บทที่ 2

พีชคณิตเมตริกซ์

(Matrix Algebra)

2.1 ระบบจำนวนและฟิลด์ (Number Systems and Fields)

ก่อนที่จะกล่าวถึงเมตริกซ์ จำเป็นต้องกล่าวถึงคุณสมบัติบางอย่างของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณดังต่อไปนี้

2.1.1 จำนวนจริงกับการบวก

(1) คุณสมบัติการสลับที่ (Commutative law)

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$x + y = y + x$$

(2) คุณสมบัติการจัดหมู่ (associative law)

ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

(3) มีจำนวนศูนย์

มีจำนวนจริง 0 ตัวหนึ่งและตัวเดียว (unique identity element) ซึ่งทำให้

$$x + 0 = 0 + x = x$$

(4) มีจำนวนตรงข้ามภายใต้บวก

ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะมีจำนวนจริง y ซึ่งทำให้ $x + y = 0$ และเรียก y ว่าเป็นจำนวนตรงข้ามภายใต้บวกของ x และ $y = -x$

คุณสมบัติของจำนวนจริง ตามข้อ (2), (3) และ (4) เราเรียกว่าเป็นกรุป (group) ภายใต้บวก และเมื่อเพิ่มคุณสมบัติข้อ (1) ไปอีกก็จะเป็นคอมมิวเทที่ฟกรูป (commutative group) ภายใต้บวก

2.1.2 จำนวนจริงกับการคูณ

(1) คุณสมบัติการสลับที่

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$xy = yx$$

(2) คุณสมบัติการจัดหมู่

ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$(x\ y)\ z = x(y\ z)$$

(3) มีจำนวนจริง 1 ตัวหนึ่งและตัวเดียว (unique identity element) ซึ่ง

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(4) สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์จะมีจำนวนจริงตัวหนึ่งและตัวเดียว กำหนดโดย x^{-1} (multiplicative inverse of x) ซึ่ง

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

คุณสมบัติข้อ (2), (3) และ (4) เราเรียกว่าเป็นกรูปภายใต้คูณ และเมื่อเพิ่มคุณสมบัติข้อ (1) เข้าไปอีกก็จะเรียกคอมมิวเทที่ฟกรูปภายใต้คูณ

<u>คุณสมบัติของการเป็นกรูป</u>

เซ็ต G ซึ่งไม่เป็นเซ็ตว่างจะเรียกว่าเป็นกรูป ถ้ามีไบนารี-โอเปอเรชัน กำหนดโดย * ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

(1) ถ้า a, b เป็นสมาชิกของ G แล้ว

$a*b$ เป็นสมาชิกของ G ด้วย

(2) ถ้า a, b, c เป็นสมาชิกของ G แล้ว

$$a*(b*c) = (a*b)*c$$

(3) มีสมาชิก e ซึ่งเป็นสมาชิกของ G ซึ่ง

$a*e = e*a = a$ สำหรับทุก ๆ a ซึ่งเป็นสมาชิกของ G

(4) สำหรับทุก ๆ a ซึ่งเป็นสมาชิกของ G จะมี a^{-1} ซึ่งเป็นสมาชิกของ G ซึ่ง

$$a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$$

<u>คุณสมบัติของคอมมิวเทฟกรูป</u>

กรูป G จะเรียกว่าเป็นคอมมิวเทฟกรูป ถ้าสำหรับทุก ๆ a, b ซึ่งเป็นสมาชิกของ G แล้ว

$$a*b = b*a$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของคอมมิวเทฟกรูป

(a) ระบบจำนวนจริง (R) ภายใต้บวก

(b) ระบบจำนวนจริง (R) ไม่รวมศูนย์ สร้างคอมมิวเทฟกรูปภายใต้คูณ

(c) ระบบจำนวนเชิงซ้อน (C) ภายใต้บวก

(d) ระบบจำนวนเชิงซ้อน (C) ไม่รวมศูนย์ ภายใต้คูณ

เมื่อ $= \{x + iy \mid x, y \in R\}$

(e) ระบบจำนวนตักยะ (Q) ภายใต้บวก

(f) ระบบจำนวนตักยะ (Q) ไม่รวมศูนย์ ภายใต้คูณ

เมื่อ $Q = \{p/_q \mid p, q \in I$ และ $q \neq 0\}$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ระบบจำนวนเต็ม (I) ไม่รวมศูนย์ไม่เป็นกรุปภายใต้คูณ

เพราะว่าสำหรับ $2 \in I$ จะมี $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ซึ่ง

$$2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

แต่ $\frac{1}{2} \notin I$ ดังนั้นไม่เป็นไปตามคุณสมบัติข้อ 4

นอกจากนี้แล้วจำนวนจริงยังมีคุณสมบัติเพิ่มเติมอีกเรียกว่าการกระจาย คูณไปยังบวก คือ.-

2.1.3 <u>กฎการกระจาย</u> (distributive law)

สำหรับจำนวนจริง x, y และ z ใด ๆ

$$(x + y)\cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

และ

$$z\,(x + y) = z \cdot x + z \cdot y$$

สำหรับเซ็ตใด ๆ ที่มีคุณสมบัติทุกข้อในข้อ 2.1.1, 2.1.2 และ 2.1.3 เรียกว่าฟิลด์ (field)

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของฟิลด์

(a) ระบบจำนวนจริง

(b) ระบบจำนวนเชิงซ้อน

ซึ่ง $= \{x + iy \mid x, y \in R\}$

เมื่อ $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

(c) ระบบจำนวนตรรกยะ Q ซึ่ง

$Q = \{p/_q \mid p, q \in I$ และ $q \neq 0\}$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> กำหนดเซ็ต $\beta = \{0, 1\}$ ตามคุณสมบัติการบวกและการคูณข้างล่างนี้ เป็นฟิลด์

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

สำหรับเซ็ตใดมีคุณสมบัติในข้อ 2.1.1 และคุณสมบัติตามข้อ (2) ของ 2.1.2 และคุณสมบัติในข้อ 2.1.3 เราเรียกว่าริง (ring) ถ้าเพิ่มคุณสมบัติข้อ (3) ของ 2.1.2 เข้าไป จะเรียกริงกับเอกลักษณ์ แต่ถ้าเพิ่มคุณสมบัติข้อ (1) ของ 2.1.2 เข้าไป จะเรียกคอมมิวเทที่ฟริง ดังจะได้กล่าวต่อไปนี้

<u>คุณสมบัติของริง</u>

เซ็ต R ซึ่งไม่เป็นเซ็ตว่างจะเรียกว่าเป็นริงถ้ามีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) ถ้า a, b เป็นสมาชิกของ R แล้ว

$a + b$ เป็นสมาชิกของ R ด้วย

(2) ถ้า a, b เป็นสมาชิกของ R

$a + b = b + a$

(3) ถ้า a, b, c เป็นสมาชิกของ R

$(a + b) + c = a + (b + c)$

(4) มีสมาชิก 0 ซึ่งเป็นสมาชิกของ R โดยที่

$a + 0 = a$ (สำหรับทุก ๆ a ซึ่งเป็นสมาชิกของ R)

(5) มีสมาชิก $-a$ ซึ่งเป็นสมาชิกของ R โดยที่

$a + (-a) = 0$ (สำหรับทุก ๆ a ซึ่งเป็นสมาชิกของ R)

(6) ถ้า a, b เป็นสมาชิกของ R แล้ว

$a \cdot b$ เป็นสมาชิกของ R ด้วย

(7) ถ้า a, b, c เป็นสมาชิกของ R แล้ว

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

(8) ถ้า a, b, c เป็นสมาชิกของ R แล้ว

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

และ $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

<u>คุณสมบัติของริงกับเอกลักษณ์</u> (ring with unit element)

สำหรับริง R ถ้ามีสมาชิก 1 ซึ่งเป็นสมาชิกของ R โดยที่ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ สำหรับทุก ๆ a ซึ่งเป็นสมาชิกของ R แล้ว เราจะเรียกริง R ว่า ริงกับเอกลักษณ์

<u>คุณสมบัติของคอมมิวเทที่ฟริง</u> (Commutative ring)

ถ้า a, b เป็นสมาชิกใด ๆ ของริง R และ

$$a \cdot b = b \cdot a$$

แล้วจะเรียกริง R ว่าคอมมิวเทที่ฟริง

คุณสมบัติของอินทิกรัลโดเมน (integral domain)

คอมมิวเทที่ฟริง R จะเป็นอินทิกรัลโดเมน ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $a \neq 0$ และทุก ๆ $b \neq 0$ ซึ่งเป็นสมาชิกของ R แล้ว $a \cdot b \neq 0$

คุณสมบัติของฟิลด์โดยทั่วไป

ถ้า $\mathfrak{F}$ เป็นเซ็ตที่ไม่ว่าง และมีคุณสมบัติต่อไปนี้แล้ว $\mathfrak{F}$ จะเป็นฟิลด์

(1) ถ้า a, b, c เป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ แล้ว

ก. $a = a$

ข. $a = b$ แล้ว $b = a$

ค. $a = b$, $b = c$ แล้ว $a = c$

ง. $a = b$ แล้ว a และ b สามารถทดแทนกันได้ทุกกรณี

(2) ถ้า a, b เป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ แล้ว

$a + b$ จะเป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ ด้วย

$a \cdot b$ (หรือเขียนย่อว่า ab) เป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ ด้วย

(3) ถ้า a, b เป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ แล้ว

$a + b = b + a$

$a \cdot b = b \cdot a$

(4) ถ้า a, b, c เป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ แล้ว

$(a + b) + c = a + (b + c)$

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(5) ถ้า a, b, c เป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ แล้ว

$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(6) มีสมาชิก o เป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ ซึ่ง
ถ้า x เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $\mathfrak{F}$
แล้ว $x + 0 = x$

(7) ถ้า x เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $\mathfrak{F}$ แล้วจะมีสมาชิก $-x$ ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ และ $x + (-x) = 0$

(8) มี e เป็นสมาชิกของ $\mathfrak{F}$ ซึ่งถ้า x เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $\mathfrak{F}$ แล้ว $x \cdot e = x$

(9) ถ้าสมาชิก x ของ $\mathfrak{F}$ ไม่เป็น o แล้วจะมีสมาชิก x^{-1} ของ $\mathfrak{F}$ ซึ่งทำให้ $x \cdot x^{-1} = e$

<u>หมายเหตุ</u> สมาชิกของฟิลด์ $\mathfrak{F}$ ต่อไปจะเรียกว่าสกาลาร์

2.2 <u>เมตริกซ์</u> (Matrices)

