บทที่ 3
ระบบสมการเชิงเส้น

(System of Linear Equations)

3.1 สมการเชิงเส้น (Linear Equation)

ปัญหาที่น่าสนใจหลายอย่างในทางวิทยาศาสตร์ธรรมชาติและวิทยาศาสตร์สังคม รวมทั้งงานทางด้านวิศวกรรม และวิทยาศาสตร์เกี่ยวข้องกับสมการที่อยู่ในรูป

$$y = ax$$

การแสดงตัวแปร y ในเทอมของตัวแปร x และตัวคงที่ a เรียกว่าสมการเชิงเส้น (linear equation) เหตุที่เรียกว่าเชิงเส้นเนื่องจากกราฟของสมการดังกล่าวนี้เป็นกราฟของเส้นตรง ในทำนองเดียวกันสมการในรูปแบบ

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad \text{.........(3.1.1)}$$

แสดง y ในเทอมของตัวแปร $x_1, x_2, \dots, x_n$ และตัวคงที่ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ก็เรียกว่าสมการเชิงเส้น ในการนำไปใช้จะกำหนดค่าของ y และต้องหาค่าของ $x_1, x_2, \dots, x_n$ ซึ่งสอดคล้องกับ (3.1.1)

คำตอบของสมการเชิงเส้น (3.1.1) คือเซ็ตของ n จำนวน $s_1, s_2, \dots, s_n$ ซึ่งเมื่อแทนค่า $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ ใน (3.1.1) แล้วจะทำให้ (3.1.1) เป็นจริง

เช่น $x_1 = 2$, $x_2 = 6$ และ $x_3 = 4$ เป็นคำตอบของสมการเชิงเส้น

$$6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2$$

เพราะว่า

$$6(2) - 3(6) + 2(4) = 2 \text{ เป็นจริง}$$

รูปแบบทั่วไปของระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า n ตัวคือ

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \qquad \ldots\ldots\ldots(3.1.2) \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

เมื่อ a_{ij} และ b_i เป็นตัวคงที่ ที่ทราบค่า

ต้องหาค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ที่ทำให้แต่ละสมการใน (3.1.2) เป็นจริง

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้น (3.1.2) คือเซ็ตของ n จำนวน $s_1, s_2, \ldots, s_n$ ซึ่งทำให้แต่ละสมการใน (3.1.2) เป็นจริง เมื่อแทนค่า $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$

ผู้อ่านคงเคยมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาของระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีกำจัดตัวไม่ทราบค่า (elimination) มาแล้ว นั่นคือจะกำจัดตัวไม่ทราบค่าบางตัว โดยการเอาจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์คูณสมการใดสมการหนึ่ง แล้วนำไปบวกกับอีกสมการหนึ่ง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.3)$$

<u>ขั้นที่ 1</u> คูณสมการแรกของ (3.1.3) ด้วย -2 แล้วนำไปบวกกับสมการที่สอง จะได้

$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ 7y &= 14 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.4)$$

<u>ขั้นที่ 2</u> เอา $\frac{1}{7}$ คูณสมการที่สองของ (3.1.4) ได้

$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ y &= 2 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.5)$$

<u>ขั้นที่ 3</u> เอา 3 คูณสมการที่สองของ (3.1.5) แล้วนำไปบวกกับสมการแรก จะได้

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.6)$$

ดังนั้น $x = 3$ และ $y = 2$ เป็นคำตอบของระบบสมการที่กำหนดให้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ 2x + 6y &= -7 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.7)$$

กำจัด x โดยเอา -2 คูณสมการแรก แล้วนำไปบวกกับสมการที่สอง จะได้

$$\begin{aligned} x + 3y &= 7 \\ 0 &= -14 \end{aligned} \qquad \text{............(3.1.8)}$$

ซึ่งระบบสมการ (3.1.8) นี้ไม่มีคำตอบ ดังนั้นระบบสมการ (3.1.7) ที่กำหนดให้จึงไม่มีคำตอบ

<u>หมายเหตุ</u> เราอาจสรุปแบบเดียวกันนี้จากการสังเกตว่า ทางซ้ายมือของสมการที่สองของ (3.1.7) เป็นสองเท่าของสมการแรก แต่ทางด้านขวาของสมการที่สองไม่เป็นสองเท่าของสมการแรก

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 2x - 3y + 2z &= 14 \\ 3x + y - z &= -2 \end{aligned} \qquad \text{............(3.1.9)}$$

<u>ขั้นที่ 1</u> กำจัด x โดยเอา -2 คูณสมการแรกแล้วบวกกับสมการที่สอง เอา -3 คูณสมการแรกแล้วบวกกับสมการที่สามจะได้

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -7y &= 14 \\ -5y - 4z &= -2 \end{aligned} \qquad \text{............(3.1.10)}$$

<u>ขั้นที่ 2</u> สลับสมการที่สองกับสมการที่สามของ (3.1.10) จะได้

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -5y - 4z &= -2 \\ -7y &= 14 \end{aligned} \qquad \text{............(3.1.11)}$$

<u>ขั้นที่ 3</u> เอา $-\frac{1}{7}$ คูณสมการที่สามของ (3.1.11) จะได้

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ -5y - 4z &= -2 \qquad \ldots\ldots\ldots(3.1.12) \\ y &= -2 \end{aligned}$$

<u>ขั้นที่ 4</u> เอา -2 คูณสมการที่สามของ (3.1.12) แล้วบวกกับสมการแรกได้สมการใหม่
และเอา 5 คูณสมการที่สามของ (3.1.12) แล้วบวกกับสมการที่สอง ได้สมการใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} x + z &= 4 \\ -4z &= -12 \qquad \ldots\ldots\ldots(3.1.13) \\ y &= -2 \end{aligned}$$

<u>ขั้นที่ 5</u> เอา $-\frac{1}{4}$ คูณสมการที่สองของ (3.1.13) จะได้

$$\begin{aligned} x + z &= 4 \\ z &= 3 \qquad \ldots\ldots\ldots(3.1.14) \\ y &= -2 \end{aligned}$$

<u>ขั้นที่ 6</u> แทนค่า $z = 3$ ในสมการแรกของ (3.1.14) จะได้

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ z &= 3 \qquad \ldots\ldots\ldots(3.1.15) \\ y &= -2 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ $x = 1$, $y = -2$ และ $z = 3$ เป็นคำตอบของระบบสมการที่กำหนดให้

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> พิจารณาระบบสมการ

$$x + 2y - 3z = -6 \qquad \ldots\ldots(3.1.16)$$
$$2x + y - 3z = 9$$

เอา -2 คูณสมการของ (3.1.16) แล้วบวกกับสมการที่สองจะได้

$$x + 2y - 3z = -6 \qquad \ldots\ldots(3.1.17)$$
$$-3y + 3z = 21$$

เอา $-\frac{1}{3}$คูณสมการที่สองของ (3.1.17) จะได้

$$x + 2y - 3z = -6 \qquad \ldots\ldots(3.1.18)$$
$$y - z = -7$$

เอา -2 คูณสมการที่สองของ (3.1.18) แล้วบวกกับสมการแรกจะได้

$$x - z = 8 \qquad \ldots\ldots(3.1.19)$$
$$y - z = -7$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการที่กำหนดให้คือ

$x = z + 8$

$y = z - 7$

$z =$ จำนวนจริงใด ๆ

นั่นคือระบบสมการ (3.1.16) มีคำตอบไม่จำกัด (infinitely many solutions)

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> พิจารณาระบบสมการ

$$x + 3y = 14$$
$$2x - 2y = -4 \qquad \ldots\ldots(3.1.20)$$
$$3x + 5y = 26$$

กำจัด x โดยเอา -2 คูณสมการแรก แล้วบวกกับสมการที่สอง

ได้

$$-8y = -32$$

หรือ

$$y = 4$$

เอา -3 คูณสมการแรก แล้วบวกกับสมการที่สาม

ได้

$$-4y = -16$$

หรือ $y = 4$

ดังนั้นจะมีระบบ

$$\begin{aligned} x + 3y &= 14 \\ y &= 4 \\ y &= 4 \end{aligned} \qquad \text{.....(3.1.21)}$$

ซึ่งมีคำตอบเหมือนกับ (3.1.20) แทนค่า $y = 4$ ในสมการแรกของ (3.1.20) จะได้ $x = 2$

ดังนั้น $x = 2, y = 4$ เป็นคำตอบของระบบสมการที่กำหนดให้

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ 2x + 3y &= 16 \\ 3x + 5y &= 20 \end{aligned} \qquad \text{.....(3.1.22)}$$

