บทที่ 4
ดีเทอร์มินันท์
(Determinants)

4.1 เพอร์มิวเทชัน (permutation) และความหมายของดีเทอร์มินันท์

ก่อนที่จะศึกษาความหมายและคุณสมบัติบางอย่างของดีเทอร์มินันท์ จำเป็นจะต้องศึกษาเรื่องเพอร์มิวเทชันในส่วนที่จะนำมาใช้เสียก่อน

นิยาม 4.1 ให้ $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ เป็นเซ็ตของจำนวนเต็มบวกจาก 1 ถึง n การจัดเรียงสมาชิกของ S เสียใหม่ เป็น $j_1 j_2 \ldots j_n$ เรียกว่าเพอร์มิวเทชัน (permutation) ของ S

เราสามารถวางสมาชิกตัวใด ๆ จากสมาชิก n ตัวของ S ในตำแหน่งแรก

สมาชิกยังคงเหลือ (n - 1) ตัว ฉะนั้นเราสามารถเลือกสมาชิกตัวใด ๆ จากสมาชิก (n - 1) ตัว ในตำแหน่งที่สอง

ทำวิธีเดียวกันเรื่อย ๆ ไปจนกระทั่งถึงตำแหน่งที่ n
ดังนั้นจะมีวิธีการจัดเรียงสมาชิก n ตัวของ S ได้

$n(n-1)(n-2)\ldots 2.1 = n!$ วิธี

วิธีในการจัดเรียงสมาชิก n ตัวของ S แบบหนึ่ง ๆ นั้นเรียกว่า เพอร์มิวเทชันของ S

เราแทนเซ็ตของทุกเพอร์มิวเทชันของ S โดย S_n

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> S_1 มีเพียง $1! = 1$ เพอร์มิวเทชันของเซ็ต $\{1\}$ ซึ่งได้แก่ 1

S_2 ประกอบด้วย $2! = 2$ เพอร์มิวเทชันของเซ็ต $\{1, 2\}$ ซึ่งได้แก่ 12 และ 21

S_3 ประกอบด้วย $3! = 3.2.1 = 6$ เพอร์มิวเทชันของเซ็ต $\{1, 2, 3\}$ ซึ่งได้แก่ 123, 132, 213, 231, 312 และ 321

4.1.1 <u>เครื่องหมายของเพอร์มิวเทชัน</u>

ในตอนนี้จะกำหนดเครื่องหมายของเพอร์มิวเทชัน โดย

ให้ $s(j_1 \ j_2 \cdots j_n)$ แทนเครื่องหมายของเพอร์มิวเทชัน $j_1 j_2 \cdots j_n$

และ $\operatorname{sign} \prod_{1 \le p < q \le n} (j_q - j_p)$ แทนเครื่องหมายของผลคูณของทุก $(j_q - j_p)$ สำหรับ $q > p$

<u>นิยาม 4.2</u> สำหรับเพอร์มิวเทชัน $j_1 j_2 \cdots j_n$ ของ $1, 2, \ldots n$ เครื่องหมายของเพอร์มิวเทชันกำหนดโดย

$$s(1) = +1 \qquad \text{สำหรับ } n = 1$$

$$s(j_1 \ j_2 \cdots j_n) = \operatorname{sign} \prod_{1 \le p < q \le n} (j_q - j_p)$$

$= +1$ ถ้าผลคูณของทุก $j_q - j_p$ สำหรับ $q > p$ เป็นบวก

$= -1$ ถ้าผลคูณของทุก $j_q - j_p$ สำหรับ $q > p$ เป็นลบ

ตัวอย่างที่ 2 สำหรับเพอร์มิวเทชัน $j_1\ j_2\ j_3\ j_4$ ของ S_4 กำหนดเครื่องหมายของเพอร์มิวเทชันดังนี้

$$s(j_1\ j_2\ j_3\ j_4) = \text{sign} \prod_{1 \le p < q \le 4} (j_q - j_p)$$

$$= \text{เครื่องหมายของ } (j_2-j_1)(j_3-j_1)(j_3-j_2) \times (j_4-j_1)(j_4-j_2)(j_4-j_3)$$

