บทที่ 7

แบบของการพิสูจน์ (Method of Proof)

การพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์

แบบแผนการพิสูจน์อย่างสมเหตุสมผล (Valid) ในบทที่ 5 และ 6 เป็นเป้าหมายที่สำคัญในวิชาตรรกศาสตร์ ต่อไปจะเป็นการประยุกต์แบบแผนของการพิสูจน์ในบทที่ 5 และ 6 มาใช้ในวิชาคณิตศาสตร์ แต่เดิมการพิสูจน์ในตรรกศาสตร์ เราใช้เหตุผลและสมมติฐานในแต่ละเหตุการณ์ที่กำหนดให้ โดยไม่คำนึงถึงความจริง (Fact) ดังนั้น การหยิบยกเหตุมาอ้างจึงกระทำได้โดยสะดวก แต่การพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์จะกระทำตามเหตุการณ์อย่างนั้นไม่ได้ โดยทั่วไปคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีโครงสร้างเป็นระบบดังที่กล่าวแล้วในบทที่ 1 ดังนั้น เหตุที่จะนำมาอ้างจึงต้องมาจากนิยาม สัจจพจน์ หรือทฤษฎีของเนื้อหาตอนนั้น ๆ นั่นคือ ผู้ที่จะพิสูจน์คณิตศาสตร์ จำเป็นจะต้องจำกฎ ทฤษฎี หรือนิยามต่าง ๆ เพื่อจะใช้พิสูจน์ปัญหาในข้อใดข้อหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ตามที่ต้องการ

แบบแผนของการพิสูจน์ในวิชาคณิตศาสตร์มีลักษณะต่าง ๆ กัน ลักษณะโครงสร้างใหญ่ ๆ ได้มาจากแบบแผนการพิสูจน์ของ statement calculus และ predicate calculus นั่นเอง แต่อาจมีรายละเอียดปลีกย่อยของการสรุปที่แตกต่างกัน ดังมีลักษณะดังต่อไปนี้

1. การพิสูจน์ทางตรง (Direct proof)

เราทราบแล้วว่า ในการพิสูจน์ว่าประพจน์ $P \rightarrow Q$ เป็นจริงมีกรณีเดียวที่เราจะต้องพิสูจน์ คือ สมมติให้ P เป็นจริง แล้วใช้กฎการพิสูจน์ประกอบกับสิ่งที่กำหนดให้พิสูจน์ว่า Q เป็นจริงด้วย เราเรียกกฎการพิสูจน์นี้ว่า การพิสูจน์ทางตรง

การพิสูจน์ทางตรงในวิชาคณิตศาสตร์ มีแบบแผนดังต่อไปนี้

ต้องการพิสูจน์ว่า $P \rightarrow Q$ เป็นจริง ต้องแสดงดังนี้

ข้อความ	เหตุผล
1. $P \to Q_1$	ได้มาจากนิยามสัจจพจน์หรือทฤษฎี
2. $Q_1 \to Q_2$	
$\vdots$	
n $Q_n \to Q$	
ดังนั้น $P \to Q$	Syllo

ตัวอย่าง นิยาม 1. สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ x เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ $x = 2n$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n

2. สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ $x^n = \overbrace{x \cdot x \cdots x}^{n \text{ ครั้ง ๆ}}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

สัจจพจน์ 1. มีคุณสมบัติปิดของจำนวนเต็ม +, x

2. มีคุณสมบัติจัดหมวดหมู่ (Associative)

3. มีคุณสมบัติสลับที่ (Commutative)

4. มีคุณสมบัติกระจาย (Distributive)

5. มีคุณสมบัติของการเท่ากันของจำนวนจริง

ทฤษฎี สำหรับจำนวนเต็ม k ถ้า k เป็นจำนวนคู่แล้ว k^2 เป็นจำนวนคู่

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. k เป็นจำนวนคู่	เหตุ
2. สำหรับทุกจำนวนเต็ม x x เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $x = 2n$ บางจำนวนเต็ม	นิยาม
3. k เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ $k = 2n$ บางจำนวนเต็ม n	จาก 2 และ U.I.
4. ถ้า k เป็นจำนวนคู่แล้ว $k = 2n$ บางจำนวนเต็ม n	จาก 3 และ Equiv. และ Simp.