กำจัด x โดยเอา -2 คูณสมการแรกแล้วบวกกับสมการที่สอง จะได้

$$-y = -4$$

หรือ $y = 4$

เอา -3 คูณสมการแรกแล้วบวกกับสมการที่สาม จะได้

$$-y = -10$$

หรือ $$y = 10$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ y &= 4 \\ y &= 10 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots(3.1.23)$$

ซึ่งระบบสมการ (3.1.23) มีคำตอบเดียวกับระบบสมการ (3.1.22) แต่ระบบสมการ (3.1.23) ไม่มีคำตอบ ดังนั้นสรุปว่าระบบสมการ (3.1.22) ไม่มีคำตอบด้วย

จะเห็นว่าวิธีการกำจัดตัวไม่ทราบค่าประกอบด้วยการกระทำซ้ำ ๆ กัน ดังต่อไปนี้

(1) สลับสมการสองสมการ

(2) คูณสมการหนึ่งด้วยจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์

(3) คูณสมการหนึ่งด้วยจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์แล้วเอาไปบวกกับสมการอื่น

ไม่เป็นการยากที่จะแสดงว่าวิธีการกำจัดตัวไม่ทราบค่าของระบบสมการจะทำให้ได้ระบบสมการใหม่ ที่มีคำตอบเหมือนกับระบบสมการเดิมที่กำหนดให้ แล้วระบบสมการอันใหม่นี้สามารถแก้หาคำตอบได้ง่ายขึ้น ซึ่งจะแสดงให้เห็นในบทที่ 6

สำหรับระบบสมการทั่ว ๆ ไป การหาคำตอบที่เป็นไปได้มีอยู่สามแบบด้วยกันคือ

(1) มีคำตอบเดียว (unique solution) (สำหรับแต่ละ x_i ใด ๆ)

(2) มีมากกว่าหนึ่งคำตอบ (many solutions)

(3) ไม่มีคำตอบ (no solution)

สำหรับระบบสมการเชิงเส้น (3.1.2) ตามที่กล่าวมาแล้ว เรียกว่า ระบบสมการนอนโฮโมจีเนียส (Non homogeneous System) แต่ถ้าระบบสมการ (3.1.2) มี $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ แล้วระบบสมการนี้ เรียกว่า ระบบโฮโมจีเนียส (Homogeneous System)

ความมุ่งหมายในตอนนี้คือ ต้องการศึกษาลักษณะคำตอบของระบบสมการโดยตรวจสอบจากเมตริกซ์ออกเมนต์ (Augmented matrix) ดังจะได้ศึกษาในตอนต่อไปนี้

3.2 รูปเมตริกซ์ของระบบสมการเชิงเส้น

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่มีสมการ m สมการและตัวไม่ทราบค่า n ตัว ของ (3.1.2)

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad \ldots\ldots(3.2.1)$$

เมื่อกำหนดเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ดังนั้นระบบสมการเชิงเส้น (3.2.1) สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$AX = B \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.2)$$

เมตริกซ์ A เรียกว่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ (coefficient matrix) ของระบบสมการเชิงเส้น (3.2.1)

เมตริกซ์ $[A \mid B]$ โดยที่

$$[A \mid B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

เรียกว่าเมตริกซ์ออกเมนต์ (augmented matrix) ของระบบสมการ (3.2.1)

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 2x - 3y + 2z &= 14 \\ 3x + y - z &= -2 \end{aligned}$$

ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{pmatrix}$

ดังนั้นสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นได้เป็น

$$AX = B$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์คือ A

เมตริกซ์ออกเมนต์คือ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> เมตริกซ์

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right)$$

เป็นเมตริกซ์ออกเมนต์ของระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ 3x \quad\; + 2z &= 5 \\ -2x + y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

จากที่กล่าวมาแล้วการแก้ระบบสมการเชิงเส้นประกอบด้วยการกระทำต่อไปนี้คือ

(1) สลับสมการสองสมการ

(2) คูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์

(3) คูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้วเอาไปบวกกับอีกสมการหนึ่ง

วิธีการดังกล่าวนี้เมื่อกระทำบนแถวของเมตริกซ์ A ใด ๆ เรียกการกระทำดังกล่าวว่าการกระทำเบื้องต้นกับแถว (Elementary row operation) ของเมตริกซ์ A

<u>นิยาม 3.1</u> การกระทำเบื้องต้นกับแถว (หลัก) ของเมตริกซ์ $A = \left(a_{ij}\right)_{(m, n)}$ หมายถึงการกระทำอันใดอันหนึ่งดังต่อไปนี้

(I) สลับแถว (หลัก) i และ j ของ A

เขียน $R_i \longleftrightarrow R_j$ $(C_i \longleftrightarrow C_j)$

นั่นคือ แทนที่ $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ ด้วย $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$

และแทนที่ $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ ด้วย $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$

(II) คูณแถว (หลัก) i ของ A ด้วยตัวคงที่ $k \neq 0$

เขียน kR_i (kC_i)

นั่นคือ แทนแถว $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ ด้วย

$ka_{i1}, ka_{i2}, \ldots, ka_{in}$

(III) บวก k เท่าของแถว (หลัก) i ของ A กับแถว (หลัก) j ของ A $(i \neq j)$

เขียน $kR_i + R_j$ $(kC_i + C_j)$

นั่นคือ แทนแถว $a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}$ ด้วย

$a_{j1} + ka_{i1}, a_{j2} + ka_{i2}, \ldots, a_{jn} + ka_{in}$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}$

$R_1 \longleftrightarrow R_3$ จะได้

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

จาก A ถ้า $\frac{1}{3}R_3$ จะได้

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

จาก A ถ้า $(-2)R_2 + R_3$ จะได้

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์ B, C และ D ที่ได้เรียกว่าสมมูลย์แบบแถว (row equivalent) กับเมตริกซ์ A

<u>นิยาม 3.2</u> เมตริกซ์ $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ เรียกว่าเป็น<u>สมมูลย์แบบแถว</u> (หลัก) กับเมตริกซ์ $B = (b_{ij})_{(m,n)}$ ถ้า B ได้มาจาก A โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถว (หลัก) ของเมตริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด เขียนแทนด้วย $A \overset{R}{\sim} B$ $(A \overset{C}{\sim} B)$

เมตริกซ์ $A = (a_{ij})_{(m,n)}$ เรียกว่าเป็น<u>สมมูลย์</u> (equivalent) กับเมตริกซ์ $B = (b_{ij})_{(m,n)}$ ถ้า B ได้มาจาก A โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถวหรือกับหลักของเมตริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด เขียนแทนด้วย $A \sim B$

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

และ $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

จะได้ว่า $A \overset{R}{\sim} D$ เพราะว่า

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$2R_3 + R_2$ จะได้

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$R_2 \longleftrightarrow R_3$ จะได้

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$2R_1$ จะได้

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะได้ $A \overset{R}{\sim} D$

<u>ทฤษฎี 3.1</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ

(1) $A \sim A$

(2) ถ้า $A \sim B$ แล้ว $B \sim A$

(3) ถ้า $A \sim B$ และ $B \sim C$ แล้ว $A \sim C$

<u>พิสูจน์</u> (1) เป็นจริงโดยนิยาม 3.2

(2) ถ้าการกระทำเบื้องต้น ε ทำให้เมตริกซ์ A_1 เปลี่ยนไปเป็นเมตริกซ์ A_2 เราสามารถจะทำให้เมตริกซ์ A_2 เปลี่ยนกลับมาเป็น A_1 โดยใช้การกระทำเบื้องต้น ε^{-1} เช่น ε เป็นการกระทำเบื้องต้น โดยแถวที่ i ของ A_1 แทนที่ด้วย $kR_j + R_i$ ได้เป็นเมตริกซ์ A_2 ดังนั้นอินเวอร์ส ε^{-1} ของ ε คือการบวก $-kR_j$ กับแถวที่ i ของ A_2 จะได้กลับมาเป็น A_1

ถ้า ε เป็นการกระทำเบื้องต้น โดยแถวที่ i ของ A คูณด้วยสลาการ์ $k \neq 0$ ได้เมตริกซ์ A_2 ε^{-1} จะเป็นการกระทำเบื้องต้นโดยแถวที่ i ของ A_2 คูณด้วยสกาลาร์ $\frac{1}{k}$ จะได้กลับมาเป็น A_1

ถ้า ε เป็นการกระทำเบื้องต้นโดยแถวที่ i และแถวที่ j $(i \neq j)$ ของ A_1 สลับที่กันได้ A_2 ε^{-1} จะเป็นการกระทำเบื้องต้น โดยที่แถวที่ i และ j ของ A_2 สลับที่กัน จะได้กลับมาเป็น A_1