ดังนั้นสำหรับเพอร์มิวเทชัน 4321 ของ S_4 จะได้

$$s(4321) = \text{เครื่องหมายของ } (3-4)(2-4)(2-3)(1-4)(1-3)(1-2) = +1$$

และสำหรับเพอร์มิวเทชัน 3421 ของ S_4 จะได้

$$s(3421) = \text{เครื่องหมายของ } (4-3)(2-3)(2-4)(1-3)(1-4)(1-2) = -1$$

4.1.2 ความหมายของดีเทอร์มินันท์

นิยาม 4.3 ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ เรากำหนดดีเทอร์มินันท์ของ A (เขียนแทนด้วย $\det A$ หรือ $|A|$) โดย

$$\det A = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} s(j_1\ j_2 \cdots j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

เมื่อการบวกขยายบนทุกเพอร์มิวเทชัน $j_1 j_2 \cdots j_n$ ของเซ็ต $S = \{1, 2, \ldots, n\}$

<u>สังเกตว่า</u> ในการกำหนดดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์เราจะนิยามเฉพาะดีเทอร์-มินันท์ของเมตริกซ์จัตุรัสเท่านั้น

สำหรับ $(n \times n)$ เมตริกซ์ $A = (a_{ij})$ ใด ๆ

จะเขียน det A โดย

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ถ้า $A = (a_{11})$ เป็น (1×1) เมตริกซ์

ดังนั้น $\det A = s(1)a_{11} = a_{11}$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> ถ้า $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = s(12)a_{11}a_{22} + s(21)a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> ถ้า $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\det A = \; & s(123)a_{11}a_{22}a_{33} + s(132)a_{11}a_{23}a_{32} \\
& + s(213)a_{12}a_{21}a_{33} + s(231)a_{12}a_{23}a_{31} \\
& + s(312)a_{13}a_{21}a_{32} + s(321)a_{13}a_{22}a_{31} \\
= \; & a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
& + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
= \; & a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

โดยประยุกต์จากตัวอย่างที่ 3, 4 และ 5 หาดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์ขนาด (1×1), (2×2) และ (3×3) ได้ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 6</u> กำหนดให้ $A = [3]$ เป็น (1×1) เมตริกซ์

จะได้ $\det A = 3$

<u>ตัวอย่างที่ 7</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ เป็น (2×2) เมตริกซ์

จะได้ $\det A = 2(1) - 3(-2)$

$= 2 + 6 = 8$

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = 1\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 2\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 3\end{vmatrix}$

$$= 1(2-3) - 2(4-3) + 3(6-3)$$

$$= -1 - 2 + 9$$

$$= 6$$

4.1.3 คุณสมบัติของเพอร์มิวเทชัน

จากนิยาม 4.2 และ 4.3 แสดงว่าการศึกษาคุณสมบัติของดีเทอร์มินันท์ต้องศึกษาคุณสมบัติบางอย่างของเพอร์มิวเทชัน

ทฤษฎี 4.1 ถ้าจำนวนสองจำนวนในเพอร์มิวเทชัน $j_1 \ldots j_n$ สลับที่กัน เครื่องหมายของเพอร์มิวเทชันจะตรงข้ามกัน

(ตัวอย่างเช่น $s(5\ 1\ 3\ 2\ 4) = -s(5\ 1\ 4\ 2\ 3)$)

พิสูจน์ สมมุติว่าจำนวนสองจำนวนดังกล่าวอยู่ติดกันกล่าวคือ k และ l ในเพอร์มิวเทชัน $j_1 \ldots k, l \ldots j_n$

เมื่อ k และ l สลับที่กัน ผลคูณ $\pi(j_q - j_p)$ สำหรับ $q > p$ ไม่เปลี่ยนแปลง ยกเว้นเพียงเทอมเดียวคือ $l - k$ กลายเป็น $k - l$

เพราะฉะนั้นเครื่องหมายของเพอร์มิวเทชันจึงเปลี่ยนไปเป็นตรงกันข้าม

ถ้า k และ l ไม่ติดกัน สมมุติว่ามีจำนวนอยู่ m จำนวน มาคั่นอยู่ระหว่าง k และ l

$$(j_1 \ldots k, \underbrace{\ldots,}_{m\ \text{จำนวน}}\ l, \ldots j_n)$$

เคลื่อน k ไปทางขวาโดยสลับที่กับจำนวนที่ติดกันไปเรื่อย ๆ m ครั้ง จะได้ว่า k มาอยู่ทางซ้ายติดกับ 1