ข้อความ	เหตุผล
5. $k = 2n$	จาก 1, 4 และ M.P.
6. $k \cdot k = 2n.2n$	จาก 5 สัจจพจน์ของการเท่ากัน
7. $k \cdot k = 2 \cdot 2nn$	จาก 6 สัจจพจน์การสลับที่
8. สำหรับทุก ๆ จำนวน x, $x^2 = x \cdot x$	นิยาม
9. $k^2 = k \cdot k$ และ $n^2 = n \cdot n$	จาก 8 และ U.I.
10. $k^2 = 2(2n^2)$	จาก 7, 9 และสัจจพจน์การเท่ากันและสัจจพจน์การจัดหมวดหมู่
11. เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มดังนี้ $2n^2$ เป็นจำนวนเต็ม	สัจจพจน์ของการปิด
12. สำหรับทุกจำนวนเต็ม y, y เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ y = 2m บางจำนวนเต็ม m	นิยาม
13. $k^2 = 2(2n^2)$, $2n^2$ เป็นจำนวนเต็มบางจำนวนก็ต่อเมื่อ k^2 เป็นจำนวนคู่	จาก 12 และ U.I.
14. ถ้า $k^2 = 2(2n^2)$, $2n^2$ เป็นจำนวนเต็มบางจำนวนแล้ว k^2 เป็นจำนวนคู่	จาก 13, Equiv และ Simp.
15. k^2 เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น k เป็นจำนวนคู่แล้ว k^2 เป็นจำนวนคู่	จาก 10, 11, 14 และ M.P.

จะเห็นว่าในการพิสูจน์จากตัวอย่างนี้ยาวมาก เพราะว่าเป็นการพิสูจน์ที่มีการแจกแจงโดยไม่ยกเว้นเลย ทำให้เปลืองเวลามาก ดังนั้น ในทางปฏิบัติจริง เราจะไม่ให้รายละเอียดในการให้เหตุผลดังได้แสดงมานี้ แต่พยายามจะตัดทอนให้สั้นลงดังนี้

ก. ในช่องข้อความ เราพยายามใส่เฉพาะผลสรุปที่สมเหตุสมผลและสมมติฐาน

ข. ในช่องเหตุผล เราจะอ้างเฉพาะนิยาม สัจจพจน์ หรือทฤษฎีเท่านั้น

ส่วนกฎการให้เหตุผลที่สมเหตุสมผลนั้น เราจะพิจารณาเป็นผลสรุปออกมาอย่างสมเหตุสมผลเลย ดังตัวอย่างที่ทำให้การพิสูจน์สั้นลงได้ดังนี้ ส ส

ข้อความ	เหตุผล
1. k เป็นจำนวนคู่	เหตุ
2. $k = 2n$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n	นิยาม
3. $k^2 = 2n.2n$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n	จาก 2 และสัจจพจน์การเท่ากัน
4. $k^2 = 2(2n^2)$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n	สัจจพจน์การสลับที่และนิยาม
5. n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $2n^2$ เป็นจำนวนเต็ม	สัจจพจน์และคุณสมบัติปิด
6. ดังนั้น k^2 เป็นจำนวนคู่ นั่นคือ k เป็นจำนวนคู่แล้ว k^2 เป็นจำนวนคู่	จาก 4 และนิยาม

2. การพิสูจน์โดยใช้ Contrapositive

จาก tautology $(P \to Q) \leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$ หมายความว่า เราสามารถจะหาประพจน์ $\sim Q \to \sim P$ ใช้แทน $P \to Q$ ได้ กรณีที่การพิสูจน์แบบทางตรงก่อให้เกิดความยุ่งยาก นั่นคือ ถ้าต้องพิสูจน์ $P \to Q$ เป็นจริง เราก็เพียงแต่พิสูจน์ $\sim Q \to \sim P$ ให้เป็นจริงแทน การพิสูจน์แบบแผนนี้เรียกว่า พิสูจน์โดยใช้ Contrapositive ซึ่งมีแบบแผนเหมือนกับการพิสูจน์ทางตรง $(P \to Q)$

ตัวอย่าง นิยาม (เพิ่มเติม)

3. สำหรับจำนวนเต็ม y ใด ๆ y เป็นจำนวนคี่ก็ต่อเมื่อ $y = 2n + 1$ สำหรับจำนวนเต็มบางจำนวน

สัจจพจน์ (เพิ่มเติม)

