บทที่ 4

การวิเคราะห์ค่าความจริงด้วยตาราง (Sementical Treatment)

<u>Tautology</u> (Logical True Formulas)

จากบทที่ 3 เมื่อกำหนดประพจน์เชิงประกอบมาให้ เราสามารถให้สัญญลักษณ์ที่ถูกต้องได้ และมีวิธีการวิเคราะห์หาค่าความจริงของประพจน์นั้นด้วยการสร้างตารางค่าความจริง (Truth Table) ค่าความจริงของประพจน์แต่ละชนิดขึ้นอยู่กับ ค่าความจริงของ prime components ในแต่ละกรณี แต่เมื่อวิเคราะห์ค่าความจริงของ prime components ในแต่ละกรณีแล้ว ค่าความจริงของสูตรนั้นจะเป็นจริงเสมอ สูตรประเภทนี้เป็นสูตรที่เราสนใจมากที่สุด เพราะบางสูตรใช้เป็นทฤษฎีในการให้เหตุผลในบทต่อไป บทนี้เราจะวิเคราะห์หาสูตรเหล่านี้ด้วยตารางค่าความจริง และเรียกวิธีวิเคราะห์สูตรนี้ว่า Sementical Treatment

ก. จงพิจารณาค่าความจริงของสูตร $P \vee \sim P$

P	$P \vee \sim P$
T	T $\boxed{\text{T}}$ F
F	F $\boxed{\text{T}}$ T

ดังนั้น จะเห็นได้ว่าค่าความจริงของสูตร $P \vee \sim P$ เป็นจริงทุกกรณี

ข. จงพิจารณาค่าความจริงของสูตร $(P \wedge Q) \rightarrow P$

P	Q	$P \wedge Q \rightarrow P$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่าค่าความจริงของสูตร $P \wedge Q \rightarrow R$ จะเป็นจริงทุกกรณี เช่นกัน และจะเรียกสูตรที่ให้ค่าความจริงแบบตัวอย่าง ก. และ ข. นี้ว่า Valid Formula หรือ Tautology ซึ่งจะให้นิยามดังนี้

<u>นิยาม</u> สูตร A ซึ่งประกอบด้วย prime components $P_1, P_2, \ldots, P_n$ เป็น "Tautology หรือ Logical True Formula หรือ Valid Formula" ก็ต่อเมื่อ A มีค่าความจริงทุกกรณีที่เราแทนค่าความจริงใน $P_1, P_2, \ldots, P_n$

เมื่อ A เป็น Tautology เราจะเขียนแทน A ด้วย "$\models A$"

<u>ตัวอย่าง 1</u> จงแสดงว่าสูตร $\sim P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow Q$ เป็น Tautology หรือไม่

P	Q	$\sim P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow Q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า ถ้าแทน prime component P และ Q ด้วย T แล้ว สูตร $\sim P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow Q$ เป็น F

ดังนั้น สูตรนี้จึงไม่เป็น Tautology

ตัวอย่าง 2 จงแสดงว่าสูตร $(P \vee Q) \wedge \sim P \rightarrow Q$ เป็น Tautology หรือไม่

P	Q	$(P \vee Q) \wedge \sim P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

จากตารางแสดงว่าสูตรนี้เป็น Tautology และอาจเขียนสูตรได้ดังนี้

$\models (P \vee Q) \wedge \sim P \rightarrow Q$

Tautology ที่สำคัญได้แก่

1. <u>Tautological Disjunction</u>

$\models P \vee \sim P$

สูตรใด ๆ ที่มีแบบแผนอยู่ในรูปแบบเดียวกันนี้จะเป็น Tautology ด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> สูตรต่อไปนี้เป็น Tautology

ก. $(P \wedge Q) \vee [\sim (P \vee Q)]$

ข. $(P \rightarrow Q) \vee [\sim (P \rightarrow Q)]$

ค. $(\sim P \vee Q) \vee [\sim (\sim P \vee Q)]$

ง. $(\sim P \vee Q) \vee (P \wedge \sim Q)$

<u>ตัวอย่าง</u> คำกล่าวต่อไปนี้เป็นจริงเสมอ

ก. ฉันอาจจะอยู่บ้านหรืออาจจะไม่อยู่บ้าน

ข. ฝนอาจจะตกหรืออาจจะไม่ตก

ค. ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น $x > 0$ หรือ $x \ngtr 0$

ง. (ถ้า $x = y$ แล้ว $x = 0$) หรือ ($x = y$ และ $x \neq 0$) เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริง

2. <u>Tautological Implication</u>

1. $\models (P \wedge Q) \rightarrow P$
2. $\models P \rightarrow (P \vee Q)$
3. $\models [(P \rightarrow Q) \wedge P] \rightarrow Q$
4. $\models [(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q] \rightarrow \sim P$
5. $\models [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$
6. $\models [(P \vee Q) \wedge \sim P] \rightarrow Q$
7. $\models \{[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \wedge [P \vee R]\} \rightarrow Q$
8. $\models \{[(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)] \wedge [P \vee R]\} \rightarrow (Q \vee S)$

สูตรใด ๆ ที่อยู่ในรูปแบบเดียวกันนี้ เป็น Tautological Implication ด้วย

ตัวอย่าง สูตรต่อไปนี้เป็น Tautological Implication ที่อยู่ในรูปแบบ $\vDash (P \wedge Q) \rightarrow P$

ก. $[(P \rightarrow Q) \wedge R] \rightarrow (P \rightarrow Q)$

ข. $[(P \vee Q) \wedge (S \wedge T)] \rightarrow (P \vee Q)$

ค. $[(P \leftrightarrow Q) \wedge R] \rightarrow (P \leftrightarrow Q)$

ง. $[(\sim P \wedge Q) \wedge (Q \vee R)] \rightarrow (\sim P \wedge Q)$

ตัวอย่าง ประพจน์เชิงประกอบต่อไปนี้เป็น Tautological Implication

ก. ถ้าสมศักดิ์อยู่บ้านแล้วเขาจะทำการบ้าน และถ้าเขาทำการบ้านแล้วเขาจะสอบได้ ดังนั้น ถ้าสมศักดิ์อยู่บ้านแล้วเขาจะสอบได้

ข. ถ้าอนงค์มีเวลาแล้ว อนงค์จะไปว่ายน้ำ แต่อนงค์ไม่ได้ไปว่ายน้ำ ดังนั้น อนงค์ไม่มีเวลา

ค. $x = 0$ หรือ $y = 0$ แต่ $x \neq 0$ ดังนั้น $y = 0$

3. Tautological Bicondition

1. $\vDash P \leftrightarrow \sim(\sim P)$
2. $\vDash \sim(P \wedge Q) \leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$
3. $\vDash \sim(P \vee Q) \leftrightarrow \sim P \wedge \sim Q$
4. $\vDash \sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow P \wedge \sim Q$
5. $\vDash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)]$
6. $\vDash (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$
7. $\vDash [(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)] \leftrightarrow [P \rightarrow (Q \wedge R)]$
8. $\vDash [P \wedge (Q \vee R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$
9. $\vDash [P \vee (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$

<u>ตัวอย่าง</u> ประพจน์เชิงประกอบที่เป็น Tautological Bicondition

ก. วันนี้เป็นวันจันทร์ก็ต่อเมื่อไม่เป็นความจริงที่ว่าวันนี้ไม่ใช่วันจันทร์

ข. $2 \ngtr 1$ หรือ $3 + 7 \neq 9$ ก็ต่อเมื่อไม่เป็นความจริงที่ว่า $2 > 1$ และ $3 + 7 = 9$