ตอนนี้เคลื่อน 1 ไปทางซ้ายโดยสลับที่กับจำนวนที่ติดกันไปเรื่อย ๆ $m + 1$ ครั้ง จะได้ว่า k ไปแทนที่ตำแหน่งของ 1 และ 1 ไปแทนที่ตำแหน่งของ k ลง

เนื่องจากเครื่องหมายเปลี่ยนเป็นตรงข้ามเป็นจำนวน $m + m + 1$ ครั้งคือเป็นจำนวนคี่

ดังนั้นเครื่องหมายจึงเปลี่ยนเป็นตรงกันข้าม เมื่อสลับที่ k กับ 1

<u>ทฤษฎี 4.2</u> ให้เพอร์มิวเทชัน $j_1 j_2 \ldots j_n$ ได้จากเพอร์มิวเทชัน $1\ 2\ 3\ 4 \ldots n$ โดยการสลับที่ ตำแหน่งของคู่ของจำนวนต่อกันไป t ครั้งแล้ว

$$s(j_1\ j_2\ \ldots\ j_n) = (-1)^t$$

<u>พิสูจน์</u> โดยนิยาม 4.2 จะได้ว่า

$$s(1\ 2\ 3\ \ldots\ n) = +1$$

เพราะว่าผลคูณของ $\{(2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3)\ldots$

$(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(n-1))\}$

เป็นบวก

และโดยทฤษฎี 4.1 เมื่อจำนวนสองจำนวนในเพอร์มิวเทชัน $j_1\ j_2\ \ldots\ j_n$ สลับที่กันเครื่องหมายของเพอร์มิวเทชันจะตรงข้ามกัน

ดังนั้น

<u>สำหรับครั้งที่ 1</u> เมื่อจำนวนสองจำนวนในเพอร์มิวเทชัน $1\ 2\ \ldots\ n$ สลับที่กัน เพอร์มิวเทชันใหม่ J_1 จะมีเครื่องหมายเป็น -1

<u>ครั้งที่ 2</u> เมื่อจำนวนสองจำนวนในเพอร์มิวเทชัน J_1 สลับที่กันเพอร์มิวเทชันใหม่ J_2 จะมีเครื่องหมายเป็น $+1 = (-1)^2$

<u>ครั้งที่ 3</u> เมื่อจำนวนสองจำนวนในเพอร์มิวเทชัน J_2 สลับที่กันเพอร์มิวเทชั่นใหม่ J_3 จะมีเครื่องหมาย $-1 = (-1)^3$

⋮

ต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงครั้งที่ t

<u>ครั้งที่ t</u> เมื่อจำนวนสองจำนวนในเพอร์มิวเทชัน J_{t-1} สลับที่กันเพอร์มิวเทชันใน $J_t = j_1 j_2 \cdots j_n$ จะมีเครื่องหมายเป็น

$(-1)^t$

นั่นคือเพอร์มิวเทชัน $j_1\, j_2 \cdots j_n$ ได้จากเพอร์มิวเทชัน $1\ 2 \cdots n$ โดยการสลับตำแหน่งของคู่ของจำนวนต่อกันไป t ครั้งแล้ว

$$s(j_1\, j_2 \cdots j_n) = (-1)^t$$

<u>ตัวอย่างที่ 9</u>

$$\begin{aligned} s(4\ 3\ 2\ 1) &= -s\,(1\ 3\ 2\ 4) \\ &= +s(1\ 2\ 3\ 4) \\ &= +1 \end{aligned}$$

ถ้า t ตามทฤษฎี 4.2 เป็นเลขคู่เพอร์มิวเทชัน $j_1\, j_2 \cdots j_n$ เรียกว่าเพอร์มิวเทชันคู่ (even permutation)

ถ้า t เป็นเลขคี่ เพอร์มิวเทชัน $j_1\, j_2 \cdots j_n$ เรียกว่าเพอร์มิวเทชันคี่ (odd permutation)

เนื่องจากเพอร์มิวเทชันหนึ่ง ๆ เป็นได้อย่างเดียวนั่นคือเพอร์มิวเทชันอันหนึ่งไม่สามารถเป็นทั้งคู่และคี่ได้