6. จำนวนเต็ม x ใด ๆ x เป็นจำนวนคู่ หรือ x เป็นจำนวนคี่ x ไม่เป็นทั้งจำนวนคู่หรือคี่ขณะเดียวกัน

ทฤษฎี ถ้า k เป็นจำนวนคี่แล้ว $k + 1$ เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> (โดยใช้ contrapositive) เราต้องแสดงว่า ถ้า $k + 1$ ไม่ใช่จำนวนคู่แล้ว k ไม่ใช่จำนวนคี่

<u>ข้อความ</u>	<u>เหตุผล</u>
1. $k + 1$ ไม่ใช่จำนวนคู่	เหตุ (สมมติฐาน)
2. $k + 1$ เป็นจำนวนคี่	จากสัจจพจน์ที่ 5 และ 1
3. $k + 1 = 2n + 1$, n เป็นจำนวนเต็ม	จาก 2 และนิยาม 3
4. $k = 2n$, n เป็นจำนวนเต็ม	จาก 3 และคุณสมบัติเท่ากัน
5. k เป็นจำนวนคู่	จาก 4 และนิยาม 1
6. k ไม่ใช่จำนวนคี่	จาก 5 และสัจจพจน์ที่ 5

สรุปได้ว่า ถ้า $k + 1$ ไม่ใช่จำนวนคู่แล้ว k ไม่ใช่จำนวนคี่ แสดงว่า ถ้า k เป็นจำนวนคี่แล้ว $k + 1$ เป็นจำนวนคู่

3. <u>การพิสูจน์ทางอ้อม</u> (Indirect proof)

การพิสูจน์แบบนี้เกิดขึ้นเนื่องจากการพิสูจน์ทางตรงเกิดความยุ่งยากมากเกินไป ดังนั้น แทนที่เราจะพิสูจน์ว่า $P \rightarrow Q$ เป็นจริงหรือ $\sim Q \rightarrow \sim P$ เป็นจริง เราจะสมมติให้ $P \rightarrow Q$ เป็นเท็จหรือ P เป็นจริง และ $\sim Q$ เป็นจริง และในขบวนการพิสูจน์ พยายามให้เกิดข้อขัดแย้งหรือ false formula ระหว่างเหตุกับเหตุ $(P \wedge \sim P)$ ผลกับผล $(Q \wedge \sim Q)$ หรือสัจจพจน์กับสัจจพจน์ $(A \wedge \sim A)$ ด้วยกัน แล้วสรุปว่า เงื่อนไขที่กำหนดให้เป็นเท็จ แสดงว่า $P \rightarrow Q$ เป็นจริง เราจะแสดงเป็นแบบแผนต่าง ๆ กันได้ดังนี้

1. <u>เกิดการขัดแย้งที่เหตุกับเหตุ</u>

กำหนดให้ P เป็นจริงแล้วแสดงว่า Q เป็นจริง

ข้อความ	เหตุผล
1. ให้ $\sim Q$ เป็นจริง	เหตุ
2. $\sim Q \rightarrow Q_1$ เป็นจริง	นิยาม สัจจพจน์ หรือทฤษฎี
3. $Q_1 \rightarrow Q_2$ เป็นจริง	นิยาม สัจจพจน์ หรือทฤษฎี
4. $Q_2 \rightarrow \sim P$ เป็นจริง	นิยาม สัจจพจน์ หรือทฤษฎี

ดังนั้น $\sim P$ เป็นจริง

นั่นคือ $P \wedge \sim P$ แล้วสรุปว่า $P \wedge \sim P$

เป็น contradiction จึงทำให้ $\sim Q$ เป็นเท็จ

ดังนั้น Q เป็นจริง และ $P \rightarrow Q$ เป็นจริง

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า ถ้า x^2 เป็นเลขคี่แล้ว x เป็นเลขคี่ โดยใช้นิยามและสัจจพจน์จากตัวอย่าง 2 ตัวอย่างข้างต้น

วิธีทำ กำหนดให้ x^2 เป็นเลขคี่แล้วจะแสดงว่า x เป็นเลขคี่จริง

สมมติให้ x เป็นเลขคู่จริง

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. x ไม่ใช่เลขคี่	สมมติฐาน
2. x เป็นเลขคู่	จาก 1 และสัจจพจน์ 5
3. x^2 เป็นเลขคู่	จาก 2 และทฤษฎี
4. ดังนั้น x^2 เป็นเลขคู่ และ x^2 เป็นเลขคี่	จากเหตุ และ 3