<u>นิยาม 2.1</u> เมตริกซ์บนฟิลด์ $\mathfrak{F}$ คือกลุ่มของสมาชิกจากฟิลด์ $\mathfrak{F}$ ซึ่งนำมาจัดเรียงกันอย่างเป็นระเบียบในรูปของสี่เหลี่ยมมุมฉาก

รูปทั่วไปของเมตริกซ์คือ

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

เพื่อความสะดวกบางครั้งจะเขียนแทนด้วย

$$A = \left[a_{ij} \right]_{(m,n)} \quad \text{หรือ} \quad \left[a_{ij} \right]$$

เมตริกซ์ที่มี m แถว (row) และ n หลัก (column) เรียกว่าเมตริกซ์ขนาด (m x n) อ่านว่า m คูณ n (m by n) สมาชิก a_{ij} หมายถึงสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i และอยู่ในหลักที่ j แสดงดังภาพ

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccccc} \text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3} & & \text{หลักที่ } j & & \text{หลักที่ } n \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & \boxed{a_{ij}} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \text{แถวที่ 1} \\ \text{แถวที่ 2} \\ \\ \text{แถวที่ } i \\ \\ \text{แถวที่ } m \end{array}
\end{array}$$

โดยทั่วไปจะใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ในภาษาอังกฤษ A, B, C, ... แทนเมตริกซ์ต่าง ๆ และใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวเขียนเล็ก แทนสมาชิกของเมตริกซ์

ถ้าเมตริกซ์มีสมาชิกเพียงแถวเดียวเรียกว่าเมตริกซ์แถว (row matrix)

ถ้าเมตริกซ์มีสมาชิกเพียงหลักเดียวเรียกว่าเมตริกซ์หลัก (column matrix)

การเขียนเมตริกซ์แถวอาจใช้จุลภาค (comma) คั่นระหว่างสมาชิกของเมตริกซ์ได้

ตัวอย่างเช่น

$X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ เป็นเมตริกซ์แถว

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์หลัก

<u>ข้อตกลง</u>

จะเขียนแถวที่ i ของเมตริกซ์ A ด้วย

$$\mathrm{Row}_i(A) = \left(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\right)$$

จะเขียนหลักที่ j ของเมตริกซ์ A ด้วย

$$\mathrm{Col}_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

และจะเขียนสมาชิกของเมตริกซ์ A ในตำแหน่ง (i, j) ด้วย

$$\mathrm{ent}_{ij}(A) = a_{ij}$$

สำหรับเมตริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก $(m = n)$ เรียกว่าเมตริกซ์จัตุรัส (square matrix) ของอันดับที่ n

เมื่อ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสของอันดับที่ n สมาชิก $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ เรียกว่าทำให้เกิดทะแยงมุมหลัก (main diagonal) ของ A สมาชิก $a_{n,1}, a_{n-1,2}, \ldots a_{1n}$ เรียกว่าทำให้เกิดทะแยงมุมรอง (secondary diagonal) ของ A

2.2.1 <u>การเท่ากันของเมตริกซ์</u> (Equality of Matrices)

<u>นิยาม 2.2</u> เมตริกซ์ $A = \left(a_{ij}\right)_{(m,n)}$ และ $B = \left(b_{ij}\right)_{(m,n)}$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$

นั่นคือเมตริกซ์สองเมตริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกัน (corresponding element) เท่ากัน

<u>คุณสมบัติของการเท่ากันของเมตริกซ์</u>

(a) ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ใด ๆ แล้ว

$A = B$ หรือ $A \neq B$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

เรียกว่าคุณสมบัติความแน่นอน (determinative property)

(b) ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ แล้ว

$A = A$

เรียกว่าคุณสมบัติการสะท้อน (reflexive property)

(c) ถ้า $A = B$ แล้ว $B = A$

เรียกว่าคุณสมบัติสมมาตร (symmetric property)

(d) ถ้า $A = B$ และ $B = C$ แล้ว $A = C$

เรียกว่าคุณสมบัติการถ่ายทอด (transitive property)

คุณสมบัติเหล่านี้เรียกว่าความสัมพันธ์เท่ากัน (equivalent relation)

คุณสมบัติเหล่านี้พิสูจน์ได้โดยอาศัยนิยามของการเท่ากันของเมตริกซ์และคุณสมบัติของฟิลด์ ดังจะแสดงการพิสูจน์ต่อไปนี้

พิสูจน์ (a) จากนิยาม 2.2 จะได้ว่า

$A = B$ ต่อเมื่อ A และ B มีขนาดเท่ากัน และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน นอกเหนือจากนี้เช่นขนาดของ A ไม่เท่ากับขนาดของ B หรือสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันไม่เท่ากันจะได้ว่า $A \neq B$

$\therefore$ จะได้ว่า $A = B$ หรือ $A \neq B$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

(b) เพราะว่าเมตริกซ์ทั้งสองเป็นเมตริกซ์เดียวกัน จึงได้ว่าขนาดของเมตริกซ์ทั้งสองเท่ากัน และสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากัน จึงได้ว่า $A = A$

(c) ถ้า $A = B$ จะได้ว่า

ขนาดของ A เท่ากับขนาดของ B

นั่นคือ ขนาดของ B เท่ากับขนาดของ A

และ $a_{ij} = b_{ij}$

จากคุณสมบัติของฟิลด์จะได้ว่า

$$b_{ij} = a_{ij}$$

ดังนั้น $B = A$

(d) กำหนด $A = B$ และ $B = C$

จาก $A = B$ จะได้ว่าขนาดของ A เท่ากับขนาดของ B

และ $a_{ij} = b_{ij}$

จาก $B = C$ จะได้ว่าขนาดของ B เท่ากับขนาดของ C

และ $b_{ij} = c_{ij}$

เมื่อ $A = B$ และ $B = C$

ดังนั้นจะได้ว่าขนาดของ A เท่ากับขนาดของ C เพราะต่างเท่ากับขนาดของ B

จากคุณสมบัติของฟิลด์ จะได้ว่า

$$a_{ij} = c_{ij}$$

นั่นคือ $A = C$

2.2.2 <u>การบวกของเมตริกซ์</u> (Addition of Matrices)

<u>นิยาม 2.3</u> ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{(m,n)}$ เรากำหนดผลบวก $A + B$ เป็นเมตริกซ์ $\left[(a_{ij} + b_{ij})\right]_{(m,n)}$

นั่นคือการบวกเมตริกซ์เกิดขึ้นได้ต่อเมื่อเมตริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และการบวกจะบวกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกัน (corresponding elements)

หรือกล่าวได้ว่า $\text{ent}_{ij}(A + B) = \text{ent}_{ij}(A) + \text{ent}_{ij}(B)$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> $\begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 1+t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1+t & -2 \\ 1 & 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

เมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากันเรียกว่าเมตริกซ์นั้นสอดคล้องสำหรับการบวก (conformable for addition)

<u>ทฤษฎี 2.2</u> การบวกเมตริกซ์มีคุณสมบัติการสลับที่และคุณสมบัติการจัดหมู่ ถ้า A, B และ C สอดคล้องสำหรับการบวก

(a) $A + B = B + A$

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$

<u>พิสูจน์</u> (a) ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{(m,n)}$

เพราะฉะนั้น $A + B = \left[(a_{ij} + b_{ij})\right]_{(m,n)}$ โดยนิยาม 2.3

$= \left[(b_{ij} + a_{ij})\right]_{(m,n)}$ โดยคุณสมบัติของฟิลด์

$= B + A$ โดยนิยาม 2.3

(b) ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{(m,n)}$ และ
$C = \left[c_{ij}\right]_{(m,n)}$

เพราะฉะนั้น

$$A + (B + C) = \left[a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})\right]_{(m,n)}$$ โดยนิยาม 2.3

$$= \left[(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}\right]_{(m,n)}$$

โดยคุณสมบัติของฟิลด์

$$= (A + B) + C$$ โดยนิยาม 2.3

2.2.3 **การลบของเมตริกซ์** (Substraction of Matrices)

นิยาม 2.4 เมตริกซ์ซึ่งสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เรียกว่าเมตริกซ์ศูนย์ (zero matrix) และเขียนแทนด้วย 0 หรือ 0_n หรือ 0_{mxn} เมื่อต้องการที่จะย้ำขนาดของเมตริกซ์นั้น

ทฤษฎี 2.2 มีเมตริกซ์ 0 อันหนึ่งและอันเดียวเท่านั้นที่

$A + 0 = 0 + A = A$ เมื่อ A เป็น (m x n) เมตริกซ์ใด ๆ

พิสูจน์ เนื่องจากเมตริกซ์ $0_{m \times n}$ มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์

ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)}$ เป็น (m x n) เมตริกซ์ใด ๆ

$$\therefore A + 0 = \left[a_{ij} + 0\right]_{(m,n)} = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)} = A$$

$$0 + A = \left[0 + a_{ij}\right]_{(m,n)} = \left[a_{ij}\right]_{(m,n)} = A$$

ดังนั้น $A + 0 = 0 + A = A$

ต่อไปจะพิสูจน์ว่ามีเมตริกซ์ 0 เพียงเมตริกซ์เดียวเท่านั้น ที่ทำให้

$$A + 0 = 0 + A = A$$

สมมุติให้ $C = [c_{ij}]_{(m,n)}$ เป็นเมตริกซ์อื่นซึ่งทำให้

$A + C = A$ เมื่อ A เป็น $(m \times n)$ เมตริกซ์ใด ๆ

ดังนั้น $O + C = O$ ....(i)

และเนื่องจาก $A + O = A$ สำหรับแต่ละ $(m \times n)$ เมตริกซ์ A ใด ๆ

เราจะได้ $C + O = C$

แต่ $O + C = C + O$ จากคุณสมบัติการสลับที่ของเมตริกซ์

ดังนั้น $O + C = C$ ....(ii)

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า $C = O$

เมตริกซ์ศูนย์นี้เรียกว่าเอกลักษณ์สำหรับการบวก (identity element for addition) ของเมตริกซ์

<u>นิยาม 2.5</u> ลบ (negative) ของเมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{(m,n)}$ กำหนดโดย $-A = [-a_{ij}]_{(m,n)}$ โดยที่ $\{a_{ij} + (-a_{ij}) = 0\}$

ตามคุณสมบัติของฟิลด์

นั่นคือลบของเมตริกซ์ A สร้างขึ้นโดยเปลี่ยนเครื่องหมายของสมาชิกทุกตัวของ A เป็นตรงกันข้าม