ฉะนั้น ถ้า A เปลี่ยนรูปไปเป็น B โดยการกระทำเบื้องต้นของอันดับจำกัด $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ ดังนั้น จะได้ $\varepsilon_m^{-1}, \varepsilon_{m-1}^{-1}, \ldots, \varepsilon_2^{-1}, \varepsilon_1^{-1}$ เป็นการกระทำเบื้องต้นของอันดับที่เปลี่ยนรูป B ไปเป็น A

$\therefore$ (2) เป็นจริง

(3) $A \sim B$ และ $B \sim C$

โดยนิยาม 3.2 ให้ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ เป็นอันดับจำกัดของการกระทำเบื้องต้นที่เปลี่ยน A ไปสู่ B

และให้ $\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots, \varepsilon_n^*$ เป็นอันดับจำกัดของการกระทำเบื้องต้นที่เปลี่ยน B ไปสู่ C

ดังนั้นจะได้ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m, \varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \ldots, \varepsilon_n^*$ เป็นอันดับจำกัดของการกระทำเบื้องต้นที่เปลี่ยนรูป A ไปสู่ C

นั่นคือ ถ้า $A \sim B$ และ $B \sim C$ แล้ว $A \sim C$

<u>นิยาม 3.3</u> A เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m \times n)$ จะเรียกเมตริกซ์ A ว่าเป็นเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถว (reduce row echelon from) ถ้า

(a) แต่ละ k แถวแรก ($1 \leq k \leq m$) มีอย่างน้อยหนึ่งสมาชิก ที่ไม่เป็นศูนย์ และถ้า $k < m$ แล้ว แถวที่ $k+1, k+2, \ldots, m$ ประกอบด้วยสมาชิกที่เป็นศูนย์ทั้งหมด

นั่นคือแถวต่าง ๆ ที่สมาชิกเป็นศูนย์ทั้งหมดจะอยู่ข้างล่างของเมตริกซ์ ถ้า $k = m$ แล้วไม่มีแถวใดเลยที่สมาชิกเป็นศูนย์ทุกตัว

(b) นับจากซ้ายไปทางขวา สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ในแต่ละแถวของ i เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, k$ เป็น 1

(c) ถ้า 1 ดังกล่าวในข้อ (b) อยู่ในแถวที่ i, $1 \leq i \leq k$ และปรากฏในหลักที่ j_i แล้ว $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$

(d) ทุกสมาชิกในหลัก j_i ตามข้อ (c) เป็นศูนย์หมด ยกเว้น 1 ในแถวที่ i

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

และ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

จะได้ว่า A, B และ C เป็นเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถว

สำหรับเมตริกซ์ A , $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$

เมตริกซ์ B , $j_1 = 1$, $j_2 = 3$, $j_3 = 4$

และ เมตริกซ์ C , $j_1 = 1$, $j_2 = 3$, $j_3 = 5$

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> กำหนดเมตริกซ์

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

และ
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น A, B, C และ D ไม่เป็นเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถว เนื่องจากไม่สอดคล้องกับข้อ (a), (b), (c) และ (d) ของนิยาม 3.3 ตามลำดับ

<u>ทฤษฎี 3.2</u> ทุก ๆ เมตริกซ์ (m x n) ที่ไม่เป็นเมตริกซ์ศูนย์เป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ที่อยู่ในรูปเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถว

เพื่อให้ดูหลักการในการพิสูจน์ง่ายขึ้นเราจะแสดงการพิสูจน์ไปพร้อมกับตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

<u>พิสูจน์</u>

<u>ขั้นที่ 1</u> หาหลักแรกนับจากทางซ้าย ซึ่งสมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์ เราจะเรียกหลักนี้ว่า pivotal column

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

pivot

Pivotal column ของ A

<u>ขั้นที่ 2</u> สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ใน pivotal column นับจากข้างบนลงข้างล่าง เรียกว่า pivot ซึ่งได้วงกลมไว้นั้น

<u>ขั้นที่ 3</u> สลับแถวแรกกับแถวที่มี pivot ปรากฏอยู่ (ถ้าเดิมไม่อยู่ในแถวแรก) เรียกเมตริกซ์ใหม่นี้ว่า A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$ แถวที่ 1 และแถวที่ 3 ของ A เปลี่ยนที่กัน

<u>ขั้นที่ 4</u> หารแถวแรกของ A_1 ด้วย pivot (คูณด้วยอินเวอร์สการคูณของ pivot) ดังนั้นสมาชิกในแถวแรกของ pivotal column จะเป็น 1 เรียกเมตริกซ์ใหม่นี้ว่า A_2

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

แถวแรกของ A_1 คูณด้วย $\frac{1}{2}$

<u>ขั้นที่ 5</u> บวกผลคูณระหว่างตัวคงที่และแถวแรกของ A_2 กับแถวอื่น ๆ ทำให้สมาชิกทุกตัวใน pivotal column เป็นศูนย์ (ยกเว้นสมาชิกในแถวแรก) ดังนั้นทุก ๆ สมาชิกใน pivotal column ของแถว 2, 3, ..., m เป็นศูนย์เรียกเมตริกซ์ใหม่นี้ว่า A_3

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

-2 เท่าของแถวแรกบวกกับแถวที่ 4

<u>ขั้นที่ 6</u> กำหนด B เป็น ((m-1) x n) สับเมตริกซ์ของ A_3 โดยการหักแถวแรกของ A_3 ออก แต่ไม่ได้ลบออกไป เพียงแต่เราเขียนแถวแรกของ A_3 ไว้เหนือเมตริกซ์ B กระทำการขั้น 1-5 ดังกล่าวแล้วบน B

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix} \\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

pivotal column

Pivot

$$B_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

แถวแรกและแถวที่ 2 ของ B สลับที่กัน

$$B_2 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

แถวแรกของ B_1 คูณด้วย $\frac{1}{2}$

$$B_3 = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 เท่าของแถวแรกของ B_2 บวกกับแถวที่สาม

<u>ขั้นที่ 7</u> บวกผลคูณระหว่างตัวคงที่และแถวแรกของ B_3 กับแถวแรกของ A_3 ที่อยู่บนแถวแรกของ B_3 เพื่อทำให้สมาชิกทุกตัวใน pivotal column ยกเว้น pivot เป็นศูนย์

$$B_3 = \begin{array}{c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \end{matrix}} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

(−1) เท่าของแถวแรกของ B_3 บวกกับแถว (ที่แรเงา) ที่อยู่บนแถวแรกของ B_3

<u>ขั้นที่ 8</u> กำหนด C เป็น ((m − 2) x n) สับเมตริกซของ B_3 โดยหักแถวแรกของ B_3 ออก และเขียนแถวอื่น ๆ ที่ไม่ได้อยู่ใน C ไว้เหนือ C (ตามลักษณะเดิม) กระทำขั้นที่ 1−7 บน C

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$= \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pivotal column

Pivot

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$C_1 = C_2 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

ไม่มีแถวของ C ถูกสลับที่ แถวแรกของ C คูณด้วย $\frac{1}{2}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-2) เท่าของแถวแรกของ C_2 บวกกับแถวที่ 2

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \end{matrix}$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 เท่าของแถวแรกของ C_3 บวกกับแถวแรกในแถวแลเงา และ $(-\frac{3}{2})$ เท่าของแถวแรกของ C_3 บวกกับแถวสองในแลเงา

ดำเนินการไปเรื่อย ๆ จะได้เมตริกซ์สุดท้าย

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

เป็นรูปเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถว

ต่อไปนี้จะประยุกต์ผลจากทฤษฎี 3.2 เพื่อใช้หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

เนื่องจากการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น โดยวิธีการกำจัดตัวแปร คือการทำให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่จะกำจัดเป็นศูนย์ โดยกระบวนการสามข้อดังกล่าวมาแล้ว ฉะนั้นต่อไปจะพิจารณาเฉพาะค่าของสัมประสิทธิ์ และตัวคงที่เท่านั้น โดยเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ออกเมนต์ และวิธีการสามข้อก็คือวิธีการของการกระทำเบื้องต้นกับแถวของเมตริกซ์นั่นเองและเนื่องจากกระบวนการสามข้อดังกล่าวทำให้ได้ระบบใหม่ ซึ่งมีเซ็ตคำตอบเหมือนกับระบบเดิม แต่การกระทำเบื้องต้นกับแถวของเมตริกซ์ A ทำให้ได้เมตริกซ์ B ซึ่งเรียกว่า A สมมูลย์แบบแถวกับ B ดังนั้นจะได้ทฤษฎีดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 3.3</u> ให้ $AX = B$ และ $CX = D$ เป็นระบบสมการเชิงเส้นสองระบบ ซึ่งแต่ละระบบมี m สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า n ตัว ถ้าเมตริกซ์ออกเมนต์ $(A \mid B)$ และ $(C \mid D)$ เป็นสมมูลย์แบบแถวกันแล้ว ระบบทั้งสองจะมีคำตอบเหมือนกัน

