2F^{2n_k}(x_0))$$

$$= d(F(y), F^2(y))$$

ซึ่งขัดแย้งกับ (1)

นั่นคือจะมี $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

<u>บทแทรก 4.5</u> ให้ $M = X$ และ $d(F(x), F(y)) \leq \lambda(x,y)d(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ แล้วจะมี $z$ ซึ่ง $d(z, F(z)) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x_0$ เป็นจุดใด ๆใน $X$

ให้ $x_1 = F(x_0)$

$$x_2 = F(x_1) = F^2(x_0)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_n = F(x_{n-1}) = F^n(x_0)$$

$$x_{n+1} = F(x_n) = F^{n+1}(x_0)$$

พิจารณา $d(x_1,x_2) = d(F(x_0),F(x_1)) \leq \lambda(x_0,x_1)d(x_0,x_1)$

$$d(x_2,x_3) = d(F(x_1),F(x_2)) \leq \lambda(x_1,x_2)d(x_1,x_2)$$

$$\leq \lambda(x_1,x_2)\lambda(x_0,x_1)d(x_0,x_1)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$d(x_n,x_{n+1}) = d(F(x_{n-1}),F(x_n)) \leq \lambda(x_{n-1},x_{n-2})d(x_{n-1},x_{n-2})$$

$$\leq \lambda(x_{n-1},x_{n-2})\lambda(x_{n-2},x_{n-3})\cdots$$

$$\cdot\lambda(x_2,x_3)\lambda(x_1,x_2)\lambda(x_0,x_1)d(x_0,x_1)$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq d(x_i,x_{i+1})$, $i=0,1,2,\ldots,n$

$$\lambda(x_i,x_{i+1}) \leq \lambda(\varepsilon)$$

โดยสิ่งกำหนดให้ $\lambda(d) < 1$

เพื่อความสะดวกในการเขียนให้ $\lambda = \lambda(d)$

นั่นคือ $d(x_n,x_{n+1}) \leq \lambda^n d(x_0, x_1)$

พิจารณา $d(x_n,x_{m+n}) \leq d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{m+n-1},x_{m+n})$

$$\leq \lambda^n d(x_0,x_1)+\lambda^{n+1}d(x_0,x_1)+\cdots+\lambda^{m+n-1}d(x_0,x_1)$$

$$< \lambda^n \left[ 1 + \lambda + \lambda^2 + \dots \right] d(x_0, x_1)$$

$$< \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} d(x_0, x_1)$$

ค่าทางขวามือของอสมการข้างบนจะคอนเวอร์จไปยัง 0 เมื่อ $0 < \lambda < 1$

นั่นคือ $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคซีใน $X$

เพราะว่า $X$ คอมพลีท

ดังนั้น $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยังจุด $x \in X$

ฉะนั้นซีเควนซ์ $\{F(x_n)\} = \{x_{n+1}\}$ เป็นสับซีเควนซ์ของ $\{x_n\}$ ดังนั้น จะคอนเวอร์จไปยัง $x$

พิจารณา $d(x, F(x)) \leq d(x, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, F(x))$

$d(x, x_{n+1})$ คอนเวอร์จไปยัง 0

ดังนั้น $d(x, F(x)) \leq d(x, F(x))$

นั่นคือ $d(x, F(x)) = 0$

<u>ทฤษฎี 4.8</u> ให้ $X$ เป็นคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซ และให้

(1) $d(F_1(x), F_2(y)) \leq \alpha(x,y) \left[ d(x,F_1(x)) + d(y,F_2(y)) \right]$

สำหรับทุก ๆ $x, y \in N(n,r)$, $N(n,r)$ เป็นเนเบอร์ฮูดของ $n$

(2) และถ้ามี $x_0 \in X$ สอดคล้องตาม

$$rd(x,F(x_0)) \leqslant 1-\lambda(x,F(x)) \text{ สำหรับทุก ๆ } x \in N(n,r)$$

เมื่อ $\lambda(x,y) = \lambda(d(x,y)) \in \mathscr{L}$, $\lambda(x,x_1) = \dfrac{\alpha(x, x_1)}{1 - \alpha(x, x_1)}$

แล้ว $F_1$, $F_2$ มีจุด $z$ ซึ่ง $d(z, F_1(z)) = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ทุก ๆ $x_0 \in X$ และ $x_0 \neq F_1(x_0)$

ให้

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F_1(x_0) \quad , & x_2 &= F_2(x_1) \\
x_3 &= F_1(x_2) \quad , & x_4 &= F_2(x_3) \\
x_5 &= F_1(x_4) \quad , & x_6 &= F_2(x_5) \\
&\vdots & &\vdots \\
x_{2n-1} &= F_1(x_{2n-2}) \quad , & x_{2n} &= F_2(x_{2n-1}) \\
x_{2n+1} &= F_1(x_{2n}) \quad , & x_{2n+2} &= F_2(x_{2n+1})
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $d(x_{2n}, x_1) = 1 - \dfrac{\alpha(x_{2n}, x_1)}{\lambda(x_{2n}, x_1)}$