ดังนั้น เหตุกับเหตุ เกิด contradiction แสดงว่า x ไม่ใช่เลขคี่เป็นเท็จ นั่นคือ x เป็นเลขคู่ แสดงว่า ถ้า x^2 เป็นเลขคู่แล้ว x เป็นเลขคู่

2. เกิดขัดแย้งที่ผลกับผล ซึ่งมีแบบแผนดังนี้

ต้องการพิสูจน์ว่า $P \rightarrow Q$ จริง สมมติให้ $\sim (P \rightarrow Q)$ จริง หรือ P เป็นจริง และ $\sim Q$ เป็นจริง

ข้อความ	เหตุผล
1. $\sim Q$ เป็นจริง	
2. $\sim Q \rightarrow Q_1$	
3. $Q_1 \rightarrow Q_2$	เหตุ นิยาม สัจจพจน์ หรือทฤษฎี
4. $Q_2 \rightarrow Q$	
5. ดังนั้น Q เป็นจริง	

นั่นคือ $Q \wedge \sim Q$ จริงแล้วสรุปได้ว่า $Q \wedge \sim Q$ เป็น contradiction จึงทำให้ $\sim Q$ เป็นเท็จ และ $P \wedge \sim Q$ เป็นเท็จ ดังนั้น $P \rightarrow Q$ เป็นจริง

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิสูจน์ว่า ถ้า k เป็นจำนวนคี่แล้ว $k + 1$ เป็นจำนวนคู่ โดยใช้นิยามและสัจจพจน์จากตัวอย่างข้างต้น

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ k เป็นจำนวนคี่และ $k + 1$ เป็นจำนวนคี่จริง

ข้อความ	เหตุผล
1. $k + 1 = 2n+1$, n เป็นจำนวนเต็ม	เหตุ
2. $k = 2n$	จาก (1) สัจจพจน์การเท่ากัน
3. $k = 2m + 1$ m เป็นจำนวนเต็ม	**เหตุและนิยาม**
4. $2n = 2m + 1$	จาก (2), (4)
5. $2n + 1 = (2m+ 1) + 1$	สัจจพจน์การเท่ากัน
6. $2n + 1 = 2m + 2$	สัจจพจน์การปิด
7. $2n + 1 = 2(m + 1)$	สัจจพจน์การกระจาย
8. $\therefore 2n + 1$ เป็นจำนวนคู่	จาก (8) นิยาม

จากเหตุ $k + 1$ เป็นจำนวนคี่ และ $k + 1$ เป็นจำนวนคู่ เกิด contradiction ทำให้ $k + 1$ เป็นจำนวนคี่ เป็นเท็จ k เป็นจำนวนคี่ และ $k + 1$ เป็นจำนวนคี่ เป็นเท็จ ดังนั้นถ้า k เป็นจำนวนคี่แล้ว $k + 1$ เป็นจำนวนคู่ เป็นจริง

3. <u>เกิดขัดแย้งที่สัจจพจน์กับข้อความพิสูจน์</u>

มีแบบแผนการพิสูจน์ดังนี้ ต้องการพิสูจน์ว่า $P \rightarrow Q$ เป็นจริง

กำหนดให้ สัจจพจน์ Q^* เป็นจริง และ P เป็นจริง ต้องแสดงว่า Q เป็นจริง

<u>ข้อความ</u>	<u>เหตุผล</u>
1. $\sim Q$	เหตุ
2. $\sim Q \rightarrow Q_1$	เหตุ นิยาม สัจจพจน์ หรือทฤษฎี
3. $Q_1 \rightarrow Q_2$	
4. $Q_2 \rightarrow \sim Q^*$	
5. ดังนั้น $\sim Q^*$	

นั่นคือ $Q^* \wedge \sim Q^*$ เกิด contradiction ทำให้ $\sim Q$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $P \rightarrow Q$ เป็นจริง

<u>ตัวอย่าง</u> <u>นิยาม</u> (เพิ่มเติม)

4. a, b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $a > b$ แล้ว $a = b + k$, k เป็นจำนวนเต็มบวกบางตัว