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $(A \mid B)$ เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ $(C \mid D)$ ดังนั้นจะมีการกระทำเบื้องต้นกับแถว จำนวนจำกัดที่เปลี่ยน $(A \mid B)$ ไปสู่ $(C \mid D)$

แต่จากความจริงที่ว่าการกระทำเบื้องต้นกับแถวของเมตริกซ์ออกเมนต์คือการกระทำสามแบบบนระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งการกระทำดังกล่าวทำให้ได้ระบบ

ใหม่ที่มีคำตอบเหมือนกับระบบเดิมที่กำหนดให้ ถ้าระบบหนึ่งไม่มีคำตอบอีกระบบหนึ่งจะไม่มีคำตอบด้วย

ดังนั้น $AX = B$ และ $CX = D$ มีคำตอบเหมือนกัน

<u>ทฤษฎี 3.4</u> ถ้าเมตริกซ์ A และ B ซึ่งมีขนาด $(m \times n)$ เป็นสมมูลย์แบบแถวกันแล้ว ระบบสมการเชิงเส้น $AX = 0$ และ $BX = 0$ จะมีคำตอบเหมือนกัน

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากการกระทำเบื้องต้นกับแถวของเมตริกซ์ 0 แบบใด ๆ จะได้เมตริกซ์ 0 เสมอ

ดังนั้นการกระทำเบื้องต้นกับแถวของเมตริกซ์ออกเมนต์ $[A \mid 0]$ จะเปลี่ยนแปลงเฉพาะสับเมตริกซ์ A ของเมตริกซ์ออกเมนต์เท่านั้น

เมื่อ A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ B ดังนั้นจะมีการกระทำเบื้องต้นกับแถวจำนวนจำกัดที่เปลี่ยนเมตริกซ์ A ไปสู่เมตริกซ์ B

ดังนั้นการกระทำเบื้องต้นกับแถวจำนวนจำกัดดังกล่าว จะเปลี่ยน $[A \mid 0]$ ไปสู่ $[B \mid 0]$ ด้วย

นั่นคือ $[A \mid 0] \overset{R}{\sim} [B \mid 0]$

โดยทฤษฎี 3.3 จะได้ $AX = 0$ และ $BX = 0$ มีคำตอบเหมือนกัน

ตัวอย่างต่อไปนี้ จะแสดงวิธีแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งเรียกว่า Gauss - Jordan reduction

<u>ตัวอย่างที่ 13</u> พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ 3x \quad\quad - z &= 3 \end{aligned} \qquad \ldots\ldots(3.2.3)$$

เมตริกซ์ออกเมนต์ของสมการเชิงเส้นคือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

หาเมตริกซ์ที่อยู่ในรูปเอชซีลอนแบบแถว และเป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ออกเมนต์ของสมการเชิงเส้นนี้

$$\begin{array}{l} \\ -2R_1 + R_2 \\ -3R_1 + R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ -\frac{1}{5} R_2 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} -2R_2 + R_1 \\ \\ 6R_2 + R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} \\ -\frac{1}{4} R_3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} -R_3 + R_1 \\ \\ -R_3 + R_2 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.4)$$

ซึ่งเป็นรูปเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถว และเป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ออกเมนต์ของสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้

ระบบสมการเชิงเส้นของ (3.2.4) คือ

$$x = 2$$

$$y = -1$$

$$z = 3$$

ดังนั้นคำตอบของระบบ (3.2.3) คือ

$$x = 2$$

$$y = -1$$

$$z = 3$$

<u>ตัวอย่างที่ 14</u> พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3 \\ 2x + 5y - z - 9w &= -3 \\ 2x + y - z + 3w &= -11 \\ x - 3y + 2z + 7w &= -5 \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(3.2.5)$$

เมตริกซ์ออกเมนต์ของระบบคือ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right]$$

ซึ่งเป็นสมมูลย์แบบแถวกับ

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \ldots\ldots\ldots(3.2.6)$$

ระบบสมการเชิงเส้นของ (3.2.6) คือ

$$\begin{aligned} x \quad\; + 2w &= -5 \\ y - 3w &= 2 \\ z - 2w &= 3 \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots(3.2.7)$$

ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} x &= -5 - 2r \\ y &= 2 + 3r \\ z &= 3 + 2r \\ w &= r \end{aligned}$$

เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ

∴ ระบบสมการเชิงเส้นที่กำหนดให้มีคำตอบไม่จำกัด (infinitely many solutions)

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> พิจารณาระบบ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 6 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 13 \\ x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 10x_4 + 3x_5 &= 20 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 8x_5 &= 13 \end{aligned} \quad \ldots\ldots(3.2.8)$$

เมตริกซ์ออกเมนต์ของระบบนี้คือ

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 4 & 13 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 3 & 20 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 & 13 \end{array}\right)$$

ซึ่งเป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \ldots(3.2.9)$$

ระบบเชิงเส้นของ (3.2.9) ได้แก่

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 10x_5 &= -1 \\ x_2 \quad - x_4 - 7x_5 &= -7 \\ x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 7 \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้คำตอบของระบบที่กำหนดให้คือ

$x_1 = -1 - 10s$

$x_2 = -7 + r + 7s$

$x_3 = 7 - 2r - 3s$

$x_4 = r$ เมื่อ r, s เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$x_5 = s$

<u>ตัวอย่างที่ 16</u> พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 7 \\ 2x + y - z &= 5 \\ -x + 2y + 3z &= 4 \end{aligned} \qquad \text{.....(3.2.10)}$$

เมตริกซ์ออกเมนต์ของระบบนี้คือ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{-2R_1 + R_2 \\ R_1 + R_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & -5 & -9 \\ 0 & 5 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\underset{-\frac{1}{5}R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 5 & 5 & 11 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{-3R_2 + R_1 \\ -5R_2 + R_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{9}{5}, \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{.....(3.2.11)}$$

ซึ่งระบบสมการของ (3.2.11) คือ

$$\begin{aligned} x \qquad\quad - z &= \frac{8}{5} \\ y + z &= \frac{9}{5} \qquad \ldots\ldots(3.2.12) \\ 0x + 0y + 0z &= 1 \end{aligned}$$

ซึ่งสมการสุดท้ายของระบบ (3.2.12) คือ

$$0x + 0y + 0z = 0 = 1$$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ ระบบที่กำหนดให้ไม่มีคำตอบสำหรับ x, y และ z

ตัวอย่างสุดท้ายนี้แสดงให้เห็นว่าระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ A มีขนาด $(m \times n)$ ไม่มีคำตอบ ต่อเมื่อออกเมนต์เมตริกซ์เป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ในรูปเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถว ซึ่งจะมีแถวซึ่งสมาชิก n ตัวแรกเป็น 0 และสมาชิกตัวที่ $(n + 1)$ ในแถวดังกล่าวเป็น 1

3.3 <u>ระบบโฮโมจีเนียส</u> (Homogeneous Systems)

ระบบสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \qquad\qquad \ldots\ldots(3.3.1) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

เรียนว่าระบบโฮโมจีเนียส

เราสามารถเขียนระบบสมการ (3.3.1) ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$AX = 0 \qquad \ldots\ldots(3.3.2)$$

คำตอบ $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ ของระบบโฮโมจีเนียส เรียกว่าคำตอบทริเวียล (trivial solution)

คำตอบ $x_1, x_2, \dots, x_n$ สำหรับบางค่าของ x_i ที่ไม่เท่ากับศูนย์ (บาง $x_i \neq 0$) ของระบบโฮโมจีเนียส เรียกว่าคำตอบนอนทริเวียล (nontrivial solution)

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> พิจารณาระบบโฮโมจีเนียส

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \end{aligned} \qquad \dots\dots(3.3.3)$$

เมตริกซ์ออกเมนต์ของระบบนี้คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

หาเมตริกซ์ที่อยู่ในรูปเอชชีลอนเมตริกซ์ที่เป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ออกเมนต์ของระบบสมการเชิงเส้นนี้

$$\begin{array}{c} \\ R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\frac{1}{5} R_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & 0 \end{array}\right]$$

$$
\begin{array}{l} -2R_2 + R_1 \\ \\ 3R_2 + R_3 \end{array}
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{l} \sim \\ \\ -\frac{1}{5} R_3 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\begin{array}{l} -R_3 + R_1 \\ -R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}
\sim
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
$$