ผลของนิยามนี้ยืนยันคุณสมบัติที่ว่า

<u>ทฤษฎี 2.3</u> $A + (-A) = O$

เพราะว่า $\{a_{ij} + (-a_{ij}) = 0\}$

เรียก $-A$ ว่าเป็นอินเวอร์ส (inverse) ของ A ภายใต้บวก

และจะเขียน $A - A$ แทน $A + (-A)$

หรือในรูปทั่วไป

$$A - B = A + (-B)$$

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>ทฤษฎี 2.4</u> ถ้า $A + C = B + C$ แล้ว $A = B$ เรียกว่ากฎการตัดออกสำหรับการบวก (Cancellation law for addition)

<u>พิสูจน์</u>

$$A + C = B + C$$

บวกด้วย $(-C)$ เข้าไปทั้งสองข้าง จะได้

$$(A + C) + (-C) = (B + C) + (-C)$$

$$A + (C - C) = B + (C - C)$$

$$A = B$$

<u>ทฤษฎี 2.5</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ จะมี $-A$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$A + (-A) = O$$

<u>พิสูจน์</u> โดยทฤษฎี 2.3 $A + (-A) = O$

ให้ $(-B)$ เป็นเมตริกซ์อื่น ๆ ซึ่ง

$$A + (-B) = O$$

ฉะนั้นจะได้ $A + (-A) = A + (-B)$

โดยใช้กฎการตัดออกสำหรับการบวกในทฤษฎี 2.4 จะได้

$$(-A) = (-B)$$

นั่นคือ จะมี $-A$ เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$$A + (-A) = O$$

2.2.4 <u>การคูณเมตริกซ์ด้วยสกาลาร์</u> (Scalar Multiplication of Matrices)

สกาลาร์ที่เรากล่าวถึงนี้คือสมาชิกที่อยู่ในฟิลด์

สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ

$2x$ หมายถึง $x + x$

$3x$ หมายถึง $x + x + x$

หรือ $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}x = x$

สำหรับเมตริกซ์ก็เขียน $A + A = 2A$

$A + A + A = 3A$ .... ฯลฯ

จึงทำให้เกิดนิยามของการคูณเมตริกซ์ด้วยสกาลาร์ขึ้น ซึ่งในที่นี้ 2 และ 3 เป็นสกาลาร์ และ A เป็นเมตริกซ์

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

เราเขียน

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

นั่นคือจะได้ว่า

$$3\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 3b \\ 3c & 3d \end{pmatrix}$$

<u>นิยาม 2.6</u> ถ้า $A = [a_{ij}]$ และ α เป็นสกาลาร์แล้ว

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]$$

นั่นคือการคูณเมตริกซ์ A ด้วยสกาลาร์ α คือการคูณทุก ๆ สมาชิกของ A ด้วย α

หรือกล่าวได้ว่า $ent_{ij}(\alpha A) = \alpha\, ent_{ij}(A)$

<u>ทฤษฎี 2.6</u> เมื่อ A และ B เป็นเมตริกซ์ที่สอดคล้องสำหรับการบวกและ α และ β เป็นสกาลาร์ใด ๆ แล้ว

(1) $0A = O$

(2) $1A = A$

(3) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

(5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

<u>พิสูจน์</u> (1) และ (2) เห็นได้ชัดจากนิยาม 2.6

(3) $(\alpha + \beta)A = [(\alpha + \beta)\, a_{ij}]$ นิยาม 2.6

$= [\alpha a_{ij} + \beta a_{ij}]$ คุณสมบัติของฟิลด์

$= [\alpha a_{ij}] + [\beta a_{ij}]$ นิยาม 2.3

$= \alpha A + \beta A$ นิยาม 2.6

สำหรับ (4) และ (5) ให้ผู้อ่านลองพิสูจน์เอง

เพื่อความสะดวกในการเรียกชื่อ จะใช้ $\mathfrak{F}_{m \times n}$ แทนของทุก ๆ $(m \times n)$ เมตริกซ์ บนฟิลด์ $\mathfrak{F}$ และ $\mathbb{C}_{m \times n}$ แทนเซ็ตของทุก ๆ $(m \times n)$ เมตริกซ์ บนฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน

<u>นิยาม 2.7</u> เซ็ตของทุก ๆ $(m \times n)$ เมตริกซ์ บนฟิลด์ $\mathcal{F}$ จะเขียนแทนด้วย $\mathcal{F}_{m \times n}$ และเซ็ตของทุก ๆ $(m \times n)$ เมตริกซ์ บนฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน (Complex number) จะเขียนแทนด้วย $\mathbb{C}_{m \times n}$

<u>ข้อสังเกต</u> $\mathcal{F}_{m \times n}$ กับการบวกเมตริกซ์มีคุณสมบัติดังนี้

(1) คุณสมบัติปิด

(2) คุณสมบัติการจัดหมู่

(3) มีเอกลักษณ์ของการบวก

(4) มีอินเวอร์สของการบวก

(5) คุณสมบัติการสลับที่

คุณสมบัติ 4 ข้อแรกทำให้ $\mathcal{F}_{m \times n}$ เป็นกรุป เมื่อรวมคุณสมบัติข้อ (5) ทำให้ $\mathcal{F}_{m \times n}$ เป็นคอมมิวเทที่ฟกรุป

2.2.5 <u>การคูณของเมตริกซ์</u> (Matrix Multiplication)

ในส่วนนี้จะต้องเกี่ยวข้องกับสัญลักษณ์ซัมเมชั่น (summation notation)

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ หมายถึง $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ เมื่อ a_i อยู่ในฟิลด์

$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ หมายถึง $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ เมื่อ $a_i b_i$ อยู่ในฟิลด

$\sum_{i=1}^{n} c a_i b_i$ หมายถึง $c a_1 b_1 + c a_2 b_2 + \dots + c a_n b_n$ เมื่อ c, a_i, b_i อยู่ในฟิลด์

<u>คุณสมบัติของสัญลักษณ์ซัมเมชั่น</u>

(1) $\sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i)Z_i = \sum_{i=1}^{n} X_iZ_i + \sum_{i=1}^{n} Y_iZ_i$

(2) $\sum_{i=1}^{n} c(X_iY_i) = c \sum_{i=1}^{n} X_iY_i$

(3) $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$

ในที่นี้จะพิสูจน์ข้อ (1) เพื่อเป็นแนวทางเท่านั้นส่วนข้ออื่น ๆ ผู้อ่านลองพิสูจน์เอง

<u>พิสูจน์</u> (1) $\sum_{i=1}^{n} (X_i+ Y_i)Z_i = (X_1+ Y_1)Z_1+ (X_2+ Y_2)Z_2+\cdots+(X_n+Y_n)Z_n$

$= (X_1Z_1+ Y_1Z_1)+ (X_2Z_2 + Y_2Z_2) +\cdots+ (X_nZ_n + Y_nZ_n)$

$= (X_1Z_1 + X_2Z_2+\cdots+ X_nZ_n) + (Y_1Z_1 + Y_2Z_2+\cdots+ Y_nZ_n)$

$= \sum_{i=1}^{n} X_iZ_i + \sum_{i=1}^{n} Y_iZ_i$

<u>นิยาม 2.8</u> ให้ $A = [a_1, a_2, \ldots, a_m]$ เป็น $(1 \times m)$ เมตริกซ์ และ

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ เป็น $(m \times 1)$ เมตริกซ์ บนฟิลด์ $\mathcal{F}$

กำหนดผลคูณ AB เป็น

$$AB = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, \ldots, & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_mb_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_ib_i \end{bmatrix}$$

เป็น (1×1) เมตริกซ์

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{(m,n)}$ เป็น $(m \times n)$ เมตริกซ์ และ $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{(n \times p)}$ เป็น $(n \times p)$ เมตริกซ์ บนฟิลด์ $\mathcal{F}$ ผลคูณ AB กำหนดโดยเมตริกซ์ $C = \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix}_{(m,p)}$ เป็น $(m \times p)$ เมตริกซ์ ซึ่ง

$$c_{ij} = \text{ent}_{ij}\,(AB)$$

$$= a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{in}\, b_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \quad (i = 1,2,\ldots, m; \; j = 1,2,\ldots, p)$$

<u>ข้อสังเกต</u> A และ B เป็นเมตริกซ์ใด ๆ

(1) เมตริกซ์ AB จะมีได้ก็ต่อเมื่อจำนวนหลักของ A เท่ากับจำนวนแถวของ B ในกรณีนี้เราเรียกว่า A และ B สอดคล้องสำหรับการคูณ (conformable for multiplication)

(2) ผลคูณ AB ที่ได้จะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ A และจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของเมตริกซ์ B

<u>ตัวอย่างที่ 7</u>

(a) $$\begin{bmatrix} 2, & 3, & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1) + 3(2) + 4(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

(b) $$\begin{bmatrix} 3, & 1, & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 - 6 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} = 0$$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ และ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1)+ 1(2)+(-1)(0) & 2(0)+ 1(2)+ (-1)(-1) \\ 0(1)+ 1(2)+ 6(0) & 0(0)+ 1(2)+ 6(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1(2)+ 0(0) & 1(1)+ 0(1) & 1(-1)+ 0(6) \\ 2(2)+ 2(0) & 2(1)+ 2(1) & 2(-1)+ 2(6) \\ 0(2)+ (-1)(0) & 0(1)+(-1)(1) & 0(-1)+(-1)(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 10 \\ 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

<u>ข้อสังเกต</u> $AB \neq BA$ ฉะนั้นการคูณเมตริกซ์ไม่เป็นไปตามกฎการสลับที่ (commutative law)

การคูณเมตริกซ์เป็นไปตามกฎการกระจาย (distributive law) และกฎการจัดหมู่ (Associative law) ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 2.7</u> ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็น $(m \times n)$ เมตริกซ์ $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็น $(n \times p)$ เมตริกซ์ แล้ว

$A(B + C) = AB + AC$ เรียกว่าคุณสมบัติการกระจายทางซ้าย

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากสมาชิกของแถวที่ i ของ A คือ

$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$

และสมาชิกของหลักที่ j ของ $B + C$ คือ

$b_{1j} + c_{1j}, b_{2j} + c_{2j}, \ldots, b_{nj} + c_{nj}$

ดังนั้นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของ $A(B + C)$ คือ

$$a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \ldots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj}$$

ซึ่งเป็นผลบวกของสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของ AB และ AC