<u>สัจจพจน์</u> (เพิ่มเติม) 7. $a \not> a$

<u>จงพิสูจน์ว่า</u> ถ้า $a^2 > 0$ แล้ว $a \neq 0$

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ $a^2 > 0$ แล้ว $a \neq 0$ เป็นเท็จ หรือ $a^2 > 0$ และ $a = 0$

ข้อความ	เหตุผล
1. $a = 0$	เหตุ
2. $a^2 = a \cdot a$	นิยาม
3. $a^2 = 0 \cdot 0 = 0$	สัจจพจน์การเท่ากัน
4. $a^2 > 0$	เหตุ
5. $a^2 = 0 + n$, n เป็นจำนวนเต็มบวก	นิยาม 4, จาก 4
6. $a^2 = a^2 + n$	จาก 3 สัจจพจน์การเท่ากัน
7. $a^2 > a^2$	นิยาม

นั่นคือ เกิด contradiction กับสัจจพจน์ ดังนั้น $a^2 > 0$ และ $a = 0$ เป็นเท็จ จะได้ $a^2 > 0$ แล้ว $a \neq 0$ เป็นจริง

4. Proof of Existential

การพิสูจน์แบบนี้ เกิดจากคำกล่าวที่อยู่ในรูปของ statement ที่ประกอบด้วย Existential Quantifier $(\exists x)\, P(x)$ การพิสูจน์คล้ายกับเป็นการแสดงคำกล่าวให้เห็นจริงด้วยการยกตัวอย่าง เพื่อเป็นการยืนยันว่า คำกล่าวนั้นมีโอกาสเป็นไปได้อย่างน้อย 1 ครั้ง แบบแผนของการพิสูจน์เหมือนกับการพิสูจน์ทางตรง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิสูจน์ว่า ถ้า R เป็นเซทจำนวนจริงใด ๆ แล้วมี $x \in R$ โดยที่ $x^2 < x$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่าคำกล่าวนี้จะเป็นจริง เพียงแต่เราหาค่า x ซึ่งเป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับเงื่อนไข $x^2 < x$ ซึ่งทำได้ดังนี้

$\frac{1}{2}$ เป็นจำนวนจริง และ $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

แสดงว่า จะมี x อยู่ในจำนวนจริง โดยที่ $x^2 < x$

5. Disproof by Counter Example

การพิสูจน์แบบนี้ เป็นการปฏิเสธข้อความที่โจทย์กำหนดให้ ซึ่งอยู่ในรูปของ statement ที่ประกอบด้วย Universal quantifier โดยการแสดงให้เห็นจริง ด้วยการยกตัวอย่าง อย่างน้อย 1 ตัวอย่าง ให้สอดคล้องกับข้อความที่เราปฏิเสธ ซึ่งมีแบบแผนดังนี้ เช่น

กำหนดข้อความ $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ ถ้าเราต้องการปฏิเสธข้อความนี้ เราต้องแสดงว่า $\sim (\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$ เป็น T

หรือ $(\exists x)[P(x) \wedge \sim Q(x)]$ เป็น T

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิสูจน์ว่าสำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว $x + 2 = x$ เป็นเท็จ

<u>พิสูจน์</u> เราต้องแสดงว่า $\sim (\forall x)[x + 2 = x]$ เป็นจริง

นั่นคือ ต้องแสดง $(\exists x)[x + 2 \neq x]$ เป็นจริง

นั่นคือ มี 2 เป็นจำนวนจริง โดยที่ $2 + 2 = 4 \neq 2$

ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว $x + 2 = x$ เป็นเท็จ

6. <u>Proof by Case</u>

การพิสูจน์ชนิดนี้ อาจเกิดจากข้อความที่กำหนดให้ สามารถแยกเป็นกรณีต่าง ๆ ได้หลายกรณี ซึ่งแบ่งออกเป็น 2 ประเภทดังนี้

ก. มาจากข้อความที่กำหนดให้อยู่ในแบบแผน

$(p \vee Q) \rightarrow R$

ดังนั้น จาก $[(P \vee Q) \rightarrow R] \rightarrow (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$ เราต้องแสดงว่า $P \rightarrow R$ และ $Q \rightarrow R$ เป็นจริง

<u>ตัวอย่าง</u> จงแสดงว่า ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว $x^2 + x$ เป็นเลขคู่ โดยใช้นิยาม สัจจพจน์ และทฤษฎี จากตัวอย่างที่กล่าวมาแล้ว

<u>วิธีทำ</u> x เป็นจำนวนเต็มอาจเกิดขึ้นได้ 2 กรณี ดังนี้

1. x เป็นจำนวนคู่
2. x เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น เราต้องพิสูจน์ 2 กรณีดังต่อไปนี้

ก. ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่

ข. ถ้า x เป็นจำนวนคี่แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> ก.