ถ้า $j_1\, j_2 \cdots j_n$ เป็นเพอร์มิวเทชันคู่ จะเปลี่ยนเป็นเพอร์มิวเทชันคี่ได้โดยสลับที่ระหว่าง j_1 และ j_2 ดังนั้นเพอร์มิวเทชันคู่ $j_1\, j_2 \cdots j_n$ จึงสามารถจับคู่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งกับเพอร์มิวเทชั่นคี่ ดังกล่าวแล้วนั่นคือสำหรับ $n > 1$ จำนวนเพอร์มิวเทชันคู่จะเท่ากับจำนวนเพอร์มิวเทชันคี่ $= \frac{n!}{2}$

4.2 คุณสมบัติของดีเทอร์มินันท์

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 10</u> กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ฉะนั้น $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det A = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$

และ $\det A^T = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า $\det A = \det A^T$ และสำหรับเมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ จะพิสูจน์ได้ว่า $\det A = \det A^T$

<u>ทฤษฎี 4.3</u> ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสแล้ว $\det A = \det A^T$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $B = [b_{ij}] = A^T = [a_{ji}]$

โดยนิยาม 4.3

$$\det B = \sum_{(j)} s(j)\, b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n}$$

เมื่อซัมเมชั่นขยายบนทุก $n!$ เพอร์มิวเทชัน $j = j_1 j_2 \cdots j_n$

เนื่องจาก $b_{ij} = a_{ji}$

$$\det B = \sum_{(j)} s(j)\, a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \quad \cdots\cdots(1)$$

โดยการเรียงเทอมเสียใหม่เราอาจเขียน

$$a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

การจัดใหม่ของ (2) เป็นการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่ง ระหว่างเพอร์มิวเทชัน j และเพอร์มิวเทชัน i เพราะฉะนั้นขณะที่ j เปลี่ยนไปได้ทั้งหมด n! เพอร์มิวเทชัน ในซัมเมชัน (1) i ก็จะเปลี่ยนไปได้ทุกเพอร์มิวเทชัน

ถ้าการจัดของด้านซ้ายมือของ (2) สามารถเปลี่ยนไปจนอยู่ในรูป (1, 2, ..., n) เป็นจำนวน t ครั้ง ของคู่ของ a ต่าง ๆ แล้วด้านขวามือสามารถจัดเรียงเป็นจำนวน t ครั้งด้วย

เนื่องจาก

$j_1 j_2 \ldots j_n \longrightarrow 1, 2, \ldots, n$ โดยการเปลี่ยน t ครั้ง

จะได้ว่า

$1, 2, \ldots, n \longleftarrow i_1, i_2, \ldots, i_n$ โดยการเปลี่ยน t ครั้ง

เพราะฉะนั้น

$$s(j) = (-1)^t = s(i)$$

และ

$$\det B = \sum_{(i)} s(i)\, a_{1i_1} \cdots a_{ni_n} = \det A$$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 11</u> $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 1 \times 2 = 10$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 4 \times 3 = -10$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 4 = -10$$

เนื่องจาก det B ได้จาก det A โดยสลับที่ระหว่างแถวที่หนึ่งกับแถวที่สองของ A

และ det C ได้จาก det A โดยสลับที่ระหว่างหลักที่หนึ่งกับหลักที่สองของ A

จะเห็นว่า $\det B = -\det A$

และ $\det C = -\det A$

ถ้าให้ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

โดยประยุกต์จากตัวอย่างที่ 5 จะได้

$$\det D = 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 + (2)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(2) + 2(0-(-2))$$

$$= 2 + 4 = 6$$

$$\det E = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0 + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1(4) + 1(-2)$$

$$= -4 - 2 = -6$$

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0$$

$$= -2 - 2(2)$$

$$= -6$$

เนื่องจาก det E ได้จาก det D โดยสลับที่ระหว่างแถวที่ 1 กับแถวที่ 3 ของ D

และ det F ได้จาก det D โดยสลับหลักที่ 2 กับหลักที่ 3 ของ D

จะเห็นว่า $\det E = -\det D$

และ $\det F = -\det D$

สำหรับเมตริกซ์จัตุรัสใด ๆ ก็เช่นเดียวกัน ถ้าเราสลับแถวสองแถว (หรือหลัก) ของเมตริกซ์แล้วดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์อันใหม่จะมีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์อันเดิม