จะได้ $x = 0$

$y = 0$

$z = 0$

เป็นคำตอบของระบบ (3.3.3)

นั่นคือระบบโฮโมจีเนียส (3.3.3) ที่กำหนดให้มีเพียงคำตอบทริเวียลเท่านั้น

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> ระบบโฮโมจีเนียส

$$
\begin{aligned}
x + y + z + w &= 0 \\
x + w &= 0 \qquad \qquad .....(3.3.4) \\
x + 2y + z &= 0
\end{aligned}
$$

เมตริกซ์ออกเมนต์

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \ldots\ldots(3.3.5)$$

ซึ่งระบบโฮโมจีเนียสของ (3.3.5) คือ

$$\begin{aligned} x \quad\quad + w &= 0 \\ y \quad - w &= 0 \\ z + w &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบ (3.3.4) คือ

$$\begin{aligned} x &= -r \\ y &= r \\ z &= -r \\ w &= r \end{aligned}$$

เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ

<u>ทฤษฎี 3.5</u> ระบบโฮโมจีเนียสของ m สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า n ตัว จะมีคำตอบนอนทิเวียล ถ้า $m < n$ นั่นคือจำนวนตัวไม่ทราบค่ามากกว่าจำนวนสมการนั่นเอง

<u>พิสูจน์</u> ให้ C เป็นเมตริกซ์ในรูปเอชชีลอนแบบแถว ซึ่งเป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ A

ดังนั้นระบบ $AX = 0$ และ $CX = 0$ มีคำตอบเหมือนกัน โดยทฤษฎี 3.4

ถ้าให้ r เป็นจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ (แถวที่เป็นศูนย์หมายถึงแถวที่สมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ สำหรับแถวที่มีสมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์เรียกว่าแถวที่ไม่เป็นศูนย์)

ดังนั้น $r \leq m$

สำหรับ $m < n$ จะได้ $r < n$

ตอนนี้จะต้องแก้ปัญหาระบบสมการโฮโมจีเนียสของ r สมการ ที่มีตัวไม่ทราบค่า n ตัว และเราสามารถหาค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ในเทอมของ $x_{r+1}, \ldots, x_n$ ของตัวไม่ทราบค่า $n - r$ ตัวที่เหลืออยู่จากรูปเอชชีลอนแบบแถว

เมื่อกำหนดค่าของตัวไม่ทราบค่า $x_{r+1}, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ จะได้ค่า x_i สำหรับ $i = 1, \ldots, r$ ในเทอมของ $x_{r+1}, \ldots, x_n$

นั่นคือจะได้คำตอบนอนทริเวียลของ $CX = 0$ ซึ่งเป็นคำตอบของ $AX = 0$

ทฤษฎีอาจกล่าวได้อีกแบบหนึ่ง ดังนี้คือ

ถ้าระบบโฮโมจีเนียสของ m สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า n ตัวมีเพียงคำตอบทริเวียล $(x = 0)$ แล้ว $m \geq n$

3.4 <u>เมตริกซ์เบื้องต้น</u> (Elementary Matrices)

<u>นิยาม 3.4</u> ให้ E เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ ที่ได้จากเมตริกซ์เอกลักษณ์ I_n โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถวหรือกระทำเบื้องต้นกับหลักแบบ (I), (II) หรือ (III) อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงหนึ่งครั้ง เรียกว่าเมตริกซ์เบื้องต้น

ถ้า ε เป็นการกระทำเบื้องต้น และ $\varepsilon(I)$ หมายถึงการกระทำเบื้องต้นแบบใดแบบหนึ่งกับ I

นั่นคือ $\varepsilon(I) = E$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของเมตริกซ์เบื้องต้น

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เกิดจากการคูณแถวที่ 2 ของ I_3 ด้วย -2

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ เกิดจากการสลับที่ของแถวที่ 2 และแถวที่ 3 ของ I_3

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เกิดจากการคูณแถวที่ 2 ของ I_3 ด้วย 2 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 1

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เกิดจากการคูณแถวที่ 3 ของ I_3 ด้วย 3 แล้วนำไปบวกกับแถวที่ 1

<u>ตัวอย่างที่ 19</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ให้ B เกิดจากเมตริกซ์ A โดยใช้การกระทำเบื้องต้น

$-3R_3 + R_1$ กับเมตริกซ์ A

ดังนั้น $B = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

ให้ E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น เกิดจาก I_3 โดยใช้การกระทำเบื้องต้น $-3R_3 + R_1$ กับเมตริกซ์ I_3 (นั่นคือ E เกิดจาก I_3 โดยใช้การกระทำเบื้องต้นกับแถวแบบเดียวกับการกระทำบน A)

จะได้

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ฉะนั้น

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

<u>ตัวอย่างที่ 20</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ให้ B เกิดจากเมตริกซ์ A โดยใช้การกระทำเบื้องต้น $2C_2 + C_1$ (หมายถึงเอา 2 คูณกับหลักที่ 2 แล้วเอาไปบวกกับหลักที่ 1) กับเมตริกซ์ A

จะได้ $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ให้ E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้นเกิดจาก I_3 โดยใช้การกระทำเบื้องต้น $2C_2 + C_1$ กับเมตริกซ์ I_3

จะได้ $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ฉะนั้น

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

จากตัวอย่างทั้งสองตัวอย่างนี้นำไปสู่ทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 3.6</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m \times n)$ และเมตริกซ์ B เกิดจากการกระทำเบื้องต้นกับแถว (หลัก) แบบ (I), (II) หรือ (III) แบบใดแบบหนึ่งเพียงครั้งเดียวของ A ให้ E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น ซึ่งเกิดจาก $I_m(I_n)$ โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถว (หลัก) แบบเดียวกับการกระทำของ A แล้ว $B = EA$ $(B = AE)$

<u>พิสูจน์</u> ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $(m \times n)$ โดยที่ $m \geq 2$

<u>ตอนที่ 1</u> ให้ B เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจาก A โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถวแบบ (I) ของ A

นั่นคือ แถวที่ i และแถวที่ j $(i \neq j)$ ของ A สลับที่กัน

E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น เกิดจากการกระทำเบื้องต้นกับแถวแบบ (I) ของ I_m เช่นเดียวกับการกระทำของ A

นั่นคือ แถวที่ i และแถวที่ j $(i \neq j)$ ของ I_m สลับที่กัน

เพราะฉะนั้น

(แถวที่ j ของ B) = (แถวที่ i ของ A)

= (แถวที่ i ของ I_mA)

= (แถวที่ i ของ I_m) A โดยทฤษฎี 2.9

= (แถวที่ j ของ E) A

= (แถวที่ j ของ EA) โดยทฤษฎี 2.9

$$[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } B] = [\text{แถวที่ } j \text{ ของ } A]$$
$$= [\text{แถวที่ } j \text{ ของ } I_mA]$$
$$= [\text{แถวที่ } j \text{ ของ } I_m]\,A$$
$$= [\text{แถวที่ } i \text{ ของ } E]\,A$$
$$= [\text{แถวที่ } i \text{ ของ } EA]$$

สำหรับแถว k ใด ๆ ที่ $k \neq i$ และ $k \neq j$ จะได้

$$[\text{แถวที่ } k \text{ ของ } B] = [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } A]$$
$$= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } I_mA]$$
$$= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } I_m]\,A$$
$$= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } E]\,A$$
$$= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } EA]$$

ดังนั้นสำหรับแบบ (I)

$$B = EA$$

<u>ตอนที่ 2</u> ให้ B เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจาก A โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถวแบบ (II) ของ A นั่นคือ คูณแถวที่ i ของ A ด้วยจำนวนจริง c ซึ่ง $c \neq 0$

E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น เกิดจาก I_m โดยเอา c ซึ่ง $c \neq 0$ คูณแถวที่ i ของ I_m

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } B] &= c\,[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } A] \\
&= c\,[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } I_mA] \\
&= [c(\text{แถวที่ } i \text{ ของ } I_m)]\,A \\
&= [\text{แถวที่ } i \text{ ของ } E]\,A \\
&= [\text{แถวที่ } i \text{ ของ } EA]
\end{aligned}$$

สำหรับแถว k ใด ๆ ที่ $k \neq i$

จะได้

$$\begin{aligned}
[\text{แถวที่ } k \text{ ของ } B] &= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } A] \\
&= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } I_mA] \\
&= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } I_m]\,A \\
&= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } E]\,A \\
&= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } EA]
\end{aligned}$$