เพราะฉะนั้น $A(B + C) = AB + AC$

ถ้า $B = [b_{ij}]$ และ $C = [c_{ij}]$ เป็น $(m \times n)$ เมตริกซ์ และ $A = [a_{ij}]$ เป็น $(n \times p)$ เมตริกซ์ สามารถพิสูจน์ได้เช่นเดียวกันว่า

$$(B + C)A = BA + CA$$

เรียกว่าคุณสมบัติการกระจายทางขวา

<u>ทฤษฎี 2.8</u> ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็น $(m \times n)$ เมตริกซ์ $B = [b_{ij}]$ เป็น $(n \times p)$ เมตริกซ์ และ $C = [c_{ij}]$ เป็น $(p \times r)$ เมตริกซ์ แล้ว

$$A(BC) = (AB)C$$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากสมาชิกของแถวที่ i ของ A คือ

$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$

และสมาชิกของหลักที่ j ของ BC คือ

$$\sum_{h=1}^{p} b_{1h} c_{hj}, \quad \sum_{h=1}^{p} b_{2h} c_{hj}, \ldots, \sum_{h=1}^{p} b_{nh} c_{hj}$$

ดังนั้นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของ $A(BC)$ คือ

$$a_{i1} \sum_{h=1}^{p} b_{1h} c_{hj} + a_{i2} \sum_{h=1}^{p} b_{2h} c_{hj} + \cdots + a_{in} \sum_{h=1}^{n} b_{nh} c_{hj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{h=1}^{p} b_{kh} c_{hj} \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kh} \right) c_{hj}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1} \right) c_{1j} + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k2} \right) c_{2j} + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kp} \right) c_{pj}$$

ซึ่งเป็นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของ $(AB)C$

เพราะว่าสมาชิกในแถวที่ i ของ AB คือ

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k1}, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kp}$$

และสมาชิกในหลักที่ j ของ C คือ

$c_{1j}, c_{2j}, \ldots, c_{pj}$

เพราะฉะนั้น $A(BC) = (AB)C$

จากทฤษฎี 2.8 จะเขียนผลคูณ ABC โดยไม่ต้องใส่วงเล็บก็ได้

สำหรับรูปทั่วไปของการคูณ

$A_1A_2 \cdots A_t$ จะสอดคล้องสำหรับการคูณถ้าผลคูณ A_rA_{r+1} สอดคล้องสำหรับการคูณเมื่อ $r = 1, 2, \ldots, t-1$

และเมื่อ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสแล้ว

$$A^2 = A\ A$$

$$A^3 = A\ A\ A$$

$$\vdots$$

$$A^n = \underbrace{A\ A\ A \cdots A}_{n \text{ ตัว}}$$

<u>ทฤษฎี 2.9</u> ถ้า A เป็น $(m \times n)$ เมตริกซ์ และ B เป็น $(n \times p)$ เมตริกซ์ จะได้

$$\left[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } AB\right] = \left[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } A\right] B$$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากสมาชิกในแถวที่ i และ หลัก ที่ j ของเมตริกซ์ AB คือ

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

ดังนั้น

$$\left[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } AB\right] = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1},\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2}, \ldots,\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp}\right)$$

แต่เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix}\text{แถวที่ } i \text{ ของ } A\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}, \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k2}, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kp}\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}\text{แถวที่ } i \text{ ของ } AB\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{แถวที่ } i \text{ ของ } A\end{bmatrix} B$$

<u>ตัวอย่างที่ ๑</u> กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 17 & 18 \end{pmatrix}$

เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix}\text{แถวที่ } 1 \text{ ของ } A\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}1, 2, 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}8, 6\end{bmatrix}$$

และ $\begin{bmatrix}\text{แถวที่ } 1 \text{ ของ } AB\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8, 6\end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix}\text{แถวที่ } 1 \text{ ของ } A\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}\text{แถวที่ } 1 \text{ ของ } AB\end{bmatrix}$

เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix}\text{แถวที่ } 2 \text{ ของ } A\end{bmatrix} B = \begin{bmatrix}4, 5, 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}17, 18\end{bmatrix}$$

และ $\begin{bmatrix} \text{แถวที่ 2 ของ } AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17, & 18 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} \text{แถวที่ 2 ของ } A \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} \text{แถวที่ 2 ของ } AB \end{bmatrix}$

<u>ทฤษฎี 2.10</u> ให้ A เป็น $(m \times n)$ เมตริกซ์ B เป็น $(n \times p)$ เมตริกซ์ และ α เป็นสกาลาร์ใด ๆ แล้วจะได้ว่า

$$A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$$

<u>พิสูจน์</u> สมาชิกในแถวที่ i ของเมตริกซ์ A คือ

$a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$

สมาชิกในหลักที่ j ของเมตริกซ์ αB คือ

$\alpha b_{1j}, \alpha b_{2j}, \ldots, \alpha b_{nj}$

เพราะฉะนั้นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ $A(\alpha B)$ คือ

$a_{i1} \alpha b_{1j} + a_{i2} \alpha b_{2j} + a_{i3} \alpha b_{3j} + \cdots + a_{in} \alpha b_{nj}$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \alpha a_{ik} b_{kj} = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

ซึ่งเท่ากับสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของ $(\alpha A)B$ และ $\alpha(AB)$ ตามลำดับ

เพราะฉะนั้นจะได้

$$A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$$

<u>นิยาม 2.9</u> เมตริกซ์จัตุรัส $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ ซึ่ง $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$ เรียกว่า เมตริกซ์ทะแยง (diagonal matrix) เขียนแทนด้วย

$\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์ทะแยง

<u>นิยาม 2.10</u> เมตริกซ์ทะแยง $A = [a_{ij}]$ ซึ่งสมาชิกทุกตัวบนเส้นทะแยงมุมหลัก (main diagonal) เท่ากัน

นั่นคือ $a_{ij} = c$ สำหรับ $i = j$

และ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$

เรียกว่า สกาลาร์เมตริกซ์ (Scalar matrix)

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> เมตริกซ์ต่อไปนี้เป็นสกาลาร์เมตริกซ์

$$0_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

สำหรับ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ มีชื่อเฉพาะว่าเมตริกซ์เอกลักษณ์อันดับที่ 3

<u>นิยาม 2.11</u> เมตริกซ์ทะแยงขนาด $(n \times n)$ ซึ่งสมาชิกทั้งหมดบนทะแยงมุมหลัก (main diagonal) เป็น 1

นั่นคือ $a_{ij} = 1$ สำหรับ $i = j$

และ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$

เรียกว่า เมตริกซ์เอกลักษณ์อันดับที่ n (identity matrix of order n) และเขียนแทนด้วย

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด (m x n) สามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายโดยใช้นิยาม 2.8 ว่า

$$I_m A = AI_n = A$$

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> เมตริกซ์เอกลักษณ์อันดับที่ 2 คือ

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ถ้า $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $I_2 A = A$

เมตริกซ์เอกลักษณ์อันดับที่ 3 คือ

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $AI_3 = A$

2.2.6 <u>อินเวอร์สของเมตริกซ์</u> (The inverse of a Matrix)

<u>นิยาม 2.12</u> ให้ A เป็น (n x n) เมตริกซ์ จะเรียกเมตริกซ์ A ว่า นอนซิงกูลาร์ เมตริกซ์ (non singular matrix) ถ้ามี (n x n) เมตริกซ์ B ซึ่งทำให้

$$AB = BA = I_n$$

และจะเรียกเมตริกซ์ B ว่าเป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ A

ถ้า A ไม่เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์จะเรียกเมตริกซ์ A ว่า ซิงกูลาร์เมตริกซ์ (singular matrix)

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

เนื่องจาก

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $AB = BA = I_2$

นั่นคือ B เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ A และ A เป็นนอน-ซิงกูลาร์ เมตริกซ์

เมตริกซ์จัตุรัสบางอันก็ไม่มีอินเวอร์สดังเช่น ตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 13</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

สมมุติ $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ เป็นอินเวอร์สของ A

ดังนั้น

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

นั่นคือ $a + 2c = 1$

$2a + 4c = 0$

เพราะฉะนั้น

$a + 2c = 1$

และ $a + 2c = 0$

นั่นคือ $1 = 0$ ซึ่งเป็นเท็จ

ฉะนั้นสมการดังกล่าวนี้ไม่มีเซ็ตคำตอบ

ดังนั้นจึงไม่มีเมตริกซ์ B ที่ทำให้ $AB = I_2$

นั่นคือ A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

<u>ทฤษฎี 2.11</u> ถ้าเมตริกซ์มีอินเวอร์สแล้วอินเวอร์สจะมีเพียงอันเดียว

<u>พิสูจน์</u> ให้ A, B และ C เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ขนาด $(n \times n)$ และให้ B และ C เป็นอินเวอร์สของเมตริกซ์ A

ดังนั้น

$$AB = BA = AC = CA = I_n$$

จะได้ว่า

$$BAC = (BA)C = I_nC = C$$

และ

$$BAC = B(AC) = BI_n = B$$

เพราะฉะนั้น $B = C$

ถ้า A มีอินเวอร์สเราจะเขียนแทนอินเวอร์สของ A ด้วย A^{-1}

ดังนั้น $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

<u>ตัวอย่างที่ 14</u> กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ จงหา A^{-1}

ให้ $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

ดังนั้น $AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

หรือ $\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

จะได้ $a + 2c = 1$ และ $b + 2d = 0$

$3a + 4c = 0$ $\qquad 3b + 4d = 1$

แก้สมการจะได้

$a = -2,\ c = \frac{3}{2}\ ,\ b = 1$ และ $d = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

<u>ทฤษฎี 2.12</u> (a) ถ้า A เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว A^{-1} เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ด้วย

และ
$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(b) ถ้า A และ B เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว AB เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ด้วย

และ
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

<u>พิสูจน์</u> (a) A^{-1} จะเป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ถ้ามี $(n \times n)$ เมตริกซ์ B ซึ่ง

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n$$

แต่เนื่องจาก

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

ดังนั้น $B = A$ เป็นอินเวอร์สของ A^{-1}

นั่นคือ

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(b) เพราะว่า $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$

$$= AI_nA^{-1}$$

$$= AA^{-1}$$

$$= I_n$$

และ $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$

$$= B^{-1}I_n B$$

$$= B^{-1}B$$

$$= I_n$$

เพราะฉะนั้น AB เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ โดยมีอินเวอร์สของ AB คือ

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

<u>ทฤษฎี 2.13</u> ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_r$ เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว $A_1A_2 \cdots A_r$ เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ด้วย และ

$$(A_1A_2 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1} A_{r-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก

$(A_1A_2 \cdots A_r)(A_r^{-1} A_{r-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1})$

$= A_1A_2 \cdots A_{r-1} (A_r A_r^{-1}) \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$ คุณสมบัติการจัดหมู่

$= A_1A_2 \cdots A_{r-1}I_n A_{r-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$