<u>Logical False Formulas</u>

พิจารณาค่าความจริงจากสูตรต่อไปนี้

ก. $P \wedge \sim P$

P	$P \wedge \sim P$		
T	T	F	F
F	F	F	T

ข. $(P \vee Q) \leftrightarrow \sim (\sim P \rightarrow Q)$

P	Q	$(P \vee Q) \leftrightarrow \sim (\sim P \rightarrow Q)$			
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	F	T	F

จากการวิเคราะห์ค่าความจริงของสูตรทั้งสอง จะพบว่าค่าความจริงของสูตรเป็นเท็จหมดทุกกรณี เราเรียกสูตรเหล่านี้ว่า Logical False Formulas เป็นสูตรที่ได้มาจากการให้ Negation แก่ Tautology สูตรเหล่านี้ไม่ค่อยมีความสำคัญเท่าใดนัก จึงเพียงแต่แนะนำให้รู้จักเท่านั้น

<u>นิยาม</u> สูตร A ซึ่งประกอบด้วย prime components $P_1, P_2, \ldots, P_n$ เป็น Logical False Formula ก็ต่อเมื่อ A มีค่าเท็จทุกกรณีที่เราแทนค่าความจริงใน $P_1, P_2, \ldots, P_n$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่าสูตร $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q$ เป็น Logical True Formula หรือ Logical False Formula หรือ Synthetic (ไม่ Logical True Formula และไม่ Logical False Formula)

P	Q	$(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

ดังนั้น สูตรนี้เป็น Synthetic

<u>Logical Equivalence</u>

พิจารณา Tautology Bicondition

ก. $\models P \leftrightarrow \sim(\sim P)$

P	$P \leftrightarrow \sim(\sim P)$
T	T T
F	F F

ข. $\models \sim (P \wedge Q) \leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$

P	Q	$\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow \sim P \vee \sim Q$	
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

จาก Tautology Bicondition ทั้งสองนี้จะพบว่า ประกอบด้วยสูตรย่อย 2 สูตร ซึ่งเชื่อมด้วย ↔ และสูตรทั้งสองนี้จะมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี กรณีต่อกรณี สูตรเหล่านี้สามารถใช้แทนกันได้ คำกล่าวทางคณิตศาสตร์ของทฤษฎีหรือนิยาม มักจะใช้แบบแผนของสูตรเหล่านี้ ซึ่งเราจะเรียกสูตรทั้งสองที่ให้ค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี กรณีต่อกรณีนี้ว่าเป็นสูตรที่ Logical Equivalent กัน

<u>นิยาม</u> สูตร A และสูตร B ซึ่งประกอบด้วย prime components P_1, P_2, ..., P_n เป็นสูตรที่ Logical Equivalence กัน ก็ต่อเมื่อ A และ B มีค่าความจริงในตารางแสดงค่าความจริง เหมือนกันทุกกรณี กรณีต่อกรณี สำหรับทุกกรณีที่เราแทนค่าความจริงลงในทุก prime components P_1, P_2, ..., P_n

เมื่อ A และ B เป็นสูตรที่ Logical Equivalence เราเขียนว่า A eq B อ่านว่า A equivalent กับ B

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า $P \rightarrow Q$ eq $\sim P \vee Q$ หรือไม่

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim P \vee Q$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

ดังนั้น แสดงว่า $P \rightarrow Q$ eq $\sim P \vee Q$

Logical Equivalence ที่สำคัญ

1. $\sim(\sim P)$ eq P
2. $\sim(P \wedge Q)$ eq $\sim P \vee \sim Q$
3. $\sim(P \vee Q)$ eq $\sim P \wedge \sim Q$
4. $\sim(P \rightarrow Q)$ eq $P \wedge \sim Q$
5. $P \leftrightarrow Q$ eq $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
6. $P \rightarrow Q$ eq $\sim Q \rightarrow \sim P$
7. $P \wedge (Q \vee R)$ eq $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
8. $P \vee (Q \wedge R)$ eq $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
9. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ eq $P \rightarrow (Q \wedge R)$
10. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ eq $(P \wedge Q) \rightarrow R$

Logical Equivalence เบื้องต้นที่สำคัญต่อการพิสูจน์

1. $P \vee P$ eq P
2. $P \wedge P$ eq P
3. $P \wedge Q$ eq $Q \wedge P$
4. $P \vee Q$ eq $Q \vee P$
5. $P \vee (Q \vee R)$ eq $(P \vee Q) \vee R$
6. $P \wedge (Q \wedge R)$ eq $(P \wedge Q) \wedge R$
7. $P \leftrightarrow Q$ eq $Q \leftrightarrow P$

การพิจารณาประพจน์เชิงประกอบที่มีความหมายเหมือนกันในเชิงตรรกศาสตร์

จงพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

__ตัวอย่าง 1__ จงพิจารณาประพจน์ $5 + 2 = 7$

Negation ของ $5 + 2 = 7$ คือ $5 + 2 \neq 7$

Negation ของ $5 + 2 \neq 7$ คือ $5 + 2 = 7$

ดังนั้น Negation ของ Negationของข้อ $5 + 2 = 7$ คือ $5 + 2 = 7$

จึงสรุปได้ว่า ไม่ว่าเราจะตั้งสมมติฐานว่า $5 + 2 = 7$ จริงหรือเท็จ Negation ของ Negation ของ $5 + 2 = 7$ จะมีความหมายเหมือน $5 + 2 = 7$ อยู่นั่นเอง

<u>ตัวอย่าง 2</u> เมื่อเราพูดว่า Negation ของ "$a = 0$ และ $b = 0$" เราพิจารณาได้ 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ Negation ของ $a = 0$ และ $b = 0$ เป็นจริง ดังนั้น $a = 0$ และ $b = 0$ เป็นเท็จ นั่นคือ $a = 0$ เป็นเท็จ หรือไม่ก็ $b = 0$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น $a \neq 0$ เป็นจริง หรือไม่ก็ $b \neq 0$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ เป็นจริง

กรณีที่ 2 ให้ Negation ของ $a = 0$ และ $b = 0$ เป็นเท็จ ดังนั้น $a = 0$ และ $b = 0$ เป็นจริง นั่นคือ $a = 0$ เป็นจริง และ $b = 0$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น $a \neq 0$ เป็นเท็จ และ $b \neq 0$ เป็นเท็จ

สรุปได้ว่า $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ เป็นเท็จ

นั่นคือ ไม่ว่าจะตั้งสมมติฐานอย่างไร Negation ของ $a = 0$ และ $b = 0$ มีความหมายเหมือนกับ $a \neq 0$ หรือ $b \neq 0$ เสมอ

<u>ตัวอย่าง 3</u> เมื่อเราพูดว่า Negation ของ $x > 0$ หรือ $x < 0$ เราจะพิจารณาความหมายได้ 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ให้ Negation ของ $x > 0$ หรือ $x < 0$ เป็นจริง ดังนั้น $x > 0$ หรือ $x < 0$ เป็นเท็จ นั่นคือ $x > 0$ เป็นเท็จ และ $x < 0$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น $x \not> 0$ เป็นจริง และ $x \not< 0$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $x \not> 0$ และ $x \not< 0$ เป็นจริง