<u>ข้อความ</u>	<u>เหตุผล</u>
1. x เป็นจำนวนคู่	เหตุ
2. x^2 เป็นจำนวนคู่	ทฤษฎี
3. $x = 2n$, n เป็นจำนวนเต็ม	นิยาม
4. $x^2 = 2m$, m เป็นจำนวนเต็ม	นิยาม
5. $x^2 + x = 2n + 2m$	สัจจพจน์การเท่ากัน
6. $x^2 + x = 2(m + n)$	สัจจพจน์การกระจาย
7. $m + n = k$, k เป็นจำนวนเต็ม	สัจจพจน์การปิด
8. $x^2 + x = 2k$	สัจจพจน์การเท่ากัน
9. นั่นคือ $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่	นิยาม
ดังนั้น ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่ด้วย	

<u>พิสูจน์</u> ข.

<u>ข้อความ</u>	<u>เหตุผล</u>
1. x เป็นจำนวนคี่	เหตุ
2. x^2 เป็นจำนวนคี่	ทฤษฎี
3. $x = 2n + 1$, n เป็นจำนวนเต็ม	นิยาม
4. $x^2 = 2m + 1$, m เป็นจำนวนเต็ม	นิยาม
5. $x^2 + x = (2n + 1) + (2m + 1)$	สัจจพจน์การเท่ากัน
6. $x^2 + x = 2m + 2n + 2$	สัจจพจน์การสลับที่
7. $x^2 + x = 2(m + n + 1)$	สัจจพจน์การกระจาย
8. $m + n + 1 = k$, k เป็นจำนวนเต็ม	สัจจพจน์การปิด
9. นั่นคือ $x^2 + x = 2k$	นิยาม
10. $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่	นิยาม

แสดงให้เห็นว่า ถ้า x เป็นจำนวนคี่แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่ จาก ก. และ ข. สรุปได้ว่า ถ้า x เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้ว $x^2 + x$ เป็นจำนวนคู่

ข. ใช้วิธีการสร้าง counter example ที่ได้จากเหตุหลาย ๆ กรณี แล้วพยายาม disprove กรณีที่เป็นไปไม่ได้ออกไปให้เหลือกรณีที่ต้องการ ซึ่งมีแบบแผนดังนี้

ต้องการพิสูจน์ $P \rightarrow Q$

จาก P สามารถสร้าง conclusion ใหม่ดังนี้ Q_1, Q_2, Q_3, Q_4

ดังนั้น ต้องพยายาม disprove กรณีต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นดังนี้

$P \rightarrow Q_1$

$P \rightarrow Q_2$

$P \rightarrow Q_3$

$P \rightarrow Q_4$

โดยให้เหลือเพียงกรณีเดียว แล้วสรุปกรณีที่เหลือ คือ ข้อความที่เราต้องการพิสูจน์ดังนี้

<u>ตัวอย่าง</u> x, y เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จงพิสูจน์ว่า ถ้า xy เป็นจำนวนคี่แล้ว x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคี่

<u>วิธีทำ</u> xy เป็นจำนวนคี่ อาจเกิดขึ้นหลายกรณีดังนี้

1. x เป็นจำนวนคู่ y เป็นจำนวนคู่
2. x เป็นจำนวนคู่ y เป็นจำนวนคี่
3. x เป็นจำนวนคี่ y เป็นจำนวนคู่
4. x เป็นจำนวนคี่ y เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น เราจะ disprove กรณีที่ 1 ดังนี้

เพราะว่า 3 . 5 = 15 เป็นจำนวนคี่ โดยที่ 3 เป็นจำนวนคี่ และ 5 เป็นจำนวนคี่ ดังนั้นกรณีที่ 1 เป็นเท็จ

ในทำนองเดียวกัน กรณี 2 และ 3 ก็พิสูจน์เช่นเดียวกันว่าเป็นเท็จ

นั่นคือ xy เป็นจำนวนเต็มคี่ เมื่อ x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคี่