$= A_1A_2 \cdots A_{r-1} A_{r-1}^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$

และโดยใช้คุณสมบัติการจัดหมู่ และหลักการเดียวกันสำหรับ A_i กับ A_i^{-1} ต่อไปเรื่อย ๆ เมื่อ $i = r-1, r-2, \ldots, 2, 1$

ขั้นสุดท้ายทางด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับจะเป็น I_n

$$\therefore (A_1A_2 \ldots A_r)(A_r^{-1} A_{r-1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}) = I_n$$

และทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

$$(A_r^{-1} A_{r-1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1})(A_1 A_2 \ldots A_r) = I_n$$

ดังนั้นจะได้ $A_1 A_2 \ldots A_r$ เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และอินเวอร์สของมันคือ

$$(A_1A_2 \ldots A_r)^{-1} = A_r^{-1} A_{r-1}^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

<u>ทฤษฎี 2.14</u> ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว $A \neq 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $A = 0$ เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์

ดังนั้นสำหรับ $(n \times n)$ เมตริกซ์ B ใด ๆ

จะได้ว่า

$$AB = BA = 0 \neq I_n$$

ดังนั้นจึงไม่มี $(n \times n)$ เมตริกซ์ B ใด ๆ ที่

$$AB = BA = I_n$$

นั่นคือ A ไม่เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

เพราะฉะนั้น ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว $A \neq 0$

สำหรับ A และ B ที่สอดคล้องสำหรับการคูณ

จะมี $A \neq 0$ และ $B \neq 0$ แต่ $AB = 0$ ได้ เช่น

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

แต่ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ขนาด $(n \times n)$ และ $AB = 0$ แล้ว $B = 0$ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 2.15</u> ให้ A เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ AB สอดคล้องสำหรับการคูณ ถ้า $AB = 0$ แล้ว $B = 0$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้น A จึงมีอินเวอร์สกำหนดโดย A^{-1}

เนื่องจาก $AB = 0$

เอา A^{-1} คูณทางซ้ายมือของทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ

จะได้

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$$

แต่

$$A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = IB = B$$

นั่นคือ $B = 0$

การคูณเมตริกซ์โดยทั่วไปไม่มีคุณสมบัติการตัดออก (Cancellation law) ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

และ

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2}$$

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2 \times 2}$$

เพราะฉะนั้น $AB = AD$

แต่ $B \neq D$

คุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณเมตริกซ์ เป็นจริงตามทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 2.16</u> ให้ A เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ถ้า AB, AC สอดคล้องสำหรับการคูณ และ $AB = AC$ แล้วจะได้ $B = C$

<u>พิสูจน์</u> จาก $AB = AC$

เนื่องจาก A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ฉะนั้น A จะมีอินเวอร์ส A^{-1}

ดังนั้นจะได้ $A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC)$

$$(A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$

$$IB = IC$$

$$B = C$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ $BA = CA$ แล้วจะได้ $B = C$

<u>ทฤษฎี 2.17</u> ถ้า $(n \times n)$ เมตริกซ์ A มีอย่างน้อยหนึ่งแถวซึ่งสมาชิกทั้งหมดเป็นศูนย์ แล้ว A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

<u>พิสูจน์</u> สมมุติ A เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้น จะมี $(n \times n)$ เมตริกซ์ B ซึ่ง

$$AB = BA = I_n$$

ให้สมาชิกแถวที่ i ของ A เป็นศูนย์ทั้งหมด

นั่นคือ $\mathrm{Row}_i(A) = [0, 0, \ldots, 0]$

$$\text{ดังนั้น} \quad \mathrm{Row}_i(AB) = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j1}, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{j2}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jn}\right]$$

$$= [0, 0, \ldots, 0]$$

$$\text{แต่} \quad \mathrm{Row}_i(I) = [0, 0, \ldots, 1, \ldots 0]$$

นั่นคือ $AB \neq I_n$ ขัดแย้งกับข้อสมมุติ

$\therefore$ A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

<u>ข้อสังเกต</u> : เมื่อพิจารณา $\mathcal{F}_{n \times n}$ กับการบวกและการคูณเมตริกซ์ จะพบว่ามีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $\mathcal{F}_{n \times n}$ กับการบวกเมตริกซ์เป็นคอมมิวเทตีฟกรุป ดังได้กล่าวมาแล้ว

(2) $\mathcal{F}_{n \times n}$ กับการคูณเมตริกซ์มีคุณสมบัติดังนี้คือ

(1) มีคุณสมบัติปิดสำหรับการคูณ

(2) มีคุณสมบัติการจัดหมู่

(3) มีคุณสมบัติกระจายทางซ้ายและกระจายทางขวา กล่าวคือ

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

สำหรับสมาชิกทุกตัวในเซ็ต $\mathcal{F}_{n \times n}$

จากคุณสมบัติทั้งหมดนี้จึงทำให้ $\mathcal{F}_{n \times n}$ กับการบวก และการคูณเมตริกซ์เป็นริง (ring) (โดยนิยามของริง)

นอกจากนี้ I_n ซึ่งอยู่ในเซ็ตนี้มีคุณสมบัติ $I_nA = AI_n = A$ สำหรับทุก ๆ $A \in \mathcal{F}_{n \times n}$

จึงกล่าวว่าระบบนี้เป็นริงที่มีเอกลักษณ์ (ring with identity หรือ ring with unity)

แต่สำหรับ $A \neq 0$ และ $B \neq 0$ จะมี $AB = 0$ ดังนั้นระบบนี้ไม่เป็นอินทิกรัลโดเมน (integral domain) เพราะว่าถ้าเป็นอินทิกรัลโดเมน $A \neq 0$ และ $B \neq 0$ แล้ว $AB \neq 0$

2.2.7 <u>การทรานสโพสของเมตริกซ์</u> (Transpose of Matrices)

<u>นิยาม 2.13</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m \times n)$ บนฟิลด์ $\mathcal{F}$ แล้ว A^T (ทรานสโพสของ A) คือ เมตริกซ์ขนาด $(n \times m)$ กำหนดโดย

$$ent_{ij}(A^T) = ent_{ji}(A)$$

นั่นคือ ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m \times n)$ แล้ว เมตริกซ์ขนาด $(n \times m)$ ที่เกิดจาก A โดยการสลับที่ระหว่างแถวและหลักของเมตริกซ์ A เรียกว่าทรานสโพสของ A

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> ถ้า $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ และ $B = [4, 0, 5]$

ดังนั้น

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad B^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติของการทรานสโพสเมตริกซ์

<u>ทฤษฎี 2.18</u>

(1) $(A^T)^T = A$ สำหรับเมตริกซ์ A ใด ๆ

(2) ถ้า A และ B มีขนาดเท่ากันแล้ว

$(A + B)^T = A^T + B^T$

(3) ถ้า A และ B สอดคล้องสำหรับการคูณแล้ว

$(AB)^T = B^T A^T$

(4) $(aB)^T = aB^T$ สำหรับสกาลาร์ a ใด ๆ

(5) ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว

A^T และ $(A^T)^{-1}$ จะเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ด้วย

<u>พิสูจน์</u> (1) โดยนิยามของทรานสโพสของเมตริกซ์

$\text{ent}_{ij}\,(A^T)^T = \text{ent}_{ji}\,(A^T) = \text{ent}_{ij}A$

ดังนั้น $(A^T)^T = A$

(2) โดยนิยามของการบวกเมตริกซ์ และการทรานสโพสของเมตริกซ์

จะได้ว่า

$$\text{ent}_{ij}\ ((A + B)^T) = \text{ent}_{ji}\ (A + B)$$

$$= \text{ent}_{ji}(A) + \text{ent}_{ji}(B)$$

$$= \text{ent}_{ij}(A^T) + \text{ent}_{ij}(B^T)$$

$$= \text{ent}_{ij}(A^T + B^T)$$

ดังนั้น $(A + B)^T = A^T + B^T$

(3) สมมุติ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m \times n)$ และ $B = [b_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $(n \times p)$

ดังนั้น AB เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m \times p)$ และ $(AB)^T$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $(p \times m)$

เนื่องจาก B^T เป็นเมตริกซ์ขนาด $(p \times n)$ และ A^T เป็นเมตริกซ์ ขนาด $(n \times m)$

ดังนั้น B^TA^T เป็นเมตริกซ์ขนาด $(p \times m)$

โดยนิยามของทรานสโพสของเมตริกซ์ และนิยามของการคูณเมตริกซ์ จะได้ว่า

$$\text{ent}_{ij}((AB)^T) = \text{ent}_{ji}\ (AB)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\ b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \text{ent}_{jk}\ (A)\ \text{ent}_{ki}(B)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \text{ent}_{kj}(A^T)\text{ent}_{ik}(B^T)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \text{ent}_{ik}(B^T)\text{ent}_{kj}(A^T)$$

$$= \text{ent}_{ij}\ (B^TA^T)$$

ดังนั้น $(AB)^T = B^TA^T$

(4) โดยนิยามของทรานสโพสของเมตริกซ์ และนิยามของการคูณเมตริกซ์ด้วยสกาลาร์ จะได้

$$\text{ent}_{ij}((aB)^T) = \text{ent}_{ji}(aB)$$

$$= a\,\text{ent}_{ji}(B)$$

$$= a\,\text{ent}_{ij}(B^T)$$

ดังนั้น $(a\,B)^T = a\,B^T$

(5) เนื่องจาก A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้น A จะมีอินเวอร์ส คือ A^{-1}

เพราะว่า $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T$ โดยข้อ (3)

$$= I^T$$

$$= I$$

และ $(A^{-1})^T A^T = (AA^{-1})^T$ โดยข้อ (3)

$$= I^T$$

$$= I$$

ดังนั้น A^T เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และมีอินเวอร์สเป็น

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.2.8 <u>เมตริกซ์เชิงซ้อน</u> (Complex matrix)

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติบางอย่างของจำนวนเชิงซ้อน (complex number) เพื่อนำไปใช้สร้างนิยามในเมตริกซ์ต่อไป

ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ แล้ว คอนจุเกตเชิงซ้อน (Complex conjugate) ของ z คือ

$$\bar{z} = a - bi$$

<u>คุณสมบัติบางประการของคอนจุเกตเชิงซ้อน</u>ได้แก่

(1) $\bar{\bar{z}} = z$

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

(4) ถ้า $z = a + bi$ แล้ว $z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2 \geq 0$

(5) $z = a + bi$ เป็นจำนวนจริง $(b = 0)$ ก็ต่อเมื่อ $z = \bar{z}$

(6) $z = a + bi$ เป็นจำนวนจินตภาพอย่างเดียว $(a = 0)$ ก็ต่อเมื่อ $z = -\bar{z}$

<u>นิยาม 2.14</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m \times n)$ บนฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน (เรียกว่าเมตริกซ์เชิงซ้อน (complex matrix)) แล้ว