<u>ทฤษฎี 4.4</u> ถ้าแถวสองแถว (หรือหลักสองหลัก) ของเมตริกซ์จัตุรัส A สลับที่กันได้เป็นเมตริกซ์ B แล้ว

$$\det B = -\det A$$

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่าแถว r และ t ของเมตริกซ์ A สลับที่กันได้เมตริกซ์ B

ดังนั้น $b_{rj} = a_{tj}$ และ $b_{tj} = a_{rj}$

และ $b_{ij} = a_{ij}$ ถ้า $i \neq r$ และ $i \neq t$

โดยนิยาม 4.3

$$\det B = \sum_{(j)} s(j)\, b_{1j_1} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{tj_t} \cdots b_{nj_n}$$

ให้ k เป็นเพอร์มิวเทชันที่ได้จาก j โดยการสลับที่ระหว่าง j_r กับ j_t ซึ่งการสลับที่นี้เป็นการจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างเพอร์มิวเทชัน j และ k เครื่องหมาย $s(k) = -s(j)$ ในการสลับที่ระหว่าง b_{rj_r} กับ b_{tj_t}

ให้ $b_{1j_1} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{tj_t} \cdots b_{nj_n} = a_{1k_1}\, a_{2k_2} \cdots a_{rk_r} \cdots a_{tk_t} \cdots a_{nk_n}$

เพราะฉะนั้น

$$\det B = \sum_{(k)} -s(k) a_{1k_1}\, a_{2k_2} \cdots a_{rk_r} \cdots a_{tk_t} \cdots a_{nk_n}$$

$$= -\det A$$

ให้ B ได้จาก A โดยสลับที่ระหว่างหลักสองหลักของ A ดังนั้น B^T ได้จาก A^T โดยการสลับที่ระหว่างแถวสองแถวของ A^T

ดังนั้น $\det B^T = -\det A^T$

แต่ $\det B^T = \det B$

และ $\det A^T = \det A$

ดังนั้น $\det B = -\det A$

<u>ทฤษฎี 4.5</u> ถ้าแถวสองแถว (หลักสองหลัก) ของเมตริกซ์ A เท่ากันแล้ว

$\det A = 0$

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่าแถว r และ s ของ A เท่ากัน

เมื่อสลับแถว r และ s ของ A ได้เมตริกซ์ B

โดยทฤษฎี 4.4

จะได้ $\det B = -\det A$

แต่เนื่องจากแถว r และแถว s เท่ากัน

เพราะฉะนั้น $B = A$

จะได้ $\det B = \det A$

นั่นคือ $-\det A = \det A$

ดังนั้น $\det A = 0$

<u>ตัวอย่างที่ 12</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $\det A = 0$

เพราะว่า หลักที่ 1 เท่ากับหลักที่ 3

<u>ทฤษฎี 4.6</u> ถ้าเมตริกซ์ A มีแถว (หลัก) หนึ่งแถว (หลัก) ประกอบด้วยศูนย์ทั้งหมด แล้ว $\det A = 0$

<u>พิสูจน์</u> ให้แถว i ของ A ประกอบด้วยศูนย์ทั้งหมด

เนื่องจากแต่ละเทอมของ $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$ ของ $\det A$ ตามนิยาม 4.3 เป็นผลคูณของสมาชิกจากทุกแถว แต่เนื่องจาก $a_{ij_i} = 0$ เมื่อ $j_i = 1, 2, \ldots, n$ ดังนั้นแต่ละเทอมใน $\det A$ เป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น $\det A = 0$

<u>ตัวอย่างที่ 13</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -5 \\ 3 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ดังนั้น $\det A = 0$

เพราะว่า แถวที่ 4 เป็นศูนย์ทั้งหมด

<u>ทฤษฎี 4.7</u> ถ้าเมตริกซ์ B ได้มาจากเมตริกซ์ A โดยคูณแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) ของ A ด้วยจำนวนจริง c แล้ว

$$\det B = c \det A$$

<u>พิสูจน์</u> สมมุติคูณแถวที่ r ของ $A = [a_{ij}]$ ด้วย c แล้ว ได้เมตริกซ์ $B = [b_{ij}]$