7. การ Proof Equivalence Statement

การพิสูจน์ชนิดนี้ เป็นการพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในแบบแผน $P \leftrightarrow Q$ แต่โดยที่

$$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$$

แสดงว่า ถ้าเราต้องการพิสูจน์ว่า $P \leftrightarrow Q$ เป็นจริงแล้ว เราต้องพิสูจน์ถึง 2 กรณีด้วยกัน คือ ต้องพิสูจน์ว่า $P \rightarrow Q$ เป็นจริง และ $Q \rightarrow P$ เป็นจริง ดังนั้นเขียนสรุปเป็นแบบแผนได้ดังนี้

$(P \leftrightarrow Q)$ ต้องแสดงว่า 1. $P \rightarrow Q$ เป็นจริง

และ 2. $Q \rightarrow P$ เป็นจริง

การพิสูจน์ทั้งสองครั้ง เราอาจจะใช้วิธีการต่าง ๆ จากที่ได้แสดงมาแล้วในตอนต้น ตั้งแต่วิธีที่ 1 ถึง 6 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ a + 2 เป็นจำนวนคู่

<u>วิธีทำ</u> จะพิสูจน์ดังนี้

1. ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a + 2 เป็นจำนวนคู่
2. ถ้า a + 2 เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่

<u>พิสูจน์</u> 1. ($\rightarrow$) พิสูจน์โดยทางตรง

<u>ข้อความ</u>	<u>เหตุผล</u>
1. a เป็นจำนวนคู่	เหตุ
2. $a = 2n$, n เป็นจำนวนเต็ม	นิยาม
3. $a + 2 = 2n + 2$	สัจจพจน์การเท่ากัน
4. $a + 2 = 2(n + 1)$	สัจจพจน์การกระจาย
5. $n + 1 = k$, k เป็นจำนวนเต็ม	สัจจพจน์การปิด
6. $a + 2 = 2k$	สัจจพจน์การเท่ากัน
7. a + 2 เป็นจำนวนคู่	นิยาม

นั่นคือ ถ้า a เป็นจำนวนคู่แล้ว a + 2 เป็นจำนวนคู่ด้วย

พิสูจน์ 2. (←) พิสูจน์ทางตรง

ข้อความ	เหตุผล
1. $a + 2$ เป็นจำนวนคู่	เหตุ
2. $a + 2 = 2m$, m เป็นจำนวนเต็ม	นิยาม
3. $a = 2m - 2$	สัจจพจน์การเท่ากัน
4. $a = 2(m - 1)$	สัจจพจน์การกระจาย
5. $m - 1 = k$, k เป็นจำนวนเต็ม	สัจจพจน์การปิด
6. $a = 2k$	สัจจพจน์การเท่ากัน
7. นั่นคือ a เป็นจำนวนคู่	นิยาม
ดังนั้นแสดงว่า ถ้า $a + 2$ เป็นจำนวนคู่แล้ว a เป็นจำนวนคู่	

สรุปจาก 1 และ 2 ได้ว่า a เป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ $a + 2$ เป็นจำนวนคู่ด้วย

8. Proof by Mathematical Induction

มีการพิสูจน์บางเรื่องในวิชาคณิตศาสตร์ ที่เราไม่สามารถพิสูจน์ให้เป็นจริงในทุกกรณีของทุกสมาชิกในโดเมนได้ ดังนั้น จึงต้องมีการสร้างกฎเกณฑ์ใหม่ขึ้นมา ซึ่งเราเรียกการพิสูจน์แบบนี้ว่าการพิสูจน์แบบ Mathematical Induction จะมีข้อความดังต่อไปนี้

ให้ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ และถ้า $X \subseteq N$ โดยที่

1. $1 \in X$ และ

2. $x + 1 \in X$ เมื่อ $x \in X$ แล้ว $X = N$

เนื่องจากการพิสูจน์แบบนี้มักจะเป็นการพิสูจน์ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก จึงให้ $X = \{x \in N | P(x)\}$ เมื่อ $P(x)$ เป็นประพจน์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น เราสามารถสรุปกฎเกณฑ์ที่กำหนดให้เป็นข้อความใหม่ได้ดังนี้

ถ้า P(1) เป็นจริง และให้ P(k) เป็นจริงแล้ว P(k + 1) เป็นจริง สำหรับทุก k ที่อยู่ใน N แล้วสรุปได้ว่า P(x) เป็นจริง สำหรับทุก $x \in N$