ดังนั้นสำหรับแบบที่ (II)

$$B = EA$$

<u>ตอนที่ 3</u> ให้ B เกิดจาก $cR_i + R_j$ ของ A (แบบ III))

นั่นคือ คูณแถวที่ i ของ A ด้วย c ซึ่ง $c \neq 0$ แล้วนำไปบวกกับแถวที่ j ของ A

E เกิดจาก $cR_i + R_j$ ของ I_m นั่นคือ คูณแถวที่ i ของ I_m ด้วย c ซึ่ง $c \neq 0$ แล้วนำไปบวกกับแถวที่ j ของ I_m

ดังนั้น

$$[\text{แถวที่ } j \text{ ของ } B] = c\,[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } A] + [\text{แถวที่ } j \text{ ของ } A]$$

$$= c\,[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } I_mA] + [\text{แถวที่ } j \text{ ของ } I_mA]$$

$$= (c\,[\text{แถวที่ } i \text{ ของ } I_m] + [\text{แถวที่ } j \text{ ของ } I_m])A$$

$$= [\text{แถวที่ } j \text{ ของ } E]A$$

$$= [\text{แถวที่ } j \text{ ของ } EA]$$

ให้ k เป็นแถวใด ๆ ที่ $k \neq j$

$$\therefore\ [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } B] = [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } A]$$

$$= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } I_mA]$$

$$= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } I_m]A$$

$$= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } E]A$$

$$= [\text{แถวที่ } k \text{ ของ } EA]$$

ดังนั้นสำหรับแบบ (III) จะได้

$$B = EA$$

ฉะนั้น

จะได้ $B = EA$

นั่นคือถ้า ε เป็นการกระทำเบื้องต้นกับแถว แบบใดแบบหนึ่ง และ $\varepsilon(A)$ หมายถึงการกระทำเบื้องต้นกับแถวของเมตริกซ์ A จะได้

$$\varepsilon(A) = (\varepsilon(I))A = EA$$

<u>ทฤษฎี 3.7</u> ถ้า A และ B ต่างเป็นเมตริกซ์ขนาด $(m \times n)$ แล้ว A เป็นสมมูลย์แบบแถว (หลัก) กับ B ต่อเมื่อ

$$B = E_kE_{k-1} \cdots E_2E_1A \quad (B = AE_1E_2 \cdots E_k)$$

เมื่อ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

พิสูจน์ (===>) ถ้า A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ B

ดังนั้น B จะได้จาก A โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถว เป็นจำนวนจำกัด

นั่นคือจะมี $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ ซึ่ง

$$B = \varepsilon_k(\varepsilon_{k-1}(\ldots(\varepsilon_2(\varepsilon_1(A)))\ldots))$$

โดยใช้ทฤษฎี 3.6 และกฎการจัดหมู่จะได้

$$B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$$

(<===) ถ้า $B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$ เมื่อ E_i เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

ดังนั้นจะมีการกระทำเบื้องต้นกับแถว ε_i

ซึ่ง $E_i = \varepsilon_i(I)$

ดังนั้น $B = (\varepsilon_k(I))(\ldots)(\varepsilon_1(I))A$

โดยใช้กฎการจัดหมู่และทฤษฎี 3.6 จะได้

$$B = \varepsilon_k(\varepsilon_{k-1}(\ldots(\varepsilon_2(\varepsilon_1(A)\ldots))$$

นั่นคือ A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ B

ตัวอย่างที่ 21 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) ให้การกระทำเบื้องต้น ε เกิดจาก $R_2 \longleftrightarrow R_3$

ฉะนั้น

$$\varepsilon(I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = E$$

ε^{-1} เกิดจาก $R_2 \longleftrightarrow R_3$

จะได้ $\varepsilon^{-1}(E) = I_3$

และ $\varepsilon^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

เพราะว่า

$$\varepsilon(I_3)\varepsilon^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= I_3$$

$$= \varepsilon^{-1}(I)\varepsilon(I)$$

$\therefore\ \varepsilon^{-1}(I_3) = E^{-1}$

(2) ให้การกระทำเบื้องต้น ε เกิดจาก $3R_3$

ฉะนั้น

$$\varepsilon(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = E$$

ε^{-1} เกิดจาก $\frac{1}{3}R_3$

จะได้ $\varepsilon^{-1}(E) = I_3$

และ $\varepsilon^{-1}(I_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

เพราะว่า $\varepsilon(I_3)\varepsilon^{-1}(I_3) = \varepsilon^{-1}(I_3)\varepsilon(I_3) = I_3$

ดังนั้น $\varepsilon^{-1}(I_3) = E^{-1}$

(3) ให้การกระทำเบื้องต้น ε เกิดจาก $3R_2 + R_3$

ฉะนั้น

$$\varepsilon(I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = E$$

ε^{-1} เกิดจาก $-3R_2 + R_3$

จะได้ $\varepsilon^{-1}(E) = I_3$

$$\text{และ } \varepsilon^{-1}(I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

เพราะว่า $\varepsilon(I_3)\varepsilon^{-1}(I_3) = \varepsilon^{-1}(I_3)\varepsilon(I_3) = I_3$

เพราะฉะนั้น $\varepsilon^{-1}(I_3) = E^{-1}$

<u>ทฤษฎี 3.8</u> เมตริกซ์เบื้องต้นแบบแถว (หลัก) เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และมีอินเวอร์สเป็นเมตริกซ์เบื้องต้นชนิดเดียวกัน

<u>พิสูจน์</u> เมตริกซ์เบื้องต้นแบบแถว (หลัก) E เกิดจากการใช้ การกระทำเบื้องต้นกับแถว (หลัก) ชนิดใดชนิดหนึ่งกับเมตริกซ์เอกลักษณ์ I ดังการกระทำซึ่งกลับกัน จะทำให้ E กลับไปเป็น I ตามเดิม นั่นคือ

(1) ถ้า E เกิดจาก $R_i \longleftrightarrow R_j$ ของ I จะได้ว่า $R_i \longleftrightarrow R_j$ ของ E จะเปลี่ยน E กลับไปเป็น I

(2) ถ้า E เกิดจาก kR_i ของ I จะได้ว่า $\frac{1}{k}R_i$ ของ E จะเปลี่ยน E กลับไปเป็น I

(3) ถ้า E เกิดจาก $kR_i + R_j$ ของ I จะได้ว่า $-kR_i + R_j$ ของ E จะเปลี่ยน E กลับไปเป็น I

เมื่อ ε เป็นการกระทำเบื้องต้นแบบใด ๆ ε^{-1} จะเป็นการกระทำซึ่งกลับกันกับ ε

$$
\begin{aligned}
\text{ดังนั้น}\quad \varepsilon^{-1}(\varepsilon(I)) &= \varepsilon^{-1}(E) \\
&= (\varepsilon^{-1}(I))\,E \qquad \text{โดยทฤษฎี 3.6} \\
&= I \\
\text{และ}\quad \varepsilon(\varepsilon^{-1}(I)) &= \varepsilon(I)(\varepsilon^{-1}(I)) \\
&= E(\varepsilon^{-1}(I)) \\
&= I
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $E^{-1} = \varepsilon^{-1}(I)$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น และเป็นอินเวอร์สของ E ฉะนั้น E เป็นนอนซิงกูลาร์

<u>ทฤษฎี 3.9</u> ถ้า A เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ และให้ระบบสมการโฮโมจีเนียส $AX = 0$ มีเพียงคำตอบทริเวียล กล่าวคือมีเฉพาะคำตอบ $X = 0$ แล้ว A จะเป็นสมมูลย์แบบแถวกับ I_n

<u>พิสูจน์</u> ให้ B เป็นเมตริกซ์ในรูปเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถว ซึ่งเป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ A

ดังนั้นระบบสมการ $AX = 0$ และ $BX = 0$ จะมีคำตอบเหมือนกัน (โดยทฤษฎี 3.4) และ $BX = 0$ จะมีเฉพาะคำตอบทริเวียล $(X = 0)$

ให้ r เป็นจำนวนของแถวที่ไม่เป็นศูนย์ของเมตริกซ์ B

ดังนั้นระบบ $BX = 0$ ประกอบด้วยสับเมตริกซ์ $(r \times n)$ ของสัมประสิทธิ์ที่แต่ละแถวมีสมาชิกบางตัวไม่เป็นศูนย์

แต่เนื่องจากระบบสมการโฮโมจีเนียสที่มีเฉพาะคำตอบทริเวียล นั้นมีค่า $r \geq n$ (โดยทฤษฎี 3.5)