ดังนั้น $d(x_{2n}, x_1) < 1 - \lambda(x_{2n}, F_1(x_{2n}))$

เมื่อ $r \leq 1$

ฉะนั้น $rd(x_{2n}, x_1) < 1 - \lambda(x_{2n}, F_1(x_{2n}))$

นั่นคือ $x_{2n} \in N(n, r)$

เพราะว่า $d(x_{2n+1}, x_1) = 1 - \dfrac{\alpha(x_{2n+1}, x_1)}{\lambda(x_{2n+1}, x_1)}$

นั่นคือ $d(x_{n+1}, x_1) < 1 - \lambda(x_{2n+1}, F_2(x_{2n+1}))$

เมื่อ $r \leq 1$

ฉะนั้น $rd(x_{2n+1}, x_1) < 1 - \lambda(x_{2n+1}, F_2(x_{2n+1}))$

นั่นคือ $x_{2n+1} \in N(n, r)$

พิจารณา

$$d(x_1,x_2) = d(F_1(x_0),F_2(x_1)) \leq \alpha(x_0,x_1)\left[d(x_0,F_1(x_0)) + d(x_1,F_2(x_1))\right]$$

$$\leq \alpha(x_0,x_1)d(x_0,x_1)+\alpha(x_0,x_1)d(x_1,x_2)$$

$$(1-\alpha(x_0,x_1))d(x_1, x_2) \leq \alpha(x_0,x_1)d(x_0, x_1)$$

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{\alpha(x_0,x_1)}{1-\alpha(x_0,x_1)} d(x_0,x_1)$$

เพื่อความสะดวกให้ $\alpha = \alpha(x_i,x_{i+1})$ สำหรับทุก ๆ $i=0,1,2,\ldots,n$

เพราะว่า $\alpha < \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\alpha + \alpha < 1$

นั่นคือ $\frac{\alpha}{1-\alpha} < 1$

เพื่อความสะดวกให้ $r = \frac{\alpha}{1-\alpha}$

ฉะนั้น $d(x_1, x_2) \leq r\, d(x_0, x_1)$

ในทำนองเดียวกัน $d(x_2, x_3) \leq r^2 d(x_0, x_1)$

ในกรณีทั่วไป $d(x_n, x_{n+1}) \leq r^n d(x_0, x_1)$

พิจารณา

$$d(x_n,x_{m+n}) \leq d(x_n,x_{n+1})+ d(x_{n+1},x_{n+2})+\ldots+d(x_{m+n-1},x_{m+n})$$

$$\leq r^n d(x_0,x_1)+ r^{n+1}d(x_0,x_1)+\ldots+r^{m+n-1}d(x_0,x_1)$$

$$< r^n\left[1 + r + r^2 + \ldots\right]d(x_0, x_1)$$

$$< \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1)$$

ค่าทางขวามือของอสมการข้างบนคอนเวอร์จไปยัง o เมื่อ $0 < r < 1$

ดังนั้น $\{x_n\}$ เป็นซีเควนซ์โคชีใน $X$

เพราะว่า $X$ คอมพลีท

ดังนั้น $\{x_n\}$ คอนเวอร์จไปยังจุด $x \varepsilon X$

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{F_2^{2n}(x_0)\} = \{x_{2n}\}$ ซึ่งเป็นสับซีเควนซ์ของ $\{x_n\}$ จะคอนเวอร์จไปยัง $y$

โดยความต่อเนื่องของ $F_1$, ซีเควนซ์ $\{F_1F_2^{2n}(x_0)\}$ คอนเวอร์จไปยัง $F_1(y)$

ดังนั้น $\{d(F_2^{2n}(x_0),F_1^{2n+1}(x_0))\}$ เป็นซีเควนซ์ลดลงของจำนวนจริงบาวด์ข้างล่างโดย o .

ดังนั้นสับซีเควนซ์ $\{F_2^{2n_k}(x_0)\}$ มีลิมิตที่จุด $y$,

ดังนั้นซีเควนซ์ $\{d(F_2^{2n}(x_0),F_1^{2n+1}(x_0))\}$ คอนเวอร์จ

ทุก ๆ สับซีเควนซ์ $\{d(F_2^{2n_k}(x_0),F_1^{2n_k+1}(x_0))\}$ และ
$\{d(F_1^{2n_k+1}(x_0), F_2^{2n_k+2}(x_0))\}$

คอนเวอร์จและมีลิมิตเดียวกัน คือ

$$d(y,F_1(y)) = \lim_{k\to\infty} d(F_1^{2n_k+1}(x_0),F_2^{2n_k+2}(x_0))$$

$$= \lim_{k\to\infty} d(F_1F_2^{2n_k}(x_0), F_1^2F_2^{2n_k}(x_0))$$

$$= d(F_1(y), F_1^2(y))$$

ในทำนองเดียวกัน

$$d(y, F_2(y)) = d(F_2(y), F_2^2(y))$$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อที่ 1

นั่นคือจะมี $z$ ซึ่ง $d(z, F_1(z)) = 0$ และ

$d(z, F_2(z)) = 0$