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า $1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{n}{2}(1 + n)$

พิสูจน์ ให้ $P(n) : 1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{n}{2}(1 + n)$

1. พิจารณา $P(1) : 1 = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$ เป็นจริง

2. พิจารณาให้ $P(k) : 1 + 2 \dots + k = \frac{k}{2}(1 + k)$ เป็นจริง สำหรับทุก $k \in N$

3. จะต้องพิสูจน์ว่า $P(k + 1) : 1 + 2 \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)}{2}[1 + (k + 1)]$ เป็นจริง

พิจารณา $1 + 2 \dots + k = \frac{k}{2}(1 + k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $1 + 2 \dots + k + (k + 1) = \frac{k}{2}(1 + k) + (k + 1)$ เป็นจริง

$$= \frac{k(1 + k) + 2(k + 1)}{2}$$

$$= \frac{(k + 1)(k + 2)}{2}$$

$$= \frac{(k + 1)[1 + (k + 1)]}{2}$$

แสดงว่า P(k + 1) เป็นจริง สำหรับทุก $k \in N$

นั่นคือ P(n) ต้องเป็นจริงสำหรับทุก ๆ $n \in N$ ด้วย

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า $(E_1 \cup E_2 \dots \cup E_n)' = E_1' \cap E_2' \dots \cap E_n'$ เมื่อ E_i เป็นเซทใด ๆ $1 \leqslant i \leqslant n$

พิสูจน์ ให้ $P(n) : (E_1 \cup E_2 \dots \cup E_n)' = E_1' \cap E_2' \dots \cap E_n'$

1. พิจารณา $P(2) : (E_1 \cup E_2)' = E_1' \cap E_2'$ (De Morgan)

2. พิจารณาให้ $P(k) : (E_1 \cup E_2 \dots \cup E_k)' = E_1' \cap E_2' \dots \cap E_k'$ เป็นจริง สำหรับทุก $k \in N$

3. จะต้องพิสูจน์ว่า $P(k + 1) : (E_1 \cup E_2 \dots \cup E_{k+1})' = E_1' \cap E_2' \dots \cap E_{k+1}'$ พิจารณา $E_1' \cap E_2' \cap E_3' \dots \cap E_k' = (E_1 \cup E_2 \dots \cup E_k)'$ เป็นจริง

ดังนั้น $E_1' \cap E_2' \ldots \cap E_k' \cap E_{k+1}' = (E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_k)' \cap E_{k+1}'$ เป็นจริง

$$= \{(E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_k) \cup E_{k+1}\}' \text{ (De Morgan)}$$

$$= (E_1 \cup E_2 \ldots \cup E_k \cup E_{k+1})'$$

นั่นคือ $P(k + 1)$ เป็นจริงสำหรับทุก $k \in N$

ดังนั้น $P(n)$ ต้องเป็นจริงสำหรับทุก ๆ $n \in N$ ด้วย

แบบฝึกหัด

1. จงใช้นิยามและสัจจพจน์ที่กล่าวถึงในบทนี้ พิสูจน์โดยใช้

   1. Contrapositive

   2. Contradiction

      ก. ถ้า a^2 เป็นจำนวนคี่แล้ว $a + 1$ เป็นจำนวนคู่

      ข. ถ้า k เป็นจำนวนคู่แล้ว $k^2 + 1$ เป็นจำนวนคี่

2. พิสูจน์ด้วยวิธีใดก็ได้

   ก. ถ้า $a + c \not> b + c$ แล้ว $a \not> b$

   ข. ถ้า $x + 2$ เป็นจำนวนคี่แล้ว x เป็นจำนวนคี่ด้วย

   ค. จำนวนใดที่หารด้วย 3 ลงตัว แล้วกำลังสองของจำนวนนั้นจะหารด้วย 3 ลงตัวด้วย

   ง. กำลังสามของจำนวนคู่จะเป็นจำนวนคู่

   จ. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots + n^2 = [\frac{n}{2}(1 + n)]^2$

   ฉ. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   ช. ให้ E_i เป็นเซทใด ๆ เมื่อ $1 \leqslant i \leqslant n$ จงพิสูจน์ว่า

   $$(E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_n)' = E_1' \cup E_2' \ldots \cup E_n'$$