และเนื่องจาก B เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ ดังนั้น $r = n$

นั่นคือ $B = I_m$ เพราะว่า B เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ ในรูปเอชชีลอนแบบแถวที่ไม่มีแถวที่เป็นศูนย์ จึงอยู่ในรูป I_n ได้เท่านั้น

ดังนั้นจะได้ว่า A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ I_n

ทฤษฎีต่อไปนี้จะเกี่ยวข้องกับซิงกูลาร์ และนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ซึ่งเคยกล่าวถึงมาบ้างแล้วในบทที่ 2

<u>ทฤษฎี 3.10</u> ถ้าเมตริกซ์ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้วระบบโฮโมจีเนียส $AX = 0$ จะมีเพียงคำตอบทริเวียล

<u>พิสูจน์</u> ให้ A เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้น A จะมีอินเวอร์ส A^{-1}

สำหรับ $AX = 0$

จะได้ $A^{-1}(AX) = A^{-1}(0)$

นั่นคือ $(A^{-1}A)X = 0$

แต่ $(A^{-1}A)X = IX = X$

ดังนั้น $X = 0$

นั่นคือ จะมีเพียงคำตอบทริเวียล

<u>ทฤษฎี 3.11</u> เมตริกซ์ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ต่อเมื่อ A เป็นผลคูณของเมตริกซ์เบื้องต้น

<u>พิสูจน์</u> (===>) ให้ A เป็น $(n \times n)$ นอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้นระบบโฮโมจีเนียส $AX = 0$ มีเพียงคำตอบทริเวียล $(X = 0)$ (จากทฤษฎี 3.10)

แต่โดยทฤษฎี 3.9 ถ้าระบบโฮโมจีเนียส $AX = 0$ มีเพียงคำตอบทริเวียล จะได้ว่า A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ I_n

นั่นคือจะมีเมตริกซ์เบื้องต้น $E_1, E_2, \ldots, E_k$

ซึ่ง $I_n = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A$

เนื่องจากเมตริกซ์เบื้องต้นมีอินเวอร์ส และอินเวอร์สของเมตริกซ์เบื้องต้นจะเป็นเมตริกซ์เบื้องต้นด้วย

ดังนั้นจะได้ว่า

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1} I_n$$

$$= E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{k-1}^{-1} E_k^{-1}$$

นั่นคือ A เป็นผลคูณของเมตริกซ์เบื้องต้น

(<===) ถ้า A เป็นผลคูณของเมตริกซ์เบื้องต้น $E_1, E_2, \ldots, E_k$

กล่าวคือ $A = E_1 E_2 \ldots E_k$

แต่เนื่องจากเมตริกซ์เบื้องต้นเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และผลคูณของนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ด้วย (ทฤษฎี 2.1.3)

ฉะนั้น A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

<u>ทฤษฎี 3.12</u> เมตริกซ์ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ต่อเมื่อ A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ I_n

<u>พิสูจน์</u> (===>) ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว A เป็นผลคูณของเมตริกซ์เบื้องต้น (โดยทฤษฎี 3.11)

กล่าวคือ $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$ เมื่อ $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

จะได้ว่า $A = AI_n$

$$= E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n$$

$$\therefore I_n = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

นั่นคือ A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ I_n

(<===) ถ้า A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ I_n แล้ว

$I_n = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$ (โดยทฤษฎี 3.7)

เมื่อ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

$$\therefore A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} I_n$$

$$= E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

ซึ่ง $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_k^{-1}$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

ฉะนั้น A เป็นผลคูณของเมตริกซ์เบื้องต้น และจากทฤษฎี 3.11

จะได้ว่า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

3.5 อินเวอร์สของเมตริกซ์ (The inverse of a Matrix)

จากทฤษฎี 3.12 จะได้ว่า

ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์แล้ว A สมมูลย์แบบแถวกับ I_n

กล่าวคือ

$$I_n = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

$$\therefore A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

ดังนั้นเราสามารถที่จะพิสูจน์ได้ว่า

$$A^{-1} = (E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1})^{-1}$$

$$= E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$$

วิธีคำนวณหาอินเวอร์สของ A กระทำได้โดยง่ายคือ เขียนพาร์ทิชันเมตริกซ์

$$[A \mid I_n]$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(E_k E_{k-1} \cdots E_1)[A \mid I_n] &= [E_kE_{k-1} \cdots E_1A \mid E_kE_{k-1} \cdots E_1I_n] \\ &= [(E_kE_{k-1} \cdots E_1)(E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}) \mid E_kE_{k-1} \cdots E_1] \\ &= [I_n \mid A^{-1}]\end{aligned}$$

นั่นคือเมื่อเขียนพาร์ทิชันเมตริกซ์ $[A \mid I_n]$ แล้วกระทำเบื้องต้นแบบแถวบนพาร์ทิชันเมตริกซ์ จนกระทั่งได้พาร์ทิชันเมตริกซ์อยู่ในรูป $[I_n \mid P]$ จะได้ว่า $P = A^{-1}$

<u>ตัวอย่างที่ 22</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\overset{R}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

<u>ทฤษฎี 3.13</u> A เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ จะเป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ต่อเมื่อ A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ B ซึ่งมีอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์

<u>พิสูจน์</u> (==>) ให้ A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

ถ้า A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ I_n

ดังนั้น $I_n = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

เมื่อ $E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

แสดงว่า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ (ตามทฤษฎี 3.11) ขัดแย้งกับข้อกำหนด

ดังนั้น A จะเป็นสมมูลย์แบบแถวกับ $B \neq I_n$ ซึ่ง B เป็นรูปเอชชีลอนแบบแถว จะได้ว่า B ต้องมีอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์

(<===) ให้ A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ B ซึ่งมีอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์ นั่นแสดงว่า B เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ (โดยทฤษฎี 2.17)

เนื่องจาก A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ B จะได้ B เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ A (โดยทฤษฎี 3.1)

ดังนั้น $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$

เมื่อ $E_k, E_{k-1}, \ldots, E_1$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น ซึ่งเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้น $B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$ เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ด้วย ซึ่งขัดแย้ง

ดังนั้น A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

<u>ตัวอย่างที่ 23</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

<u>วิธีทำ</u> $$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

เนื่องจากเมตริกซ์ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ เป็นสมมูลย์แบบ

แถวกับเมตริกซ์ A

แต่ B เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

$\therefore$ A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์คือไม่สามารถหาอินเวอร์สได้

<u>ทฤษฎี 3.14</u> ถ้า A และ B เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ ซึ่ง $AB = I_n$ $(BA = I_n)$ แล้ว $B = A^{-1} (A = B^{-1})$

<u>พิสูจน์</u> ขั้นแรกจะแสดงว่า ถ้า $AB = I_n$ แล้ว A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

สมมุติว่า A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้น A จะเป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ C ซึ่งมีอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์

จะได้ $C = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$

เมื่อ $E_1, E_2, \ldots, E_k$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

ดังนั้น $CB = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 AB$

นั่นคือ AB เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ CB

เนื่องจาก C มีอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น CB มีอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์ โดยทฤษฎี 3.13 จะได้ว่า AB เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้น $AB = I_n$ เป็นไปไม่ได้ เพราะว่า I_n เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ซึ่งขัดแย้งกับข้อกำหนด

เพราะฉะนั้น A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้นจึงหา A^{-1} ได้

จาก $AB = I_n$

จะได้ $A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n = A^{-1}$

แต่ $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = I_nB = B$

นั่นคือ $B = A^{-1}$

__ทฤษฎี 3.15__ ถ้า A เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ ระบบโฮโมจีเนียส

$$AX = 0$$

มีคำตอบนอนทริเวียลต่อเมื่อ A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

__พิสูจน์__ (===>) สมมุติ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ดังนั้นจะมี A^{-1}

และจะได้ $A^{-1}(AX) = A^{-1}0 = 0$

แต่ $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_nX = X$

นั่นคือ $X = 0$

ดังนั้นคำตอบของ $AX = 0$ คือ $X = 0$

(<===) ถ้า A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

ให้ B เป็นเมตริกซ์ในรูปเอชชีลอนแบบแถว ซึ่ง A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ B

ดังนั้นโดยทฤษฎี 3.13 เมตริกซ์ B จะมีอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์