คอนจุเกตของ A คือ $\bar{A}$ เป็นเมตริกซ์เชิงซ้อนขนาด $(m \times n)$ กำหนดโดย

$$ent_{ij}(\bar{A}) = \overline{ent_{ij}(A)}$$

ทรานจุเกต (tranjugate) ของ A หรือเฮอมิเชียนคอนจุเกต (Hermitian conjugate) ของ A คือ A^* เป็นเมตริกซ์เชิงซ้อน ขนาด $(n \times m)$ กำหนดโดย

$$A^* = (\bar{A})^T$$

หรือกำหนดโดย

$$\mathrm{ent}_{ij}(A^*) = \overline{\mathrm{ent}_{ji}(A)}$$

เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2+3i \\ 5+6i & 3i & 2-i \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2-3i \\ 5-6i & -3i & 2+i \end{bmatrix}$

และ $A^* = \begin{bmatrix} 3 & 5-6i \\ 2 & -3i \\ 2-3i & 2+3i \end{bmatrix}$

<u>ข้อสังเกต</u> $A^* = A^T$ ถ้า A มีสมาชิกที่เป็นจำนวนจริงเท่านั้น ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีที่เกี่ยวกับคุณสมบัติของทรานจุเกต

<u>ทฤษฎี 2.19</u> (1) $(A^*)^* = A$ สำหรับเมตริกซ์เชิงซ้อน A ใด ๆ

(2) ถ้า A และ B มีขนาดเท่ากันแล้ว

$(A+B)^* = A^* + B^*$

(3) ถ้า A และ B สอดคล้องสำหรับการคูณ แล้ว

$(AB)^* = B^* A^*$

(4) $(zB)^* = \bar{z} B^*$ สำหรับสกาลาร์เชิงซ้อน z ใด ๆ

(5) ถ้า $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว A^* และ

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ จะเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ด้วย

<u>พิสูจน์</u> (1) โดยนิยามของทรานจุเกตของเมตริกซ์ จะได้

$$\begin{aligned} ent_{ij}((A^*)^*) &= \overline{ent_{ji}(A^*)} \\ &= \overline{\overline{ent_{ij}(A)}} \\ &= ent_{ij}(A) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(A^*)^* = A$

(2) โดยนิยามของการบวกเมตริกซ์และทรานจุเกตของเมตริกซ์ และคุณสมบัติของคอนจุเกตของเมตริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} ent_{ij}((A+B)^*) &= \overline{ent_{ji}(A+B)} \\ &= \overline{ent_{ji}(A) + ent_{ji}(B)} \\ &= \overline{ent_{ji}(A)} + \overline{ent_{ji}(B)} \\ &= ent_{ij}(A^*) + ent_{ij}(B^*) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(A+B)^* = A^* + B^*$

สำหรับข้อ (3), (4) และ (5) ให้ผู้อ่านพิสูจน์เอง

2.2.9 <u>พาร์ทิชันเมตริกซ์</u> (Partitioned Matrices)

ตอนนี้จะแนะนำเทคนิคบางอย่างสำหรับเมตริกซ์ ก่อนอื่นจะต้องรู้จักความหมายของคำบางคำเสียก่อนดังต่อไปนี้

<u>นิยาม 2.15</u> ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ใด ๆ สับเมตริกซ์ (sub matrix) ของเมตริกซ์ A คือเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์ A โดยตัดแถวบางแถว และ/หรือหลักบางหลักของ A ออก

<u>ตัวอย่างที่ 16</u> กำหนดให้ $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

และ $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ดังนั้น Q เป็นสับเมตริกซ์ของ P โดยการตัด $Row_2(A)$ และ $Col_3(A)$

สมมุติ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์ขนาด (4×4) ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

ถ้าแบ่ง A ออกเป็นสับเมตริกซ์ โดยเส้นประตามแนวตั้ง และแนวนอน ดังต่อไปนี้

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$$

A จะถูกแบ่งออกเป็นสี่สับเมตริกซ์คือ

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a_{13}, & a_{14} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

ให้สับเมตริกซ์แต่ละอันเปรียบเสมือนสมาชิกตัวหนึ่งของ A ดังนั้น จะแทนสับเมตริกซ์เหล่านี้ด้วย A_{11}, A_{12}, A_{21} และ A_{22} ซึ่งสับสคริป (subscript) สองตัวที่ห้อยอยู่ทางล่างขวาของ A จะบ่งถึงแถวและหลักของสับเมตริกซ์นั้น

นั่นคือ $A_{11} = (a_{11}, a_{12})$ $A_{12} = (a_{13}, a_{14})$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

และจะเขียนได้ว่า

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

<u>นิยาม 2.16</u> $A = (a_{ij})$ เป็นเมตริกซ์ใด ๆ ถ้าแบ่งเมตริกซ์ A ออกเป็นสับเมตริกซ์ โดยเส้นประตามแนวตั้ง และ/หรือ ตามแนวนอน เมตริกซ์ A ที่ประกอบด้วยสับเมตริกซ์ดังกล่าว เรียกว่า พาร์ทิชันเมตริกซ์

สมมุติว่า A และ B เป็นเมตริกซ์ ซึ่งสอดคล้องสำหรับการคูณ ถ้าพาร์ทิชันเมตริกซ์ของ A และ B คือ

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

และ $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}$

พิจารณาดูว่าเงื่อนไขการคูณ AB สามารถคำนวณได้หรือไม่ เมื่อสับเมตริกซ์เปรียบเสมือนสกาลาร์ นั่นคือ เราสามารถเขียน AB ดังข้างล่างนี้ได้หรือไม่ ?

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{pmatrix}$$

คำตอบก็คือ AB ตามข้างบนนี้จะเป็นไปได้ก็ต่อเมื่อผลบวก และผลคูณทั้งหมดจะต้องเป็นไปได้ เช่น

$A_{11}B_{11}$ เป็นไปได้เมื่อจำนวนหลักของ A_{11} จะต้องเท่ากับจำนวนแถวของ B_{11} นั่นคือเส้นแรกที่แบ่งหลักใน A ต้องสอดคล้องกับเส้นแรกที่แบ่งแถวใน B (และถ้ามีเส้นอื่นอีกในกรณีเมตริกซ์อื่น ๆ ที่สอดคล้องสำหรับการคูณเส้นที่สองที่แบ่งหลักใน A จะต้องสอดคล้องกับเส้นที่สองที่แบ่งแถวใน B และต่อไปเรื่อย ๆ ในลักษณะเดียวกัน) เราก็จะเห็นว่าผลคูณ AB ดังกล่าวแล้วจะเป็นไปได้ ดังจะแสดงโดยทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 2.20</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด (m x n) และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด (n x p) ใด ๆ พาร์ทิชันเมตริกซ์ A และ B คือ

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \cdots & A_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1j} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2j} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sj} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}$$

โดยที่ $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_i + \cdots + m_r$

$n = n_1 + n_2 + \cdots \qquad + n_s$

$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_j + \cdots + p_t$

ดังนั้น

(1) $\sum_{k=1}^{s} A_{ik} B_{kj}$ หาค่าได้

และมีขนาดเท่ากับ $(m_i \times p_j)$ สำหรับ $i = 1,2,\ldots, r$

$j = 1,2,\ldots, t$

(2) ถ้า $C = [C_{ij}]$ โดยที่ C_{ij} เป็นสับเมตริกซ์ได้จาก

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik} B_{kj}$$

ดังนั้นจะได้

$$C = [C_{ij}] = AB$$

<u>พิสูจน์</u> (1) เนื่องจากเมตริกซ์ A ถูกแบ่งทางแนวนอน (แบ่งแถว) ออกเป็น r ส่วน $(m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r)$

ส่วนแรกบรรจุ m_1 แถว

ส่วนที่สองบรรจุ m_2 แถว

⋮

ส่วนที่ i บรรจุ m_i แถว

⋮

ส่วนที่ r บรรจุ m_r แถว

และเมตริกซ์ A ถูกแบ่งทางแนวตั้ง (แบ่งหลัก) ออกเป็น s ส่วน $(n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s)$

ส่วนแรกบรรจุ n_1 หลัก
ส่วนที่สองบรรจุ n_2 หลัก

.
.
.

ส่วนที่ s บรรจุ n_s หลัก

ดังนั้น $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{is}$ มีขนาดเท่ากับ

$(m_i \times n_1), (m_i \times n_2) \ldots, (m_i \times n_x)$ ตามลำดับ

เมตริกซ์ B ถูกแบ่งทางแนวนอน (แบ่งแถว) ออกเป็น s ส่วน
$(n = n_1 + n_2 + \ldots + n_s)$

ส่วนแรกบรรจุ n_1 แถว
ส่วนที่สองบรรจุ n_2 แถว

.
.
.

ส่วนที่ s บรรจุ n_s แถว

และเมตริกซ์ B ถูกแบ่งทางแนวตั้ง (แบ่งหลัก) ออกเป็น t ส่วน
$(p = p_1 + p_2 + \ldots + p_t)$

ส่วนแรกบรรจุ p_1 หลัก
ส่วนที่สองบรรจุ p_2 หลัก

.
.
.

ส่วนที่ j บรรจุ p_j หลัก

.
.
.

ส่วนที่ t บรรจุ p_t หลัก

ดังนั้น B_{1j}, B_{2j} ..., B_{sj} มีขนาดเท่ากับ

$(n_1 \times p_j)$, $(n_2 \times p_j)$... $(n_s \times p_j)$ ตามลำดับ

โดยนิยามของการคูณจะได้ว่าแต่ละผลคูณ

$A_{i1} B_{1j}$, $A_{i2} B_{2j}$,..., $A_{is} B_{sj}$ หาค่าได้ และมี

ขนาดเท่ากับ $(m_i \times p_j)$

ดังนั้น $\sum\limits_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$ หาค่าได้ และมีขนาดเท่ากับ

$(m_i \times p_j)$ เมื่อ $i = 1, 2, ..., r$

$j = 1, 2, ..., t$

(2) เนื่องจาก $C = [C_{ij}]$ โดยที่ C_{ij} เป็นสับเมตริกซ์ได้จาก

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik} B_{kj}$$

โดยพิสูจน์ใน (1) จะได้ว่า

ขนาดของสับเมตริกซ์ C_{ij} = ขนาดของ $\sum\limits_{k=1}^{s} A_{ik} B_{kj} = (m_i \times p_j)$

เมื่อ $i = 1, 2, ..., r$

$j = 1, 2, ..., t$

ดังนั้นเมตริกซ์ C ถูกแบ่งทางแนวนอน (แบ่งแถว)ออกเป็น r ส่วน

ส่วนแรกบรรจุ m_1 แถว

ส่วนที่สองบรรจุ m_2 แถว

.

