

แนะนำ

วิชาตรรกศาสตร์เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับหลักการ และวิธีการของการให้เหตุผล โดยเราใช้หลักตรรกศาสตร์เป็นหลักเกณฑ์ในการตัดสินว่า ผลสรุปจากเหตุที่กำหนดให้ นั้น สมเหตุสมผลหรือไม่

ตรรกศาสตร์มาจากศัพท์สันสกฤต ตรก แปลว่า ตรึกตรอง นึกคิดและให้เหตุผล ดังนั้น ถ้าแปลตามศัพท์ตรรกศาสตร์ ก็หมายถึงวิชาว่าด้วยการใช้ความคิดและให้เหตุผล การศึกษาวิชาตรรกศาสตร์อาจจะกระทำการศึกษาได้ 2 ทาง ทางที่หนึ่ง คือ ศึกษาใน แนวทางที่เป็นสาขาหนึ่งของปรัชญา ทางที่สอง ศึกษาในแนวของวิทยาศาสตร์ของการให้ เหตุผล โดยยึดตรรกศาสตร์สัญลักษณ์เป็นหลัก

มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านลงความเห็น ว่า สัญลักษณ์เป็นเครื่องมือที่ดีที่สุด ที่สามารถแสดงให้เห็นถึงโครงสร้างของแบบแผนของการให้เหตุผลตามหลักตรรกศาสตร์ ทั้งนี้เพราะว่าสัญลักษณ์สามารถแสดงให้เห็นถึงโครงสร้างของแบบแผนของการให้เหตุผล ได้อย่างชัดเจนและแน่นอน

ดังนั้น ในการเขียนตำราเล่มนี้ เราจะศึกษาตรรกศาสตร์ในประการที่สอง คือ "ตรรกศาสตร์สัญลักษณ์" โดยมีจุดมุ่งหมายให้ผู้ศึกษาเข้าใจเกี่ยวกับการใช้แบบแผนของ การให้เหตุผลอย่างถูกต้องเป็นสิ่งสำคัญที่สุด ส่วนการเอาแบบแผนของการให้เหตุผล ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันหรือ ปัญหาในแขนงวิชาอื่นเป็นจุดมุ่งหมายรองถัดไป

ที่มา

ตรรกศาสตร์เป็นวิชาที่มีกำเนิดมานานกว่า 2000 ปีมาแล้ว ผู้ที่ให้กำเนิดแก่วิชา นี้ คือ อริสโตเติล (Aristotle) ซึ่งมีชีวิตอยู่ระหว่าง ปี 384 - 322 ก่อน คริสตศักราช อริสโตเติลเป็นผู้นำหลักเกณฑ์ของวิชานี้ และได้รวบรวมหลักของการให้

เหตุผลไว้เป็นจำนวนมาก ที่สำคัญได้แก่ หลักของการอนุมาน (Deduction) ซึ่งเป็นวิธีการพิสูจน์ทฤษฎีต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ โดยอาศัยกฎของอริสโตเติล 3 ข้อดังนี้

1. A is A (The Law of Identify)
2. Everything is either A or not A (The Law of Excluded Middle)
3. Nothing is both A and not A (The Law of Contradiction)

ในสมัยก่อนคริสต์ศตวรรษที่ 17 นั้น ตรรกศาสตร์ส่วนใหญ่เป็นเรื่องของปรัชญาและกฎหมาย ภาษาที่ใช้ในตรรกศาสตร์สมัยนั้นเป็นภาษาธรรมดา ซึ่งมีความหมายไม่ชัดเจน หรือรัดกุมเท่าภาษาสัญลักษณ์ เพื่อให้ตรรกศาสตร์เป็นวิชาที่มีหลักเกณฑ์แน่นอน ไม่คลุมเครือ แต่ชัดเจนและรัดกุม จึงได้มีการพัฒนาตรรกศาสตร์สมัยของอริสโตเติลให้เป็นตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (Symbolic Logic) หรือตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Logic) ซึ่งเป็นตรรกศาสตร์แผนปัจจุบันที่ใช้ภาษาสัญลักษณ์ โลบนิช