ดังนั้น $b_{ij} = a_{ij}$ สำหรับ $i \neq r$

และ $b_{rj} = c\, a_{rj}$

ฉะนั้นจะได้ det B โดยนิยาม 4.3 ดังนี้

$$\det B = \sum_{(j)} s(j)\, b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{nj_n}$$

$$= \sum_{(j)} s(j)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (c a_{rj_r}) \cdots b_{nj_n}$$

$$= c \sum_{(j)} s(j) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{nj_n}$$

$$= c \det A$$

<u>ตัวอย่างที่ 14</u> กำหนดให้ B = $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

ดังนั้น det B = $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix}$

$$= 6 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (6)(2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 12(-1)$$

$$= -12$$

สามารถใช้ทฤษฎี 4.7 มาช่วยในการคำนวณหาค่าดีเทอร์มินันท์ได้ง่ายขึ้นโดยแยกเอาตัวร่วมออกจากแถวหรือหลัก

<u>ตัวอย่างที่ 15</u> กำหนดให้ B = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

ดังนั้น det B = $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3)(0) = 0$$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$(2R_2 + R_3)$ ได้เมตริกซ์ B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det A = 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-3-6) - 0 + 1(4+1)$$

$$= -9 + 5 = -4$$

$$\det B = 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-9) - 0 + 1(5)$$

$$= -9 + 5 = -4$$

จะได้ว่า $\det A = \det B$

สำหรับทฤษฎีต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าตัวอย่างข้างบนนี้เป็นจริง สำหรับเมตริกซ์จัตุรัส B ใด ๆ ที่ได้จาก A โดยการกระทำเบื้องต้นกับแถวหรือหลักแบบที่ (III)

ทฤษฎี 4.8 ถ้า $B = [b_{ij}]$ ได้จาก $A = [a_{ij}]$ โดยบวกแต่ละสมาชิกของแถว(หลัก) ที่ r กับ c เท่าของสมาชิกในหลักเดียวกันของแถว(หลัก) ที่ t โดยที่ $r \neq t$ แล้ว

$$\det B = \det A$$

พิสูจน์ โดยอาศัยทฤษฎี 4.3 เราเพียงแต่พิสูจน์การกระทำเบื้องต้นกับแถวเท่านั้น

เพราะว่า $b_{ij} = a_{ij}$ สำหรับ $i \neq r$

และ $b_{rj} = a_{rj} + c\,a_{tj}$ $r \neq t$ สมมุติว่า $r < t$

ฉะนั้นเมตริกซ์ B จะมีค่าดีเทอร์มินันท์ ดังนี้

$$\begin{aligned}
\det B &= \sum_{(j)} s(j)\, b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{nj_n} \\
&= \sum_{(j)} s(j) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (a_{rj_r} + c\, a_{tj_r}) \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{(j)} s(j)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n} \\
&\quad + c \sum_{(j)} s(j)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{tj_r} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}
\end{aligned}$$

สำหรับผลบวกอันแรกเท่ากับ det A ส่วนผลบวกอันหลังเป็นศูนย์ เนื่องจากมีสมาชิกในแถวที่ r เท่ากับสมาชิกในแถวที่ t โดยสังเกตว่า

$$\sum_{(j)} s(j)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{tj_r} \cdots a_{tj_t} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \cdots\cdots\text{แถวที่ } r \\ \\ \cdots\cdots\text{แถวที่ } t \\ \\ \\ \end{array} = 0$$

ดังนั้น $\det B = \det A + 0 = \det A$

สำหรับทฤษฎี 4.8 นี้ ใช้คำนวณหาดีเทอร์มินันท์ โดยทำให้เมตริกซ์อยู่ในรูปเมตริกซ์สามเหลี่ยม