.

.

ส่วนที่ r บรรจุ m_r แถว

ซึ่ง

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = m$$

และเมตริกซ์ C ถูกแบ่งทางแนวตั้ง (แบ่งหลัก)ออกเป็น t ส่วน

ส่วนแรก บรรจุ p_1 หลัก

ส่วนที่สองบรรจุ p_2 หลัก

•
•
•

ส่วนที่ t บรรจุ p_t หลัก

ซึ่ง

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_t = p$$

ดังนั้นเมตริกซ์ C มีขนาด $(m \times p)$ ซึ่งเท่ากับขนาดของเมตริกซ์ AB

ขั้นต่อไปจะแสดงว่า AB = C

สำหรับตำแหน่งที่ (1, 1) เรามี

$$\left[ent_{11}(AB)\right] = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}\right)$$

$$= \left(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}\right)$$

$$= \left(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}\right)\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

$$= Row_1(A)\ col_1(B)$$

เนื่องจาก

$$Row_1(A) = \left[Row_1(A_{11}) \quad Row_1(A_{12}) \quad \cdots \quad Row_1(A_{1s}) \right]$$

$$= \left[a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{1,n_1} \quad a_{1,n_1+1}, \cdots, a_{1,n_1+n_2}, \cdots \cdots, a_{1n} \right]$$

$$Col_1(B) = \begin{bmatrix} Col_1(B_{11}) \\ Col_2(B_{21}) \\ Col_1(B_{31}) \\ \vdots \\ Col_1(B_{s1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n_1 1} \\ b_{n_1+1,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n,1} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $$\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} = \sum_{i=1}^{n_1} a_{1i}b_{i1} + \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} a_{1i}b_{i1} + \cdots + \sum_{i=n_1+n_2+\cdots+n_{s-1}+1}^{n_1+n_2+\cdots+n_s=n} a_{1i}b_{i1}$$

$$= Row_1(A_{11})Col_1(B_{11}) + Row_1(A_{12})Col_1(B_{21}) + \cdots + Row_1(A_{1s})Col_1(B_{s1})$$

$$= ent_{11}(A_{11}B_{11}) + ent_{11}(A_{12}B_{21}) + \cdots + ent_{11}(A_{1s}B_{s1})$$

$$= ent_{11}(A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + \cdots + A_{1s}B_{s1})$$

$$= ent_{11}\left(\sum_{i=1}^{s} A_{1i} B_{i1}\right)$$

$$= ent_{11}(C_{11})$$

สำหรับตำแหน่งอื่น ๆ ก็หาได้ในทำนองเดียวกัน

นั่นคือ จะได้ $C = AB$

ทฤษฎี 2.21

ถ้า $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ โดยที่ $A_{21} = 0$ (สับเมตริกซ์ศูนย์)

และ A_{11}^{-1} และ A_{22}^{-1} หาค่าได้ แล้ว A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

และ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก A_{11}^{-1} และ A_{22}^{-1} หาค่าได้ เพราะฉะนั้น A_{11} และ A_{22} เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

ถ้า A_{11} มีขนาด $(m \times m)$ และ A_{22} มีขนาด $(n \times n)$

นั่นคือ

$$A = \begin{array}{c|c} \text{มี m หลัก} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{มี m แถว} \\ \text{มี n แถว} \end{array} \\ \text{มี n หลัก} & \end{array}$$

ดังนั้น A_{12} จะมีขนาด $(m \times n)$ และ A_{21} มีขนาด $(n \times m)$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $-A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1}$ สอดคล้องสำหรับการคูณ และมีขนาด $(m \times n)$

ขั้นต่อไปจะแสดงว่า

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

โดยการคำนวณโดยตรงดังนี้

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}A_{11}^{-1} & - A_{11}A_{11}^{-1} A_{12}A_{22}^{-1} + A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$$

ทำนองเดียวกัน

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & - A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = I$$

เพราะฉะนั้น A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และ

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

กรณีพิเศษของทฤษฎี 2.21 คือ

เมื่อ $A_{12} = 0$ จะได้

$A = \text{diag}\left[A_{11}, A_{22}\right]$ และ $A^{-1} = \text{diag}\left[A_{11}^{-1} , A_{22}^{-1} \right]$

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> จงคำนวณหา CD โดยการพาร์ทิชันเมตริกซ์ C และ D อย่างเหมาะสม

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

พาร์ทิชันเมตริกซ์ C และ D ดังนี้ คือ

$$C = \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad D = \left(\begin{array}{cc:ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

การแบ่งอย่างเหมาะสมในที่นี้ คือพิจารณาแบ่งที่ D ก่อน ให้สับเมตริกซ์ที่ได้เป็นเมตริกซ์ศูนย์และเมตริกซ์เอกลักษณ์

และในการแบ่ง C ต้องให้จำนวนหลักของสับเมตริกซ์แรกใน C เท่ากับจำนวนแถวของสับเมตริกซ์แรกใน D เส้นแบ่งแถวใน C และเส้นแบ่งหลักใน D จะแบ่งอย่างไรแล้วแต่จะเห็นเหมาะสม ไม่จำเป็นต้องสัมพันธ์กัน

ดังนั้นเขียนเมตริกซ์ C และ D ได้เป็น

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & C_{22} \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad D = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & I_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ CD = \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & I_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & C_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>หมายเหตุ</u> สับเมตริกซ์ที่เป็นเมตริกซ์ศูนย์ และที่เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ เขียนแทนด้วย 0 และ I และสับสคริป (subscript) ที่อยู่ทางข้างล่างด้านขวาของ 0 และ I นั้นจะบอกขนาดของสับเมตริกซ์นั้น ส่วนสับเมตริกซ์อื่น ๆ เช่น C_{22} ตัวเลขสองตัวทางล่างขวาจะบอกเฉพาะตำแหน่งของสับเมตริกซ์นั้นเท่านั้น

2.2.10 <u>เมตริกซ์ที่สำคัญบางชนิด</u>

เราได้รู้จักเมตริกซ์สำคัญบางชนิดไปบ้างแล้ว ได้แก่ เมตริกซ์จัตุรัส เมตริกซ์ทะแยง สกาลาร์เมตริกซ์ เมตริกซ์ศูนย์ และเมตริกซ์เอกลักษณ์ ต่อไปนี้จะกล่าวถึงเมตริกซ์อื่น ๆ อีกที่มีความสำคัญ

<u>นิยาม 2.17</u> เมตริกซ์ $T = (t_{ij}) \in \mathcal{F}_{n \times n}$ เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ จะเรียกว่าเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular matrix) ถ้า

$$t_{ij} = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad i > j$$

เมตริกซ์ $T = (t_{ij}) \in \mathcal{F}_{n \times n}$ จะเรียกว่าเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (lower triangular matrix) ถ้า

$$t_{ij} = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad i < j$$

<u>ตัวอย่างที่ 18</u>

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง และ B เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน

<u>นิยาม 2.18</u> เมตริกซ์ $A = (a_{ij}) \in \mathcal{F}_{n \times n}$ เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ เรียกว่าเมตริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) ถ้า

$$A^T = A$$

นั่นคือถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส ซึ่ง

$$a_{ij} = a_{ji}$$

แล้ว A จะเป็นเมตริกซ์สมมาตร

ตัวอย่างที่ 19

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์สมมาตร

นิยาม 2.19 เมตริกซ์ $A = a_{ij} \in \mathcal{F}_{n \times n}$ เป็น (n x n) เมตริกซ์ จะเรียกว่าเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง (Skew symmetric matrix) ถ้า

$$A^T = -A$$

นั่นคือ ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสซึ่ง

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

แล้ว A จะเป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

ตัวอย่างที่ 20

$$\text{ถ้า} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 0 & -6 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -B$$

ดังนั้น B เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

คุณสมบัติของเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

สมาชิกบนเส้นทะแยงมุมหลักของเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยงต้องเป็นศูนย์

พิสูจน์ ให้ $A = a_{ij}$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง อันดับที่ n

โดยนิยามของเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยงจะได้

$a_{ij} = -a_{ji}$

ดังนั้น $a_{ii} = -a_{ii}$ $(j = i)$

จะได้ $a_{ii} = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$

นั่นคือ สมาชิกบนเส้นทะแยงมุมหลักเป็นศูนย์

ข้อสังเกต สมาชิกของเมตริกซ์สมมาตรจะสมมาตรกันโดยมีเส้นทะแยงมุมหลักเป็นแกนสมมาตร เพราะว่า $a_{ij} = a_{ji}$

และสมาชิกของเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง ซึ่งมีเส้นทะแยงมุมหลักเป็นแกนสมมาตรจะเป็นจำนวนซึ่งมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน เพราะว่า $a_{ij} = -a_{ji}$ เช่น

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์สมมาตร　　　　　　เมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

ทฤษฎี 2.22 ถ้า A เป็นเมตริกซ์สมมาตรจะได้ว่า

(1) kA เป็นเมตริกซ์สมมาตร สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง k

(2) $AA^T = A^TA$

(3) $(A^n)^T = A^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

<u>พิสูจน์</u> (1) $(kA)^T = kA^T$ โดยนิยาม 2.18 ข้อ (4)

$= kA$ เพราะ A เป็นเมตริกซ์สมมาตร

$\therefore$ kA เป็นเมตริกซ์สมมาตร สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง k

(2) $AA^T = AA$ เพราะ A เป็นเมตริกซ์สมมาตร

$= A^TA$

(3) พิสูจน์โดยวิธีอุปมาน (induction)

เมื่อ n = 1

$A^T = A$

$\therefore$ n = 1 ข้อความเป็นจริง

เมื่อ n = 2

$(A^2)^T = (A\ A)^T$

$= A^T\ A^T$ ทฤษฎี 2.18 ข้อ (3)