นักคณิตศาสตร์และนักภาษาศาสตร์ชาวเยอรมันเป็นคนแรกที่พัฒนาตรรกศาสตร์ดังกล่าว และได้สร้างสัจพจน์ของตรรกศาสตร์แบบที่ใช้ศึกษาในปัจจุบัน ในระหว่างปี ค.ศ. 1679 - 1690 นักคณิตศาสตร์คนสำคัญอื่น ๆ ที่มีส่วนในการพัฒนาวิชานี้ ได้แก่ ยอร์ชบูล (George Boole) เดอ มอร์แกน (De Morgan) แซนเดอร์ส เพียร์ซ (Sanders Peirce) กอททลอบ เฟรเก (Gottlob Frege) ปีอาโน (Peano) เดวิด ฮิลเบิร์ต (David Hilbert) และ พอล เบร์นัยส์ (Paul Bernays) นักคณิตศาสตร์เหล่านี้ได้พิมพ์ผลงานซึ่งเกี่ยวกับตรรกศาสตร์ขึ้นเผยแพร่ โดยมีจุดมุ่งหมาย 2 ประการ คือ

1. เพื่อพัฒนาระบบตรรกศาสตร์และรวบรวมหลักของการให้เหตุผลที่ถูกต้อง หรือสมเหตุสมผล
2. เพื่อนำความรู้ทางตรรกศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับรากฐานของคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นการปรับปรุงรากฐานของคณิตศาสตร์ให้มั่นคงยิ่งขึ้น

ในต้นคริสต์ศตวรรษที่ 20 ได้เกิดกลุ่มปรัชญาทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ 3 กลุ่ม คือ

1. Logicism มี ไวท์เฮด (Whitehead) และ รัสเซลล์ (Russell)

เป็นหัวหน้า

2. Formalism มี ฮิลเบิร์ต (Hilbert) เป็นหัวหน้า

3. Intuitionism มี บราวเวอร์ (Brouwer) เป็นหัวหน้า

ในที่นี้จะขอกล่าวถึงกลุ่ม Logicism

Logicism เป็นปรัชญาคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่สุดปรัชญาหนึ่งในสมัยปัจจุบัน นักคณิตศาสตร์กลุ่มที่ยึดถือปรัชญานี้ ได้เน้นถึงความสำคัญของตรรกศาสตร์ว่า เป็นวิชาที่ทำให้กำเนิดแก่วิชาคณิตศาสตร์ยิ่งกว่าเป็นเพียงเครื่องมือของคณิตศาสตร์ และกล่าวว่าคณิตศาสตร์เป็นแขนงหนึ่งของตรรกศาสตร์เท่านั้น เพราะสามารถเปลี่ยนสิ่งกับและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ทั้งหมดให้เป็นสิ่งกับและทฤษฎีทางตรรกศาสตร์ได้ ผลงานของนักคณิตศาสตร์กลุ่มนี้ปรากฏอย่างเด่นชัดในหนังสือ "Principia Mathematica" ของไวท์เฮดและรัสเซลล์ ซึ่งแต่งขึ้นโดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อวางรากฐานของคณิตศาสตร์ให้มั่นคงยิ่งขึ้น