กรณีที่ 2 ให้ Negation ของ $x > 0$ หรือ $x < 0$ เป็นเท็จ ดังนั้น $x > 0$ หรือ $x < 0$ เป็นจริง นั่นคือ $x > 0$ เป็นจริงหรือไม่ก็ $x < 0$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น $x \not> 0$ เป็นเท็จ หรือไม่ก็ $x \not< 0$ เป็นเท็จ

สรุปได้ว่า $x \not> 0$ และ $x \not< 0$ เป็นเท็จ

นั่นคือ ไม่ว่าจะตั้งสมมติฐานอย่างไร Negation ของ $x > 0$ หรือ $x < 0$ จะมีความหมายเหมือนกับ $x \ngtr 0$ และ $x \nless 0$

จากตัวอย่างทั้ง 3 นี้ ถ้าเราจะแทนประพจน์ด้วย prime components P, Q และคำว่า "มีความหมายเหมือนกับ" ด้วย equivalent เราจะได้สูตรดังนี้

1. $\sim (\sim P)$ eq P

2. $\sim (P \wedge Q)$ eq $\sim P \vee \sim Q$

3. $\sim (P \vee Q)$ eq $\sim P \wedge \sim Q$

ดังนั้น เราพอจะสรุปได้ว่า ถ้าเราสร้างประพจน์เชิงประกอบที่มีความหมายเหมือนกันอีก ในเชิงตรรกศาสตร์และแทนประพจน์เชิงประกอบด้วยสูตรที่เหมาะสมแล้ว สูตรทั้งสองนั้นจะ equivalent กัน นั่นคือ เราสามารถให้นิยามประพจน์เชิงประกอบขึ้นใหม่ดังนี้

<u>นิยาม</u> ประพจน์เชิงประกอบ A และ B จะมีความหมายอย่างเดียวกันในเชิงตรรกศาสตร์ ก็ต่อเมื่อ สูตรที่เหมาะสมสำหรับ A eq สูตรที่เหมาะสมสำหรับ B

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาคำกล่าว "ถ้า a^2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่"

เราแทนค่า prime components ด้วยประพจน์ดังนี้

P : a^2 เป็นจำนวนคู่

Q : a เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น สูตรที่เหมาะสมสำหรับคำกล่าวนี้ คือ $P \rightarrow Q$

เนื่องจาก $P \rightarrow Q$ eq $\sim Q \rightarrow \sim P$

ดังนั้น คำกล่าวที่มีความหมายอย่างเดียวกับคำกล่าวที่เราพูดถึงนี้ในเชิงตรรกศาสตร์ ก็คือ "ถ้า a ไม่เป็นจำนวนคู่แล้ว a^2 ไม่เป็นจำนวนคู่"

<u>ตัวอย่าง</u> "ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วก็ต่อเมื่อ ABC มีมุมเท่ากันสองมุม"

ให้ prime component P แทน ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

Q แทน ABC มีมุมเท่ากันสองมุม

ดังนั้น สูตรที่เหมาะสมสำหรับคำกล่าวนี้ คือ $P \leftrightarrow Q$

เพราะว่า $P \leftrightarrow Q$ eq $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

ฉะนั้น คำกล่าวที่มีความหมายอย่างเดียวกับคำกล่าวข้างต้นนี้ คือ

ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วแล้ว ABC มีมุมเท่ากันสองมุม และถ้า ABC มีมุมเท่ากันสองมุมแล้ว ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

<u>หมายเหตุ</u> ให้ P และ Q เป็นสูตรใด ๆ

1. P eq Q เป็นประพจน์โดยที่

   $\sim (P \vee Q)$ eq $\sim P \wedge \sim Q$ เป็นประพจน์จริง

   $\sim (P \vee Q)$ eq $\sim P \vee \sim Q$ เป็นประพจน์เท็จ

   ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับ

   $\vDash P \quad \vDash Q \quad \vDash P \vee Q \quad \vDash P \leftrightarrow Q$ เป็นประพจน์

   ให้ค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จเพียงกรณีเดียวเท่านั้น

2. P eq Q ก็ต่อเมื่อ $\vDash P \leftrightarrow Q$

3. $\vDash (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P$ eq $Q)$

4. P eq Q ก็ต่อเมื่อ $\sim P$ eq $\sim Q$

จากข้อ 2 ถึง 4 เราสามารถพิสูจน์เป็นทฤษฎีได้ แต่เราจะไม่พิสูจน์ในที่นี้ ผู้ที่สนใจค้นเพิ่มเติมได้จากหนังสือ "Sets Logic and Axiomatic" ของ Robert R. Stoll

<u>Conjunctive Normal Form</u>

ลองพิจารณา Logical Equivalence ต่อไปนี้

ก. $P \rightarrow Q$ eq $\sim P \vee Q$

ข. $P \wedge Q$ eq $\sim (\sim P \vee \sim Q)$

ค. $P \leftrightarrow Q$ eq $\sim \{\sim (\sim P \vee Q) \vee \sim (P \vee \sim Q)\}$

จาก Logical Equivalence ข้างบนนี้ แสดงให้เห็นว่า เราสามารถเขียนสูตรทุกสูตรของพีชคณิตของประพจน์ ให้อยู่ในรูปของสูตรซึ่งใช้ prime components และสัญลักษณ์ $\sim, \vee$ ได้

ง. $P \vee Q$ eq $\sim (\sim P \wedge \sim Q)$

จ. $P \rightarrow Q$ eq $\sim (P \wedge \sim Q)$

ฉ. $P \leftrightarrow Q$ eq $\sim (P \wedge \sim Q) \wedge \sim (\sim P \wedge Q)$

จาก Logical Equivalence ง, จ และ ฉ แสดงให้เห็นว่า เราสามารถเขียนสูตรทุกสูตรของพีชคณิตของประพจน์ ให้อยู่ในรูปของสูตรที่ใช้ prime components และสัญลักษณ์ $\sim, \wedge$ ได้

จากข้อ ก ถึง ฉ แสดงให้เห็นว่า เราสามารถเขียนสูตรทุกสูตรของพีชคณิตของประพจน์ให้อยู่ในรูปของสูตรซึ่งใช้ prime components และสัญลักษณ์ $\sim, \vee, \wedge$ ได้

ดังนั้น ในเนื้อหาต่อไปนี้ จะศึกษาเกี่ยวกับการเปลี่ยนตัวเชื่อม $\sim, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ของสูตรต่าง ๆ ให้เหลือตัวเชื่อมเพียง $\sim, \vee, \wedge$ เท่านั้น โดยมีเป้าหมายที่สำคัญ 2 ประการ คือ ประการแรก ต้องการนำสูตรที่ประกอบด้วย prime components และตัวเชื่อม $\sim, \vee, \wedge$ ไปพิจารณาความสมเหตุสมผล (Valid Consequence) ของสูตรที่กำหนดให้ ซึ่งเป็นวิธีพิจารณาอีกวิธีหนึ่ง นอกเหนือจากการใช้ตารางแสดงค่าความจริง ประการที่สอง ต้องการให้มีความสามารถในการเปลี่ยนสูตรหรือประพจน์เชิงประกอบได้หลาย ๆ แบบ เพื่อเลือกแบบที่ง่ายและเหมาะสมไปใช้ในการพิสูจน์ต่อไป