$= A\ A$ เพราะ A เป็นเมตริกซ์สมมาตร

$= A^2$

$\therefore$ n = 2 ข้อความเป็นจริง

เมื่อ n = 3

$(A^3)^T = (AAA)^T$

$= (A\ A^2)^T$

$= (A^2)^T\ A^T$

$= A^2\ A^T$

$= A^2\ A$

$= A^3$

$\therefore$ n = 3 ข้อความเป็นจริง

ให้ $n = k$ ข้อความเป็นจริง

นั่นคือ

$$(A^k)^T = A^k$$

เมื่อ $n = k + 1$

$$(A^{k+1})^T = (A^k A)^T$$

$$= A^T(A^k)^T$$

$$= A^T A^k$$

$$= AA^k$$

$$= A^{k+1}$$

$\therefore$ $n = k + 1$ ข้อความเป็นจริง

$\therefore$ $(A^n)^T = A^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

นั่นคือ ถ้า A เป็นเมตริกซ์สมมาตรแล้ว A^n จะเป็นเมตริกซ์สมมาตรด้วย

<u>ทฤษฎี 2.23</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง จะได้ว่า

(1) kA เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยงสำหรับ

(2) $AA^T = A^TA$

(3) $(A^{2n})^T = A^{2n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

(4) $(A^{2n+1})^T = -A^{2n+1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

<u>พิสูจน์</u> (1) $(kA)^T = kA^T$ โดยทฤษฎี 2.18

$= k(-A)$ เพราะว่า A เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

$= -kA$

$\therefore$ kA เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

(2) $AA^T = A(-A)$ เพราะว่า A เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

$= -(AA)$

$= (-A)(A)$

$= A^TA$

(3) พิสูจน์โดยวิธีอุปมาน (induction)

เมื่อ $n = 1$

$(A^2)^T = (AA)^T$

$= A^TA^T$ ทฤษฎี 2.18 ข้อ (3)

$= (-A)(-A)$

$= A^2$

$\therefore$ $n = 1$ ข้อความเป็นจริง

เมื่อ $n = 2$

$(A^4)^T = (A^2A^2)^T$

$= (A^2)^T(A^2)^T$ ทฤษฎี 2.18 ข้อ (3)

$= A^2\ A^2$

$= A^4$

$\therefore$ เมื่อ $n = 2$ ข้อความเป็นจริง

ให้ $n = k$ ข้อความเป็นจริง

เพราะฉะนั้น

$(A^{2k})^T = A^{2k}$

เมื่อ $n = k + 1$ จะได้

$$A^{2(k+1)\ T} = A^{2k}\ A^{2\ T}$$

$$= (A^2)^T(A^{2k})^T$$

$$= A^2\ A^{2k}$$

$$= A^{2(k+1)}$$

ดังนั้น เมื่อ $n = k + 1$ ข้อความเป็นจริง

$\therefore (A^{2n})^T = A^{2n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ

นั่นคือ เมื่อ A เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง แล้ว

A^{2n} จะเป็นเมตริกซ์สมมาตร

(4) ให้ผู้อ่านพิสูจน์เอง ซึ่งสรุปได้ว่า

เมื่อ A เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง แล้ว

A^{2n+1} จะเป็นเมตริกซ์เบี่ยงด้วย สำหรับ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

<u>ทฤษฎี 2.24</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสแล้ว

(1) $A + A^T$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร

(2) $A - A^T$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

<u>พิสูจน์</u> (1) $(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T$ โดยทฤษฎี 2.18 ข้อ (2)

$= A^T + A$ โดยทฤษฎี 2.18 ข้อ (1)

$= A + A^T$

$\therefore A + A^T$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร

(2) $(A - A^T)^T = A + (-A^T) \quad ^T$

$= A^T + (-A^T)^T$

$= A^T + ((-A)^T)^T$ เพราะว่า $(kA)^T = kA^T$

$= A^T + (-A)$

$= -A + A^T$

$= -(A - A^T)$ โดยทฤษฎี 2.6

$\therefore$ $A - A^T$ เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

<u>ทฤษฎี 2.25</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส จะมีเมตริกซ์สมมาตร S และเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง K โดยที่ $A = S + K$ และการเขียนเช่นนี้มีได้วิธีเดียวเท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> ถ้าให้ $S = \frac{1}{2}(A + A^T)$

$K = \frac{1}{2}(A - A^T)$

จะได้ว่า S เป็นเมตริกซ์สมมาตร (โดยทฤษฎี 2.24 และ 2.22) K เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง (โดยทฤษฎี 2.24 และ 2.23) และ $A = S + K$

ถ้ามีเมตริกซ์สมมาตร S_1 และเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง K_1

ซึ่ง $A = S_1 + K_1$ ....(i)

จะได้ว่า $A^T = (S_1 + K_1)^T$

$= S_1^T + K_1^T$

$= S_1 - K_1$ ....(ii)

เพราะว่า S_1 เป็นเมตริกซ์สมมาตร

K_1 เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

จาก (i) และ (ii) จะได้ว่า

$$A + A^T = 2S_1$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2}(A + A^T) = S$$

และ

$$A - A^T = 2K_1$$

$$\therefore K_1 = \frac{1}{2}(A - A^T) = K$$

ดังนั้นจึงมีวิธีเขียนได้วิธีเดียว

<u>ตัวอย่างที่ 21</u> กำหนดให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 7 & 12 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ให้ $S = \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} & 6 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$

และ $K = \frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $S + K = A$ โดยที่ S เป็นเมตริกซ์สมมาตร และ K เป็นเมตริกซ์สมมาตรเบี่ยง

<u>นิยาม 2.20</u> ให้ $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$ เป็นเมตริกซ์ขนาด $(n \times n)$ แล้ว A จะเป็นเฮอมิเชียนเมตริกซ์ (Hermitian matrix)

ถ้า

$$A^* = (\bar{A})^T = A$$

และเมตริกซ์ A จะเป็นสคิวเฮอมิเชียนเมตริกซ์ (Skew Hermitian matrix) ถ้า

$$A^* = (\bar{A})^T = -A$$

ในเทอมของสมาชิกของ A จะได้ว่า

A เป็นเฮอมิเชียนเมตริกซ์ต่อเมื่อ

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

และ A เป็นสคิวเฮอมิเชียนเมตริกซ์ต่อเมื่อ

$$a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$$

<u>ตัวอย่างที่ 22</u> กำหนดให้

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5i & 2+3i \\ 5i & 3 & 4 \\ 2-3i & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\bar{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5i & 2 - 3i \\ -5i & 3 & 4 \\ 2 + 3i & 4 & 0 \end{bmatrix}$

และ $(\bar{A})^T = \begin{bmatrix} 2 & -5i & 2 + 3i \\ 5i & 3 & 4 \\ 2 - 3i & 4 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $A^* = (\bar{A})^T = A$

เพราะฉะนั้น A จึงเป็นเฮอมิเชียนเมตริกซ์

ถ้ากำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} i & -3 & 5i \\ 3 & 0 & -2 + 3i \\ 5i & 2 + 3i & 3i \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $\bar{B} = \begin{bmatrix} -i & -3 & -5i \\ 3 & 0 & -2 - 3i \\ -5i & 2 - 3i & -3i \end{bmatrix}$

และ $(\bar{B})^T = \begin{bmatrix} -i & 3 & -5i \\ -3 & 0 & 2 - 3i \\ -5i & -2 - 3i & -3i \end{bmatrix}$

จะได้

$$B^* = (\bar{B})^T = -B$$

เพราะฉะนั้น B จึงเป็นสคิวเฮอมิเชียนเมตริกซ์

<u>คุณสมบัติของเฮอมิเชียนเมตริกซ์</u>

(1) สำหรับสมาชิก a_{jk} ใด ๆ ที่ไม่อยู่บนเส้นทะแยงมุมหลัก จะได้ว่า

ส่วนจริงของ a_{jk} = ส่วนจริงของ a_{kj}

และส่วนจินตภาพของ a_{jk} และส่วนจินตภาพของ a_{kj} มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a_{jk} = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $i = \sqrt{-1}$

ดังนั้น $\bar{a}_{jk} = a - bi$

จากนิยามของเฮอมิเชียนเมตริกซ์ จะได้

$$a_{kj} = \bar{a}_{jk}$$

ดังนั้น

$$a_{kj} = a - bi = a + (-b)i$$

นั่นคือ ส่วนจริงของ a_{jk} = ส่วนจริงของ a_{kj}

และส่วนจินตภาพของ a_{jk} และของ a_{kj} จะมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน

(2) สมาชิกบนเส้นทะแยงมุมหลักจะเป็นจำนวนจริงใด ๆ

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a_{jj} = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $i = \sqrt{-1}$

ดังนั้น $\bar{a}_{jj} = a - bi$

โดยนิยามของเฮอมิเชียนเมตริกซ์ จะได้

$$a_{jj} = \bar{a}_{jj}$$ (โดยนิยาม $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$ ซึ่งในที่นี้ $k = j$)

$\therefore$ $a + bi = a - bi$

จะได้ $b = 0$

$\therefore$ สมาชิกบนเส้นทะแยงมุมหลักจะเป็นจำนวนจริงใด ๆ

<u>คุณสมบัติของสคิวเฮอมิเชียนเมตริกซ์</u>

(1) สำหรับสมาชิก a_{jk} ใด ๆ ที่ไม่อยู่บนเส้นทะแยงมุมหลัก จะได้ว่า

ส่วนจริงของ a_{jk} และส่วนจริงของ a_{kj} มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน

และส่วนจินตภาพของ a_{jk} = ส่วนจินตภาพของ a_{kj}

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a_{jk} = a + bi$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

และ $i = \sqrt{-1}$

ดังนั้น $\bar{a}_{jk} = a - bi$

จากนิยามของสคิวเฮอมิเชียนเมตริกซ์ จะได้ว่า

$a_{kj} = -\bar{a}_{jk}$

ดังนั้น $a_{kj} = -(a - bi)$

$= -a + bi$

นั่นคือ ส่วนจริงของ a_{jk} และส่วนจริงของ a_{kj} มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน

และ ส่วนจินตภาพของ a_{jk} = ส่วนจินตภาพของ a_{kj}

(2) สมาชิกบนเส้นทะแยงมุมหลักจะมีเฉพาะส่วนจินตภาพเท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a_{jj} = a + bi$ ....(i)

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $i = \sqrt{-1}$

ดังนั้น $\bar{a}_{jj} = a - bi$

โดยนิยามของสคิวเฮอมิเชียนเมตริกซ์ จะได้

$a_{jj} = -\bar{a}_{jj}$ (โดยนิยาม $a_{jk} = -\bar{a}_{kj}$ ซึ่ง ในที่นี้ $k = j$)

$= -(a - bi)$

$= -a + bi$ ....(ii)

จาก (i) และ (ii) จะได้

$a = 0$

ดังนั้น $a_{jj} = bi$

นั่นคือสมาชิกบนเส้นทะแยงมุมหลักจะมีเฉพาะส่วนจินตภาพเท่านั้น