ให้ r เป็นจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์

ดังนั้น $r < n$

ฉะนั้นจะต้องแก้ปัญหาระบบสมการโฮโมจีเนียสของ r สมการที่มีตัวไม่ทราบค่า n ตัว

เราสามารถหาค่าของ $x_1, x_2, \ldots, x_r$ ในเทอมของ $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ ของตัวไม่ทราบค่า $n - r$ ตัวที่เหลืออยู่ในรูปเอชชีลอนแบบแถว และเนื่องจากแถวที่ $r + 1$ ถึงแถวที่ n (นับจากข้างบนลงข้างล่าง) เป็นศูนย์ จึงกำหนดค่า $x_{r+1}, \ldots, x_n$ เป็นค่าต่าง ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ได้

ดังนั้นระบบโฮโมจีเนียสจึงมีคำตอบนอนทริเวียล

<u>ตัวอย่างที่ 24</u> เนื่องจาก $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

เมื่อพิจารณาระบบสมการ

$$AX = 0$$

นั่นคือ $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

รูปเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถวของเมตริกซ์ออกเมนต์ คือ

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ดังนั้นคำตอบที่ได้คือ

$x_1 = -2r$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$x_2 = r$

3.6 เมตริกซ์สมมูลย์ (Equivalent Matrices)

จากนิยาม 3.2 ถ้า A และ B เป็น (m x n) เมตริกซ์ A เป็นสมมูลย์กับ B ถ้า B ได้มาจาก A โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถว หรือหลักเป็นจำนวนครั้งจำกัด

ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีและตัวอย่าง เกี่ยวกับเมตริกซ์สมมูลย์

<u>ทฤษฎี 3.16</u> ถ้า A เป็น (m x n) เมตริกซ์ ที่ไม่เป็นเมตริกซ์ศูนย์ แล้ว A จะเป็นสมมูลย์กับพาร์ทิชันเมตริกซ์ในรูป

$$\begin{bmatrix} I_k & {}_{k}O_{n-k} \\ {}_{m-k}O_{k} & {}_{m-k}O_{n-k} \end{bmatrix}$$

เมื่อตัวเลขที่ห้อยอยู่ข้างใต้ O บอกขนาดของ O เช่น ${}_{k}O_{n-k}$ หมายถึงเมตริกซ์ O มีขนาด (k x(n - k))

<u>พิสูจน์</u>

<u>ขั้นที่ 1</u> โดยทฤษฎี 3.2 จะได้ A เป็นสมมูลย์กับเมตริกซ์ B ซึ่งอยู่ในรูปเอซชีลอนเมตริกซ์แบบแถว

<u>ขั้นที่ 2</u> โดยการใช้การกระทำเบื้องต้นกับหลักแบบ (I) และ/หรือ (II) จะได้ B เป็นสมมูลย์กับเมตริกซ์ C ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$C = \begin{bmatrix} I_k & {}_{k}U_{n-k} \\ {}_{m-k}O_{k} & {}_{m-k}O_{n-k} \end{bmatrix}$$

เมื่อ ${}_{k}U_{n-k}$ หมายถึงสับเมตริกซ์ที่มีขนาด (k x(n - k))

<u>ขั้นที่ 3</u> เมื่อ k เป็นจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ใน B โดยการกระทำเบื้องต้นกับหลักแบบ (III) จะได้ C เป็นสมมูลย์กับเมตริกซ์ D ในรูปแบบ

$$D = \begin{bmatrix} I_k & {}_kO_{n-k} \\ {}_{m-k}O_k & {}_{m-k}O_{n-k} \end{bmatrix}$$

จากทฤษฎีดังกล่าวนี้ สามารถแสดงการกระทำบนเมตริกซ์ A ได้ดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> A สมมูลย์กับ B ซึ่งอยู่ในรูปเอชชีลอนเมตริกซ์แบบแถว

ดังนั้นจะมี $E_1, E_2, \ldots, E_\alpha$ เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

ซึ่ง $B = E_\alpha \ldots E_2E_1A$ ....(i)

<u>ขั้นที่ 2</u> B สมมูลย์แบบหลักกับ C

ดังนั้นจะมี $F_1, F_2, \ldots, F_\beta$

ซึ่ง $C = BF_1F_2 \ldots F_\beta$ ....(ii)

<u>ขั้นที่ 3</u> C เป็นสมมูลย์แบบหลักกับ D

ดังนั้นจะมี $F_{\beta+1}, \ldots, F_r$

ซึ่ง $D = C F_{\beta+1} F_{\beta+2} \ldots F_r$ ....(iii)

จาก (i),(ii) และ (iii) $A \sim D$ จะได้

$$\begin{aligned} D &= C F_{\beta+1} \ldots F_r \\ &= B F_1F_2 \ldots F_r \\ &= E_\alpha \ldots E_2E_1 B F_1F_2 \ldots F_r \end{aligned}$$

<u>หมายเหตุ</u> จากพาร์ทิชันเมตริกซ์ดังกล่าวจำนวนเต็ม k เรียกว่าแรงค์ (rank) ของเมตริกซ์ A

<u>ตัวอย่างที่ 25</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

หาเมตริกซ์ในรูปแบบที่แสดงในทฤษฎี 3.16 ซึ่งเป็นสมมูลย์กับ A

<u>วิธีทำ</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \sim \\ -R_1 + R_2 \\ R_1 + R_3 \\ -R_1 + R_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \sim \\ -\frac{1}{3} R_3 \\ -R_3 + R_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -R_2 \overset{\sim}{+} R_1 \\ -R_2 + R_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{2c_1 + c_4}{\overset{-3c_1 + c_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{-c_2 + c_4}{\overset{c_2 + c_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

<u>ทฤษฎี 3.17</u> เมตริกซ์ A และ B เป็นสมมูลย์กันต่อเมื่อ $B = PAQ$ สำหรับนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ P และ Q บางเมตริกซ์

พิสูจน์ (===>) A เป็นสมมูลย์กับ B ดังนั้น

ดังนั้น B ได้จาก A โดยการกระทำเบื้องต้นของแถว และหลักจำนวนจำกัด

ดังนั้นจะมีเมตริกซ์เบื้องต้น $E_1, E_2, \ldots, E_r, F_1, F_2, \ldots, F_s$

ซึ่ง $B = E_r E_{r-1} \cdots E_1 A F_1 F_2 \cdots F_s$

ให้ $P = E_r E_{r-1} \cdots E_1$ และ $Q = F_1 F_2 \cdots F_s$

ดังนั้น P และ Q เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ โดยทฤษฎี 3.11

และ $B = PAQ$

(<===) ให้ $B = PAQ$ สำหรับ P และ Q ซึ่งเป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้นโดยทฤษฎี 3.11 จะได้ P และ Q ต่างเป็นผลคูณของเมตริกซ์เบื้องต้น

นั่นคือจะมี $E_1, E_2, \ldots E_k$ และ $F_1, F_2, \ldots F_s$

ซึ่ง $P = E_k \cdots E_2 E_1$ และ $Q = F_1 F_2 \cdots F_s$

$\therefore$ $B = E_k \cdots E_2E_1AF_1F_2 \cdots F_s$

ให้ $C = AF_1F_2 \cdots F_s$

ดังนั้น $B = E_k \cdots E_2E_1C$

จะได้ $B \sim C$ โดยทฤษฎี 3.7

นั่นคือ $C \sim B$ โดยทฤษฎี 3.1

เนื่องจาก $AF_1F_2 \cdots F_s = C$

จะได้ $C \sim A$ โดยทฤษฎี 3.7

นั่นคือ $B \sim C$ และ $C \sim A$

จะได้ $B \sim A$ โดยทฤษฎี 3.1

นั่นคือ เมตริกซ์ A และ B สมมูลย์กัน

<u>ทฤษฎี 3.18</u> A เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ต่อเมื่อ A เป็นสมมูลย์กับ I_n

<u>พิสูจน์</u> (===>) ให้ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

โดยทฤษฎี 3.12 ได้ว่า A เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ I_n

ดังนั้น A เป็นสมมูลย์กับ I_n

(<===) ถ้า A เป็นสมมูลย์กับ I_n ดังนั้น I_n ได้จาก A โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถวและหลัก เป็นจำนวนจำกัด

ดังนั้นจะมีเมตริกซ์เบื้องต้น $E_1, E_2, \ldots, E_r, F_1, F_2, \ldots, F_s$

ซึ่ง $I_n = E_rE_{r-1} \cdots E_2E_1AF_1F_2 \cdots F_s$

ให้ $E_rE_{r-1} \cdots E_1 = P$ และ $F_1 \cdots F_s = Q$

ดังนั้น $I_n = PAQ$ เมื่อ P และ Q เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

จะได้ผลว่า $A = P^{-1}Q^{-1}$ และเนื่องจาก P^{-1}, Q^{-1} เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

$\therefore$ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์