คณิตศาสตร์เป็นระบบนามธรรมซึ่งประกอบด้วยคำนิยาม (Undefined words) คำที่ให้นิยาม (Defined words) และประพจน์ (Proposition) 2 ชนิด ได้แก่ กติกา (Postulates) หรือ Axioms ซึ่งเป็นประพจน์ที่เรายอมรับหรือสมมติว่าเป็นจริง โดยไม่ต้องพิสูจน์ และทฤษฎีซึ่งเป็นประพจน์ที่เราพิสูจน์ได้ว่าเป็นจริง โดยอาศัยกติกาและหลักของการให้เหตุผลทางตรรกศาสตร์ การขยายตัวของคณิตศาสตร์แผนปัจจุบัน ซึ่งก่อให้เกิดแขนงวิชาใหม่ทางคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้นเป็นจำนวนมากนั้น เนื่องมาจากการขยายเขตของกติกา และการสร้างทฤษฎีใหม่ ๆ โดยการหาผลสรุปของตรรกศาสตร์ (Logical Consequence) ซึ่งสรุปได้จากเขตของกติกา และทฤษฎีอื่นที่มีอยู่เดิม ด้วยเหตุนี้ ตรรกศาสตร์จึงมีความสำคัญต่อคณิตศาสตร์เป็นอันมาก

เนื้อหา

คู่มือประกอบการสอนเล่มนี้เป็นตำราสำหรับค้นคว้าและประกอบการสอนวิชาตรรกศาสตร์ ระบาย ปีที่ 1, 2 ในมหาวิทยาลัย เพื่อที่จะนำไปเป็นพื้นฐานการวิเคราะห์หลักเกณฑ์ของการให้เหตุผลในวิชาคณิตศาสตร์ชั้นสูงเป็นสิ่งสำคัญ ในบทที่ 2 จะเริ่มศึกษาชนิดของประโยคที่เป็นประพจน์ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนประพจน์เหล่านั้น นิยามตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์สำหรับประพจน์เชิงประกอบ พร้อมทั้งสร้างสัญลักษณ์แทน

สุดท้ายของบทเป็นการกำหนดสัจพจน์สำหรับพิจารณาค่าความจริงของประพจน์เชิงประกอบ

บทที่ 3 สร้างสูตรจากสัญลักษณ์และตัวเชื่อมที่ได้ในบทที่ 2 สำหรับแทนค่ากล่าวที่ยาว และทำการวิเคราะห์ค่าความจริงของสูตรเหล่านั้นด้วยวิธีการวาง โดยอาศัยสัจพจน์ที่กำหนดมาแล้ว

บทที่ 4 พิจารณาสูตรที่เป็นจริงทุกกรณี (tautology) ด้วยวิธีการต่าง ๆ แต่จะเน้นวิธีเขียนตาราง เพื่อที่จะนำสูตรที่ได้ไปเป็นทฤษฎี สำหรับสรุปความสมเหตุสมผลต่อไป

บทที่ 5 สร้างกฎเกณฑ์ในการพิสูจน์ argument โดยอาศัยทฤษฎีที่ได้จากบทที่ 4 กฎเกณฑ์เหล่านี้จะนำมาสรุปความสมเหตุสมผลของ argument ต่าง ๆ

และสูตรแทนการเขียนตาราง

บทที่ 6 เป็นกำหนดสัญลักษณ์เพิ่มเติมเพื่อใช้แทนวลีบอกปริมาณ (quantifier) และแทนชนิดของคำพูดที่เป็น quantifier statement สร้างสูตรสำหรับแทนคำพูดทั่วไป (formula of predicate calculus) และหาค่าความจริงของสูตรที่ได้โดยอาศัยตาราง พิจารณาสูตรที่เป็น tautology มาเป็นกฎเกณฑ์ในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของ formula of predicate calculus และคำพูดต่าง ๆ

บทที่ 7 เป็นบทประยุกต์ทฤษฎีและกฎเกณฑ์ต่าง ๆ ที่ได้จากบทที่ 5 และบทที่ 6 มาใช้ในการพิสูจน์วิชาคณิตศาสตร์ โดยยกเป็นวิธีต่าง ๆ ถึง 8 วิธี

บทที่ 8 เป็นบทสรุป

โครงสร้างของเนื้อหาในเล่ม ผู้เขียนได้สร้างความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