พิจารณา นิยาม Conjunction และ Disjunction ของสูตรใหม่ดังนี้

ให้สูตร A ประกอบด้วย prime components $P_1, P_2, \ldots, P_n$ เราจะเรียก A ว่า เป็น Conjunction ของ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ก็ต่อเมื่อ A เขียนอยู่ในรูป $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots \wedge P_n$ และจะเรียก $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ว่าเป็น Conjuncts ของ Conjunction $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \ldots \wedge P_n$

จะเรียกสูตร A ว่า Disjunction ของ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ก็ต่อเมื่อ A เขียนอยู่ในรูป $P_1 \vee P_2 \vee P_3 \ldots \vee P_n$ และเรียก $P_1, P_2 \ldots, P_n$ ว่า Disjuncts ของ Disjunction $P_1 \vee P_2 \vee P_3 \ldots \vee P_n$

พิจารณาสูตร A ซึ่งเขียนอยู่ในรูป $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q$

เพราะว่า $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q$ eq $(\sim P \vee Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q$

eq $\sim[(\sim P \vee Q) \wedge \sim P] \vee \sim Q$

$$\text{eq } \sim(\sim P \vee Q) \vee \sim(\sim P) \vee \sim Q$$
$$\text{eq } (P \wedge \sim Q) \vee P \vee \sim Q$$
$$\text{eq } (P \vee P \vee \sim Q) \wedge (\sim Q \vee P \vee \sim Q)$$
$$\text{eq } (P \vee \sim Q) \wedge (\sim Q \vee P)$$

จากตัวอย่างนี้แสดงว่า เราสามารถเขียนสูตร A ให้อยู่ในรูปของ 2 Disjunction ของ P, Q ซึ่งแต่ละ Disjunction เชื่อมด้วย Conjunction หรือเราอาจจะอธิบายได้อีกอย่างหนึ่งว่า สูตร A สามารถเขียนเป็นรูป Conjunction ของ P และ Q ได้ โดยที่แต่ละ Conjuncts เป็น Disjunction ของ P และ Q ซึ่งเราเรียกสูตรที่มีแบบแผนเช่นนี้ว่า "Conjunctive normal form"

<u>นิยาม</u> สูตร A ประกอบด้วย prime components $P_1, P_2, \ldots, P_n$ อยู่ในรูปของ Conjunctive normal form ก็ต่อเมื่อ A เป็น Conjunction ซึ่งทุก ๆ Conjuncts เป็น Disjunction ของ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ หรือ $\sim P_1, \sim P_2, \ldots, \sim P_n$

<u>ตัวอย่าง</u> สูตรที่เป็น Conjunction normal form

1. $(P \vee Q \vee \sim R) \wedge (\sim P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$
   อยู่ในรูป Conjunctive normal form
2. $(P \vee Q \vee \sim R) \wedge \sim(\sim P \vee \sim Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$
   ไม่อยู่ในรูป Conjunctive normal form เพราะว่ามี ~ อยู่หน้าวงเล็บกลาง
3. $(P \vee Q \vee \sim R) \wedge (\sim P \vee R) \wedge (P \vee Q \vee R)$
   ไม่อยู่ในรูป Conjunctive normal form เพราะว่า วงเล็บกลางขาด Q

<u>ตัวอย่าง</u> จงจัดสูตร $(P \vee Q \vee R) \wedge \sim P \wedge \sim Q \rightarrow R$ ให้อยู่ในรูป Conjunctive normal form

<u>วิธีทำ</u> ให้ $(P \vee Q \vee R) \wedge \sim P \wedge \sim Q \rightarrow R$ แทนด้วย A

เพราะฉะนั้น A eq $\sim [(P \vee Q \vee R) \wedge \sim P \wedge \sim Q] \vee R$

eq $\sim (P \vee Q \vee R) \vee \sim (\sim P) \vee \sim (\sim Q) \vee R$

eq $(\sim P \wedge \sim Q \wedge \sim R) \vee (P \vee Q \vee R)$

eq $(\sim P \vee P \vee Q \vee R) \wedge (\sim Q \vee P \vee Q \vee R) \wedge$

$(\sim R \vee P \vee Q \vee R)$

ดังนั้น เราสามารถจัดสูตร A ให้อยู่ในรูปของ Conjunctive normal form ได้

Disjunctive normal form

พิจารณาสูตร $\sim [(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q]$ สมมติให้เป็น A

เพราะว่า A eq $\sim [(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q]$

eq $\sim \{\sim [(P \rightarrow Q) \wedge \sim P] \vee \sim Q\}$

eq $\sim \{\sim [(\sim P \vee Q) \wedge \sim P] \vee \sim Q\}$

eq $\sim [\sim (\sim P \vee Q) \vee P \vee \sim Q]$

eq $\sim [(P \wedge \sim Q) \vee P \vee \sim Q]$

eq $\sim (P \wedge \sim Q) \wedge \sim P \wedge Q$

eq $(\sim P \vee Q) \wedge \sim P \wedge Q$

eq $(\sim P \wedge \sim P \wedge Q) \vee (Q \wedge \sim P \wedge Q)$

eq $(\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q)$

จากตัวอย่างนี้แสดงว่า เราสามารถเขียนสูตร A ให้อยู่ในรูปของ 2 Conjunction ซึ่งทั้ง 2 Conjunction เชื่อมด้วย Disjunction หรือเราอาจจะอธิบายได้อีกอย่างหนึ่งว่า สูตร A สามารถเขียนอยู่ในรูปของ Disjunction P, Q ซึ่งแต่ละ Disjuncts เป็น Conjunction ของ P และ Q เราจะเรียกสูตรที่มีแบบแผนอย่างนี้ว่า "Disjunctive normal form"

<u>นิยาม</u> สูตร A ซึ่งประกอบด้วย prime components $P_1, P_2, \ldots, P_n$ อยู่ในรูปของ Disjunctive normal form ก็ต่อเมื่อ A เป็น Disjunction ซึ่งทุก ๆ

Disjuncts เป็น Conjunction ของ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ หรือ $\sim P_1, \sim P_2, \ldots, \sim P_n$

ตัวอย่าง สูตรที่เป็น Disjunctive normal form

1. $(P \wedge Q \wedge \sim R) \vee (\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

   อยู่ในรูปของ Disjunctive normal form

2. $(P \wedge Q \wedge \sim R) \vee \sim(\sim P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

   ไม่อยู่ในรูปของ Disjunctive normal form เพราะว่ามี $\sim$ อยู่หน้าวงเล็บกลาง

3. $(P \wedge Q \wedge \sim R) \vee (\sim P \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

   ไม่อยู่ในรูปของ Disjunctive normal form เพราะว่า วงเล็กกลางขาด Q

ตัวอย่าง จงจัด $\sim \{(P \rightarrow Q) \rightarrow [(R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow Q)]\}$ ให้อยู่ในรูปของ Disjunctive normal form

วิธีทำ ให้ $\sim \{(P \rightarrow Q) \rightarrow [(R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow Q)]\}$ แทนด้วย A

เพราะว่า A eq $\sim [\sim P \vee Q \rightarrow (\sim R \vee P \rightarrow \sim R \vee Q)]$

eq $\sim [\sim (\sim P \vee Q) \vee \sim (\sim R \vee P) \vee (\sim R \vee Q)]$

eq $(\sim P \vee Q) \wedge (\sim R \vee P) \wedge \sim (\sim R \vee Q)$

eq $(\sim P \vee Q) \wedge [(\sim R \vee P) \wedge (R \wedge \sim Q)]$

eq $(\sim P \vee Q) \wedge [(\sim R \wedge R \wedge \sim Q) \vee (P \wedge R \wedge \sim Q)]$

eq $(\sim P \vee Q) \wedge (P \wedge R \wedge \sim Q)$

eq $(\sim P \wedge P \wedge R \wedge \sim Q) \vee (Q \wedge P \wedge R \wedge \sim Q)$

