บทที่ 5

บทสรุป

จากการศึกษาทฤษฎีจุดคงที่ในเซมิ-เมตริกสเปซ จะพบว่าใน นิยาม 2.1 เราทราบว่าเงื่อนไขข้อที่ 2 ของเซมิ-เมตริกสเปซ คือ $d(x, x) = 0$ หรือ ถ้า $x = y$ แล้ว $d(x,y) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ เมื่อ d ในนิยาม 2.1 เพิ่มเงื่อนไขดังนี้ ถ้า $d(x,y) = 0$ แล้ว $x = y$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ คุณสมบัติในข้อที่ 2 จะเปลี่ยนเป็น $d(x,y) = 0$ ต่อเมื่อ $x = y$ ซึ่งก็หมายความว่า เมตริกสเปซเป็นเซมิ-เมตริกสเปซ แต่เซมิ-เมตริกสเปซไม่จำเป็นต้องเป็นเมตริกสเปซ

เนื่องจากเงื่อนไขข้อที่ 2 ของนิยาม 2.1 ของเซมิ-เมตริกสเปซ มีเพียงว่า $d(x, x) = 0$ เมื่อเราจะสรุปว่า $d(F(x), x) = 0$ ซึ่ง $F(x) \neq x$ เราขาดเงื่อนไขข้อที่ 2 ของนิยาม 2.1 ฉะนั้นเราจำเป็นต้องพิสูจน์ทฤษฎี 2.2 เพื่อนำมาช่วยโดยที่ทฤษฎี 2.2 กล่าวว่าให้ (X, d) เป็นเซมิ-เมตริกสเปซ และ $A \subset X$ แล้ว $d(x, A) = 0$ ต่อเมื่อ $x \in \bar{A}$ เมื่อ $d(x,A) = \inf \{d(x,a) \mid a \in A\}$ ดังนั้น $F(x) \in \overline{\{x\}}$ และจะได้ $d(F(x), \{x\}) = \inf \{d(F(x),x) \mid x \in \{x\}\} = 0$ นั่นคือ $d(F(x), x) = 0$ ฉะนั้นเงื่อนไขข้อที่ 2 ของเมตริกสเปซจึงเป็นเงื่อนไขที่ลดลง

การเรียบเรียงครั้งนี้ได้พิสูจน์ทฤษฎีทุกทฤษฎีเพื่อเน้นให้เห็นถึงการเปรียบเทียบความแตกต่างของวิธีการนำไปสู่ทฤษฎีจุดคงที่ในเซมิ-เมตริกสเปซกับทฤษฎีจุดคงที่ในเมตริกสเปซ ซึ่งเริ่มขึ้นจากทฤษฎีคอนแทรกชั่นของบานัค ซึ่งได้กล่าวไว้ว่าฟังชั่น F บนคอมพลีทเมตริกสเปซ (X, d) ไปยังคอมพลีทเมตริกสเปซ (X, d) ถ้าเป็นคอนแทรกชั่นโดยมีจำนวนจริง $\lambda \in [0,1)$ ซึ่ง $d(F(x), F(y)) \leq \lambda\, d(x, y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in X$ แล้วจะมี $x_0 \in X$ โดยที่ x_0 เป็นสมาชิกตัวหนึ่งและตัวเดียว (Unique) ซึ่งทำให้ $F(x_0) = x_0$

ฉะนั้นเมื่อเราเปลี่ยนคอมพลีทเมตริกสเปซมาเป็นคอมพลีทเซมิ-เมตริกสเปซ จะได้ผลสรุปว่าจะต้องมีจุดอย่างน้อย 1 จุด $x \in X$ สอดคล้องตาม $d(F(x), x) = 0$ และถ้า y เป็นจุดใด ๆ ใน X ซึ่งสอดคล้องกับ $d(F(y), y) = 0$ แล้ว $d(x, y) = 0$