<u>ตัวอย่างที่ 16</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} \\ -R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ -R_2 + R_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ซึ่งดีเทอร์มินันท์อันสุดท้ายมีค่าเท่ากับหนึ่งซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 4.9</u> ถ้า $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i > j$ นั่นคือ $A = (a_{ij})$ เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน แล้ว

$$\det A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i > j$

ดังนั้นเทอม $s(j)a_{1j_1}\, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ ในผลบวกของ $\det A$ ที่ไม่เป็นศูนย์ จะมีแต่เทอมที่

$$1 \le j_1 ,\ 2 \le j_2 ,\ \ldots, n \le j_n$$

แต่ $j_1 \, j_2 \cdots j_n$ เป็นเพอร์มิวเทชัน

ดังนั้น เพอร์มิวเทชันซึ่งสอดคล้องกับทุกอสมการมีเพียงแต่

$j_1 = 1, \quad j_2 = 2, \quad \ldots, \quad j_n = n$

เพราะฉะนั้นเทอมของ $\det A$ ที่ไม่เป็นศูนย์ ได้แก่ผลคูณของ

$a_{11} \, a_{22} \cdots a_{nn}$

นั่นคือ $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$

<u>ทฤษฎี 4.10</u> ถ้า $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i < j$ นั่นคือ $A = (a_{ij})$ เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง แล้ว

$$\det A = a_{11} \, a_{22} \cdots a_{nn}$$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า A เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

ดังนั้น A^T เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน

จะได้ $\det A^T = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ (โดยทฤษฎี 4.9)

แต่ $\det A = \det A^T$

เพราะฉะนั้น $\det A = a_{11} \, a_{22} \cdots a_{nn}$

ประโยชน์ที่ได้จากทฤษฎี 4.4, 4.7 และ 4.8 คือช่วยในการคำนวณหาค่า $\det A$ โดยเปลี่ยนรูป A ให้เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยม โดยใช้การกระทำเบื้องต้นกับแถวหรือหลัก

<u>ตัวอย่างที่ 17</u> กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

ดังนั้นจะได้

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{2}R_3}{=} \quad 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{R_1 \text{ <--> } R_3}{=} \quad -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{-3R_1 + R_2 \\ -4R_1 + R_3}}{=} \quad -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{4}R_2}{=} \quad (-2)4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\frac{1}{5}R_3}{=} \quad (-2)(4)(5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{-\frac{1}{2}R_2 + R_3}{=} \quad (-2)(4)(5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(4)(5)(1)(-2)(-\tfrac{3}{2})$$

$$= -120$$

ตอนนี้สามารถคำนวณหาดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์เอกลักษณ์ I_n ได้ กล่าวคือ $\det I_n = 1$

และสามารถคำนวณหาดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์เบื้องต้นได้เช่นกัน

ให้ E_1 เป็นเมตริกซ์เบื้องต้นในแบบที่ (I)

นั่นคือ E_1 ได้จาก I_n โดยสลับที่ระหว่างแถว i กับแถว j ของ I_n โดยทฤษฎี 4.4 จะได้

$$\det E_1 = -\det I_n = -1$$

ให้ E_2 เป็นเมตริกซ์เบื้องต้นในแบบที่ (II) โดยคูณแถวที่ i ของ I_n ด้วย $c \neq 0$

โดยทฤษฎี 4.7 จะได้

$$\det E_2 = c \det I_n$$
$$= c$$

ให้ E_3 เป็นเมตริกซ์เบื้องต้นในแบบที่ (III) โดยที่ E_3 ได้จาก I_n โดยบวกแถวที่ i ของ I_n ด้วย c เท่าแถวที่ j $(i \neq j)$ ของ I_n $(c R_j + R_i)$

โดยทฤษฎี 4.8 จะได

$$\det E_3 = \det I_n = 1$$

<u>ทฤษฎี 4.11</u> ถ้า E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้นแล้ว

$$\det (EA) = (\det E)(\det A)$$

และ $$\det (AE) = (\det A)(\det E)$$

<u>พิสูจน์</u> ถ้า E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้นในแบบที่ (I)

ฉะนั้น EA จะเป็นเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการสลับแถวสองแถวของ A

ดังนั้น det (EA) = − det A

แต่ det E = −1

ดังนั้น det (EA) = (det E)(det A)

ถ้า E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้นในแบบที่ (II)

ฉะนั้น E จะเป็นเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการคูณแถวใดแถวหนึ่งของ A ด้วย $C \neq 0$

ดังนั้น det (EA) = c det A

แต่ det E = C

ดังนั้น det (EA) = (det E)(det A)

ถ้า E เป็นเมตริกซ์เบื้องต้นในแบบที่ (III)