เพราะฉะนั้น เราสามารถจัดสูตรให้อยู่ในรูปของ Disjunctive normal form ได้

การพิจารณา tautology ของสูตรใด ๆ โดยพิจารณาจาก Conjunctive normal form และ Disjunctive normal form

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาสูตร $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q$ เป็น tautology หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q$ eq $(P \vee \sim Q) \wedge (\sim Q \vee P)$

จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าสูตรนี้ไม่เป็น Tautology เพราะถ้าแทน P ด้วย F และแทน Q ด้วย T แล้วสูตรเป็น F

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาสูตร $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge \sim Q \rightarrow P \wedge R$ เป็น tautology หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge \sim Q \rightarrow P \wedge R$ eq

$(\sim P \vee P \vee Q \vee \sim R) \wedge (P \vee Q \vee \sim Q \vee \sim R)$

เนื่องจาก $\sim P \vee P$ เป็นจริงทุกกรณี ทำให้ $(\sim P \vee P \vee Q \vee \sim R)$ เป็น T ทุกกรณี

และ $Q \vee \sim Q$ เป็นจริงทุกกรณี ทำให้ $(P \vee Q \vee \sim Q \vee \sim R)$ เป็น T ทุกกรณี

ดังนั้น $(P \vee Q) \wedge (Q \vee R) \wedge \sim R \rightarrow P \wedge R$ เป็น tautology

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาสูตร $\sim [(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q]$ เป็น tautology หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $\sim [(P \rightarrow Q) \wedge \sim P \rightarrow \sim Q]$ eq $(\sim P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge Q)$

จะเห็นได้ชัดว่า ถ้าแทน P เป็น T และ Q เป็น F จะได้สูตรเป็น F

ดังนั้น สูตรนี้ไม่เป็น tautology

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาสูตร $\sim [(P \rightarrow Q) \rightarrow \{(R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow Q)\}]$

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $\sim [(P \rightarrow Q) \rightarrow \{(R \rightarrow P) \rightarrow (R \rightarrow Q)\}]$ eq $(\sim P \wedge P \wedge R \wedge \sim P) \vee (Q \wedge P \wedge R \wedge \sim P)$

เนื่องจาก $\sim P \wedge P$ เป็น F เสมอ ดังนั้น $(\sim P \wedge P \wedge R \wedge \sim P)$ เป็น F ทุกกรณี

และ $(Q \wedge P \wedge R \wedge \sim P)$ เป็น F ทุกกรณีเช่นกัน

ดังนั้น สูตรนี้ไม่เป็น tautology

Valid Consequence

จากหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ใช้ตารางค่าความจริง แสดงการหาค่าความจริงของสูตรหรือประพจน์เชิงประกอบใด ๆ มาแล้ว ซึ่งวิธีการดังกล่าวเป็นเพียงเครื่องมือชนิดหนึ่งที่จะนำมาวิเคราะห์ความสมเหตุสมผลของวิชาตรรกศาสตร์เท่านั้น ต่อไปนี้จะเป็นการสรุปความสมเหตุสมผลของสูตรและประพจน์เชิงประกอบที่กำหนดให้ ด้วยการใช้ตารางแสดงค่าความจริง เรื่องนี้นับว่าเป็นเรื่องที่ตรงเป้าหมายเรื่องหนึ่งของการศึกษาวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์

ตัวอย่าง กำหนดสูตร $P \rightarrow Q$, $\sim Q$ และ $\sim P$ มาให้เราจะพิจารณาค่าความจริงของสูตรทั้งหมดดังนี้

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\sim Q$	$\sim P$	
T	T	T	F	F	
T	F	F	T	F	
F	T	T	F	T	
F	F	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	(*)

จากตารางนี้ จะเห็นว่าทุกค่าความจริงของ prime components P, Q จะมีโอกาสหนึ่งที่ทำให้ค่าความจริงของสูตรต่าง ๆ ที่กำหนดให้เป็น T หมดทุกกรณีพร้อมกัน ดังเช่นในบรรทัด (*) ในกรณีเช่นนี้ ถ้าสูตร $P \rightarrow Q$, $\sim Q$ เป็นสูตรที่กำหนดให้ และ $\sim P$ เป็นสูตรสรุป เราเรียกว่า $\sim P$ เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผล (Valid consequence) ของสูตร $P \rightarrow Q$ และ $\sim Q$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\sim Q$, $\sim P$ เป็นสูตรที่กำหนดให้ และ $P \rightarrow Q$ เป็นสูตรสรุป เราก็จะเรียกสูตร $P \rightarrow Q$ เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของสูตร $\sim Q$ และ $\sim P$ เช่นกัน

<u>นิยาม</u> ให้ $A_1, A_2 \ldots, A_n$ และ B เป็นสูตร ซึ่งประกอบด้วย prime components $P_1, P_2 \ldots, P_m$ แล้ว B เรียกว่า ผลสรุปที่สมเหตุสมผล (Valid comsequence) จากเหตุ $A_1, A_2 \ldots, A_n$ ก็ต่อเมื่อ B เป็นจริง ทุก ๆ กรณีที่เราแทนค่าใน prime components $P_1, P_2 \ldots, P_m$ แล้วทำให้ $A_1, A_2 \ldots, A_n$ เป็นจริงพร้อม ๆ กัน

ในกรณีที่ B เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของเหตุ $A_1, A_2 \ldots, A_n$ เราจะเขียนว่า $A_1, A_2 \ldots, A_n \Longrightarrow B$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า Q เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \vee Q$ และ $\sim P$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาจากตาราง

P	Q	$P \vee Q$	$\sim P$	
T	T	T	F	
T	F	T	F	
F	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	(*)
F	F	F	T	

จากตารางจะเห็นได้ว่า ทุกกรณีที่แทนค่าความจริงลงใน prime components และทำให้ $P \vee Q$ และ $\sim P$ เป็นจริงพร้อมกันแล้วจะมีกรณีหนึ่งที่ Q เป็นจริงด้วย (พิจารณาบรรทัด *)

ดังนั้น Q เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \vee Q$ และ $\sim P$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า $\sim (P \wedge Q)$ เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $Q \vee P \rightarrow \sim R, \sim Q$ และ $P \rightarrow R$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาจากตารางดังนี้

P	Q	R	$Q \wedge P \rightarrow \sim R$	$\sim R$	$P \rightarrow R$	$\sim (P \wedge Q)$	
T	T	T	F	F	T	F	
T	T	F	T	F	F	F	(*)
T	F	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	
T	F	F	T	T	F	T	
F	T	T	T	F	T	T	
F	T	F	T	F	T	T	
F	F	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	(**)
F	F	F	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	(***)

จากตารางข้างบนแสดงว่า ทุกกรณีที่เราแทนค่าความจริงใน prime components และทำให้ $Q \wedge P \rightarrow \sim R$, $\sim Q$ และ $P \rightarrow R$ เป็นจริงพร้อม ๆ กันแล้ว ได้ $\sim (P \wedge Q)$ เป็นจริงทุกกรณีด้วย (พิจารณาบรรทัด (*), (**) และ (***))

ดังนั้น $\sim (P \wedge Q)$ เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $Q \wedge P \rightarrow \sim R$, $\sim Q$ และ $P \rightarrow R$

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณา $\sim P$ เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \wedge Q$ และ $\sim P \rightarrow Q$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาจากตาราง

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim P \rightarrow Q$	$\sim P$	
T	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{F}$	(*)
T	F	F	T	F	
F	T	F	T	T	
F	F	F	F	T	

จากตารางแสดงให้เห็นว่ามีอยู่ 1 กรณี ที่เราแทนค่าความจริงในทุก prime components แล้วทำให้ $P \wedge Q$, $\sim P \rightarrow Q$ เป็นจริงพร้อมแล้วได้ $\sim P$ เป็นเท็จ

ดังนั้น แสดงว่า $\sim P$ เป็นผลสรุปที่ไม่สมเหตุสมผลของ $(P \wedge Q)$ และ $\sim P \rightarrow Q$

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า $\sim P$ เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \leftrightarrow Q$, $Q \vee R$ และ $\sim R$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาจากตาราง

P	Q	R	$P \leftrightarrow Q$	$Q \vee R$	$\sim R$	$\sim P$	
T	T	T	T	T	F	F	
T	T	F	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{F}$	(*)
T	F	T	F	T	F	F	
T	F	F	F	F	T	F	
F	T	T	F	T	F	T	
F	T	F	F	T	T	T	
F	F	T	T	T	F	T	
F	F	F	T	F	T	T	

จากตารางแสดงให้เห็นว่ามีอยู่ 1 กรณี ที่เราแทนค่าความจริงในทุก prime components แล้วทำให้ $P \leftrightarrow Q$, $Q \vee R$, $\sim R$ เป็นจริงพร้อม ๆ กัน แต่ได้ $\sim P$ เป็นเท็จ

ดังนั้น แสดงว่า $\sim P$ ไม่เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \leftrightarrow Q$, $Q \vee R$ และ $\sim R$

<u>หมายเหตุ</u> โดยอาศัยนิยามและข้อตกลงค่าของความเป็นจริงของสูตรต่าง ๆ สามารถสร้างเป็นทฤษฎีที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง Valid consequence กับ tautology ได้ดังนี้

ให้ A, B, C แทนสูตรใด ๆ

1. $A \Longrightarrow B \leftrightarrow \models A \to B$

2. $A_1, A_2 \ldots, A_m \Longrightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \Longrightarrow B$ หรือ $A_1, A_2 \ldots A_m \Longrightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ $\models A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \to B \; (m \geqslant 2)$

3. $A_1, A_2 \ldots, A_m \Longrightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{m-1} \Longrightarrow A_m \to B$ หรือ $A_1, A_2 \ldots, A_m \Longrightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ $\models (A_1 \to (A_2 \to (A_3 \ldots \to (A_m \to B) \ldots)))$

4. $A_1, A_2 \ldots, A_m \Longrightarrow A_i$ สำหรับ $i = 1, 2 \ldots m$

5. ถ้า $A_1, A_2 \ldots A_m \Longrightarrow B_j$ สำหรับ $j = 1, 2 \ldots n$ และ $B_1, B_2 \ldots, B_n \Longrightarrow C$ แล้ว $A_1, A_2 \ldots, A_m \Longrightarrow C$

ทฤษฎีเหล่านี้เราจะยังไม่พิสูจน์ในที่นี้ ถ้าผู้ใดสนใจการพิสูจน์ โปรดค้นเพิ่มเติมจากหนังสือ "Set Logic and Axiomatic แต่งโดย Robert R. Stoll

เราจะนำทฤษฎีเหล่านี้มาพิจารณาความสมเหตุสมผลของสูตรที่ประกอบด้วย prime components มาก ๆ ในตอนต่อไป

จากทฤษฎี 1 และ 2 ทำให้เราสามารถพิจารณาสูตรใดสูตรหนึ่งว่าเป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลหรือไม่ของสูตรที่กำหนดให้ได้อีกวิธีหนึ่ง คือ พิจารณาว่าสูตรเหล่านั้นเป็น tautology หรือไม่

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่าสูตร Q เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลหรือไม่ของสูตร $P \vee Q$ และ $\sim P$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎี $A_1, A_2 \ldots A_n \Longrightarrow B$ ก็ต่อเมื่อ $\models A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n \to B$ พิจารณาจากตารางดังนี้

P	Q	$(P \vee Q) \wedge (\sim P) \rightarrow Q$				
T	T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	F

จะเห็นได้ว่า $(P \vee Q) \wedge (\sim P) \rightarrow Q$ เป็น tautology จริง

ดังนั้น $(P \vee Q), (\sim P) \Rightarrow Q$ เป็นจริงด้วย

นั่นคือ Q เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผล

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า $\sim P$ เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \wedge Q$ และ $\sim P \rightarrow Q$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาจากตารางดังนี้

P	Q	$(P \wedge Q) \wedge (\sim P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim P)$				
T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	F	F	T	T

จากตารางแสดงว่า $(P \wedge Q) \wedge (\sim P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim P)$ ไม่เป็น tautology

ดังนั้น $(P \wedge Q), (\sim P \rightarrow Q) \not\Rightarrow (\sim P)$

นั่นคือ $\sim P$ ไม่เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \wedge Q$, $\sim P \rightarrow Q$

จากวิธีการทั้งสองที่กล่าวมาแล้วนี้ จะเห็นว่าวิธีการพิจารณาความสมเหตุสมผลของสูตรด้วยการเขียนตารางแสดงนั้น เหมาะสมสำหรับสูตรที่มี prime components ไม่มากเกินกว่า 3 ตัว ถ้ามากกว่านั้น เราจะมีวิธีการที่สะดวกและเหมาะสมกว่านี้ ดังจะกล่าวในบทต่อไป

<u>การสร้างสูตรใหม่เพื่อให้เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของสูตรที่กำหนดให้</u>

พิจารณาตารางแสดงความสมเหตุสมผลของสูตร Q

P	Q	$P \vee Q$	$\sim P$	Q	
T	T	T	F	T	
T	F	T	F	F	
F	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	(*)
F	F	F	T	F	

จะเห็นว่า Q เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของสูตร $P \vee Q$ และ $\sim P$ จากการพิจารณาบรรทัด (*) ในตาราง จะพบว่าเราสามารถหาสูตรอื่นอันเกิดจากการแทนค่าความจริงใน prime components P ด้วย F และ Q ด้วย T แล้วได้สูตรใหม่ที่เป็นจริงได้ดังนี้ $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $\sim P \wedge Q$, $\sim P \leftrightarrow Q$ เป็นต้น ดังนั้น สูตรเหล่านี้ก็เป็นผลสรุปหนึ่งที่สมเหตุสมผลของ $P \vee Q$ และ $\sim P$ เหมือนกัน และจากการวิเคราะห์อันนี้แสดงให้เห็นว่า ผลสรุปที่สมเหตุสมผลของสูตรในชุดที่กำหนดให้หนึ่ง ๆ ไม่จำเป็นต้องมีผลสรุปที่ตายตัวเสมอไป อาจจะมีผลสรุปอย่างอื่นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขและสมเหตุสมผลอีกก็ได้ แนววิเคราะห์นี้นับได้ว่าเป็นแนวความคิดที่สำคัญแนวความคิดหนึ่งในวิชาคณิตศาสตร์ทีเดียว

ต่อไปจะแสดงวิธีการสร้างสูตรที่เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผล จากสูตรที่กำหนดมาให้ด้วยวิธีเขียนตาราง

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสูตร B ซึ่งประกอบด้วย prime components P และ R และสูตร B เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \rightarrow Q$ และ $Q \rightarrow R$

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	B (ต้องการในรูป P, R)	
T	T	T	T	T	T	*
T	T	F	T	F		
T	F	T	F	T		
T	F	F	F	T		
F	T	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	T	*
F	T	F	T	F		
F	F	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	T	*
F	F	F	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	T	*

สูตร B ที่ต้องการจะต้องสอดคล้องกับค่าความจริงของ prime components ทั้ง 4 กรณีดังนี้ คือ

P	R	B (ต้องการในรูป P, R) คือ	$\sim P \vee R$ หรือ	$P \rightarrow R$
T	T	T	T	T
F	T	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ดังนั้น สูตร B ที่ต้องการ คือ สูตรใดสูตรหนึ่งของ $\sim P \vee R$ หรือ $P \rightarrow R$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสูตร B ซึ่งประกอบด้วย prime components P, R และสูตร B เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \leftrightarrow Q$, $Q \vee R$ และ $\sim R$

<u>วิธีทำ</u> สร้างตารางดังนี้

P	Q	R	P $\leftrightarrow$ Q	Q $\vee$ R	$\sim$ R	B	
T	T	T	T	T	F		
T	T	F	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	T	(*)
T	F	T	F	T	F		
T	F	F	F	F	T		
F	T	T	F	T	F		
F	T	F	F	T	T		
F	F	T	T	T	F		
F	F	F	T	F	T		

สูตร B ที่ต้องการจะต้องสอดคล้องกับค่าความจริงของ prime components 1 กรณีดังนี้

P	R	B (ต้องการในรูป P, R) คือ	P $\vee$ R หรือ	P $\wedge \sim$ R
T	F	T	T	T

ดังนั้น สูตร B ที่ต้องการ คือ สูตรใดสูตรหนึ่งของ P $\vee$ R หรือ P $\wedge \sim$ R

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสูตร B ที่ประกอบด้วย prime components P และ Q และ B เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ P $\rightarrow$ R, Q $\rightarrow \sim$ S, $\sim$ R $\vee$ S

<u>วิธีทำ</u> สร้างตารางดังนี้

P	Q	R	S	P → R	Q → ~ S	~ R ∨ S		
T	T	T	T	T	F	T		
T	T	T	F	T	T	F		
T	T	F	T	F	F	T		
T	T	F	F	F	T	T		
T	F	T	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	T	*
T	F	T	F	T	F	F		
T	F	F	T	F	T	T		
T	F	F	F	F	T	T		
F	T	T	T	T	F	T		
F	T	T	F	T	T	F		
F	T	F	T	T	F	T		
F	T	F	F	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	T	*
F	F	T	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	T	*
F	F	T	F	T	F	F		
F	F	F	T	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	$\boxed{T}$	T	*
F	F	F	F	T	F	T		

ดังนั้น สูตร B ที่ต้องการจะต้องสอดคล้องกับ prime components P, Q มีถึง 4 กรณีดังนี้

P	Q	B (ที่ต้องการ)	$P \rightarrow \sim Q$	หรือ $Q \rightarrow \sim p$	หรือ $\sim (P \wedge Q)$
T	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

ดังนั้น สูตร B ที่ต้องการ คือ สูตรใดสูตรหนึ่งดังนี้ $P \rightarrow \sim Q$ หรือ $Q \rightarrow \sim P$ หรือ $\sim (P \wedge Q)$

Valid Argument

คำว่า argument ในวิชาตรรกศาสตร์ หมายถึง คำกล่าวที่ประกอบด้วยคำ 2 ประเภท ประเภทที่หนึ่งเรียกว่า เหตุหรือสมมติฐาน (Hypothesis) อีกประเภทหนึ่งเรียกว่า ผลหรือผลสรุป (conclusion)

ถ้าเรากล่าวว่า argument สมเหตุสมผล (Valid) หมายความว่า ผลสรุปเป็นคำกล่าวที่สมเหตุสมผลในเชิงตรรกศาสตร์ จากคำกล่าวที่เป็นเหตุ หรืออาจจะกล่าวว่า argument ใด ๆ สมเหตุสมผลก็ต่อเมื่อ มีสูตร A_1, A_2 ..., A_n เป็นสูตรที่เหมาะสมสำหรับเหตุ และสูตร B เป็นสูตรที่เหมาะสมสำหรับผล ซึ่ง B จะเป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผล (Valid Consequence) ของ A_1, A_2 ..., A_n

โดยทั่วไป เรานิยมเขียนแบบแผนสำหรับการพิสูจน์ความสมเหตุสมผลของ Argument ดังนี้

ให้ A_1 เป็นสูตรที่เหมาะสมสำหรับคำกล่าวที่เป็นเหตุในข้อที่ 1

A_2 เป็นสูตรที่เหมาะสมสำหรับคำกล่าวที่เป็นเหตุในข้อที่ 2

⋮

A_n เป็นสูตรที่เหมาะสมสำหรับคำกล่าวที่เป็นเหตุในข้อที่ n

และ B เป็นสูตรที่เหมาะสมสำหรับคำกล่าวที่เป็นผลสรุป

เราจะเขียนดังนี้

เหตุข้อที่ 1	หรือเหตุ 1. A_1
เหตุข้อที่ 2	หรือเหตุ 2. A_2
...	...
...	...
เหตุข้อที่ n	หรือเหตุ n. A_n
ผลสรุป	B

ถ้า argument เหตุ 1. A_1

2. A_2

$\vdots$

n. A_n

สรุป B เป็น Valid argument

เราอาจจะกล่าวอย่างอื่นที่มีความหมายเหมือนกันในเชิงตรรกศาสตร์ได้อีกเช่น

ก. $A_1, A_2 \ldots, A_n \Longrightarrow B$ หรือ B เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $A_1, A_2 \ldots, A_n$

ข. $A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n \rightarrow B$ เป็นสูตรที่ Valid

เราจะเรียก argument ที่ไม่สมเหตุสมผลว่า invalid argument หรือ fallacy

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาการสรุปผลของ argument ที่กำหนดให้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

ก. เหตุ : 1 ถ้าฟ้ามืดแล้วฝนต้องตก

<u>เหตุ : 2 ฟ้ามืด</u>

ผล : ฝนต้องตก

<u>วิธีทำ</u> ให้ prime component P สำหรับ แทน ฟ้ามืด

Q สำหรับ แทน ฝนตก

ดังนั้น จะได้สูตร A_1 เหมาะสมกับ $P \rightarrow Q$

A_2 เหมาะสมกับ P

และ B เหมาะสมกับ Q

จะได้แบบแผนสำหรับการวิเคราะห์ดังนี้

$$\frac{\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \end{array}}{Q}$$

โดยการพิจารณาจากตาราง จะได้ว่า Q เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \rightarrow Q$ และ P

นั่นคือ ผลสรุปของ argument นี้สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง จงพิจารณาการสรุป argument ต่อไปนี้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ : 1 ถ้าฉันไม่ขยันเรียนแล้วฉันจะสอบตก

เหตุ : 2 ฉันขยันเรียน

ผล : ฉันสอบได้

วิธีทำ สูตรที่เหมาะสมสำหรับเหตุผลผลเป็นดังนี้

เหตุ : 1 $\sim P \rightarrow \sim Q$

2 P

ผล : Q

โดยการพิจารณาจากตารางจะได้ว่า Q ไม่สมเหตุสมผลสำหรับ $\sim p \rightarrow \sim Q$ และ P ดังนั้น ผลสรุปของ argument ไม่สมเหตุสมผล หรือ fallacy

ตัวอย่าง จงพิจารณาความสมเหตุสมผลของ argument ต่อไปนี้

เหตุ : 1 ถ้าคณิตศาสตร์เป็นวิชายากแล้ว คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่น่าเรียน

2. อาจารย์สอนคณิตศาสตร์ให้ยากหรือคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่น่าเรียน

3 อาจารย์สอนคณิตศาสตร์ให้ไม่ยาก

ผล : คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ไม่ยาก

<u>วิธีทำ</u> สูตรที่เหมาะสมสำหรับ argument เป็นดังนี้

เหตุ : 1 $P \rightarrow Q$

2 $R \vee \sim Q$

3 $\sim R$

ผล : $\sim P$

โดยการพิจารณาจากตารางจะได้ว่า $\sim P$ เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลของ $P \rightarrow Q$, $R \vee \sim Q$ และ $\sim R$ ดังนั้น ผลสรุปของ argument นี้สมเหตุสมผล

จะเห็นได้ว่า ในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของ argument โดยใช้ผลสรุปของสูตรที่สมเหตุสมผลจากตารางยังอยู่ในวงแคบ เพราะว่า ถ้ามีเหตุมาก ๆ จะทำให้ยุ่งยากในการจัดสร้างตาราง ดังนั้น จึงต้องหาวิธีสร้างกฎเกณฑ์จาก tautology และนำกฎเกณฑ์เหล่านี้มาพิจารณา argument ต่าง ๆ ต่อไป

แบบฝึกหัด

1. จงพิสูจน์ว่า สูตรที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็น tautology โดยอาศัยตารางค่าความจริง
   ก. $P \to P \vee Q$
   ข. $P \wedge (P \to Q) \to Q$
   ค. $\sim Q \wedge (P \to Q) \to \sim P$
   ง. $(P \to Q) \leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$
   จ. $(P \to Q) \wedge (Q \to R) \to P \to R$
2. จงพิจารณาว่าสูตรที่กำหนดให้ต่อไปนี้ สูตรใดเป็น tautology และไม่เป็น tautology โดยอาศัย conjunctive normal form และ disjunctive normal form
   ก. $P \to (P \wedge Q)$
   ข. $(P \vee Q) \to P$
   ค. $[(\sim P \to Q) \wedge (R \to \sim P)] \to (R \to Q)$
   ง. $[(P \vee Q) \to (P \wedge Q)]$
   จ. $(\sim P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(\sim P \to Q) \wedge (Q \to \sim P)]$
3. จงหา negation ของสูตรต่อไปนี้
   ก. $\sim P \to \sim Q$
   ข. $(P \vee Q) \to R$
   ค. $P \wedge (\sim Q \vee R)$
   ง. $\sim P \to (R \vee S)$
   จ. $(P \to Q) \to (R \to S)$

$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

ไปเที่ยว

valent กัน

equivalent กับ ค. หรือ ง.

4. กำหนดให้

ก.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
T							
T							
T							
T							
F							
F							
F							
F							

ข.

P	Q	R	$P \vee Q$	$P \vee R$	$Q \wedge R$	$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
T							
T							
T							
T							
F							
F							
F							
F							

ค. $ab = 0$ และ $a = 0$ หรือ $b = 0$

ง. นายดำไปเที่ยวหรือนายแดงและนายเขียวไปเที่ยว

จากที่กำหนดให้ จงพิจารณาดังต่อไปนี้

1. ก. และ ข. มีสูตรอะไรบ้างที่ equivalent กัน
2. จากตาราง ก. หรือ ข. จงหาสูตรที่ equivalent กับ ค. หรือ ง.

5. กำหนดประพจน์เชิงประกอบให้

1. $a > b$ และ $a \neq 0$
2. ไม่เป็นความจริงที่ว่าสมชายและสมศักดิ์เป็นพี่น้องกัน
3. ถ้านายพลลีไม่ชนะสมครามครั้งนี้แล้ว เขาก็จะไม่ใช่ลูกชายของนโปเลียน
4. ถ้าสุโชติขับรถเร็วหรือสุชายขับรถช้าเกินไปแล้ว ตำรวจจราจรก็จะจับฐานทำผิดกฎหมาย
5. ถ้าหนังรอบบ่ายฉาย 2 โมงครึ่ง วิชิตจะมาถึงโรงหนังเร็ว แต่วิชัยจะมาถึงโรงหนังช้า

จงทำตามเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. หาสูตรที่เหมาะสมกับประพจน์เชิงประกอบเหล่านั้น

ข. หา negation ของ ก.

ค. เปลี่ยนสูตร (negation) ข. ให้เป็นประพจน์เชิงประกอบ

6. กำหนดประพจน์เชิงประกอบให้

1. ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
2. $x + y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \cdot y = 0$
3. a^2 เป็นจำนวนคี่ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนคี่
4. สมชายเป็นผู้ชายและสมศรีไม่เป็นผู้ชาย
5. ถ้าหินเป็นสสารแล้ว หินจะขยายตัวเมื่อได้รับความร้อน

จงทำตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

ก. หาสูตรที่เหมาะสมกับประพจน์เชิงซ้อน

ข. หาสูตร ที่ equivalent กับ ก.

ค. เปลี่ยนสูตรในข้อ ข. เป็นประพจน์เชิงประกอบ

7. จงพิจารณาการให้เหตุผลของแต่ละข้อว่าสมเหตุสมผลหรือไม่ โดยใช้ตาราง

ก. เหตุ : 1 ถ้านายแดงดื่มสุราแล้วเขาจะผอม

2 นายแดงดื่มสุรา

ผล : นายแดงผอม

ข. เหตุ : 1 ถ้านายแดงดื่มสุราแล้วเขาจะผอม

2 นายแดงผอม

ผล : นายแดงดื่มสุรา

ค. เหตุ : 1 ถ้านายแดงดื่มสุราแล้วเขาจะผอม

2 นายแดงไม่ดื่มสุรา

ผล : นายแดงไม่ผอม

ง. เหตุ : 1 ถ้านายแดงดื่มสุราแล้วเขาจะผอม

2 นายแดงไม่ผอม

ผล : นายแดงไม่ดื่มสุรา

จ. เหตุ : 1 ถ้านายคำไม่ดื่มสุราหรือเบียร์แล้วนายคำจะดื่มกาแฟ

2 นายคำไม่ดื่มกาแฟ

ผล : นายคำไม่ดื่มสุราและนายคำไม่ดื่มเบียร์

8. จงหาสูตรที่เป็นผลสรุปที่สมเหตุสมผลจากเหตุที่กำหนดให้ (พิจารณาจากตารางแสดงค่าความจริง)

ก. เหตุ : 1 $\sim P \rightarrow Q$

2 $\sim Q$

ข. เหตุ : 1 $(P \vee Q) \rightarrow \sim R$

2 R

ค. เหตุ : 1 $P \rightarrow (Q \wedge R)$

2 $\sim Q \vee \sim R$

ง. เหตุ : 1 $P \rightarrow Q$

2 $R \rightarrow \sim Q$

3 $\sim R$