แล้ว EA จะเป็นเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยบวกแถวใดแถวหนึ่งของ A ด้วย k เท่าของแถวที่แตกต่างไปของ A

ดังนั้น det (EA) = det A

แต่ det E = 1

ดังนั้น det (EA) = (det E)(det A)

ดังนั้นสำหรับทุกกรณี

det (EA) = (det E)(det A)

โดยพิสูจน์ทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

det (AE) = (det A)(det E)

ผลตามมาจากทฤษฎี 4.11 ก็คือ

ถ้า $B = E_r E_{r-1} \cdots E_2E_1A$ แล้ว

$$\det B = \det (E_r)(E_{r-1} \cdots E_2E_1A)$$

$$= (\det E_r)(\det(E_{r-1} \cdots E_2E_1A)$$

$$= (\det E_r)(\det E_{r-1})\cdots(\det E_2)(\det E_1)(\det A)$$

<u>ทฤษฎี 4.12</u> ถ้า A เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ แล้ว A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $(n \times n)$ เมตริกซ์ A เป็นสมมูลย์กับเมตริกซ์ทะแยง

$$D = \begin{bmatrix} I_K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เมื่อ $K =$ แรงค์ A

ดังนั้นจะมีเมตริกซ์เบื้องต้น $E_1, \cdots E_r$ และ $F_1, \cdots, F_t$

ซึ่ง

$$D = E_rE_{r-1} \cdots E_1A\, F_1F_2 \cdots F_t$$

หรือ $$A = E_1^{-1}\, E_2^{-1} \cdots E_r^{-1}D\, F_t^{-1}F_{t-1}^{-1} \cdots F^{-1}$$

เมื่อ E_i^{-1} และ F_j^{-1} เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

ดังนั้น

$$\det A = (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1})\cdots(\det D)(\det F_t^{-1})\cdots(\det F_1^{-1})$$

เพราะว่า E_i^{-1} และ F_j^{-1} เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

ดังนั้น $(\det E_i^{-1}) \neq 0$ และ $(\det F_j^{-1}) \neq 0$

สำหรับ $i = 1,2,\cdots, r$

$j = 1,2,\cdots, t$

เพราะว่า det D เป็นผลคูณของสมาชิกบนเส้นทะแยงมุมหลัก (main diagonal) และ D มีสมาชิก $d_{11} = d_{22} = \dots = d_{kk} = 1$ อยู่ k ตัวบนเส้นทะแยงมุมหลัก

ดังนั้น det D $\neq$ 0 ต่อเมื่อ k = n

เนื่องจาก det A $\neq$ 0 ต่อเมื่อ det D $\neq$ 0

นั่นคือ det A $\neq$ 0 ต่อเมื่อ k = n

ซึ่ง k = n ต่อเมื่อ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้น A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ต่อเมื่อ det A $\neq$ 0

__ทฤษฎี 4.13__ ถ้า A และ B เป็น (n x n) เมตริกซ์ แล้ว

det (AB) = (det A)(det B)

__พิสูจน์__ เพราะว่า ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว A จะสมมูลย์แบบแถวกับ I_n

ดังนั้น $I_n = E_k E_{k-1} \dots E_1 A$

เมื่อ E_i เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

หรือ $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} I$

$= E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1}$

โดยที่ E_i^{-1} เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

จะได้ det A = det $(E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1})$

$= (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1}) \dots (\det E_k^{-1})$

เพราะฉะนั้น

$$\det AB = \det (E_1^{-1} \ldots E_k^{-1}B)$$
$$= (\det E_1^{-1})(\det E_2^{-1})\ldots(\det E_k^{-1})(\det B)$$
$$= \det (E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}) \det B$$
$$= (\det A)(\det B)$$

ถ้า A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้นจากทฤษฎี 4.12 สรุปว่า $\det A = 0$

ดังนั้นถ้า A เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว A จะเป็นสมมูลย์แบบแถวกับเมตริกซ์ C ซึ่งมีอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์

ดังนั้น $C = E_kE_{k-1} \ldots E_1A$ เมื่อ E_i เป็นเมตริกซ์เบื้องต้น

เพราะฉะนั้น

$$CB = E_kE_{k-1} \ldots E_1AB$$

ซึ่งหมายถึงว่า AB เป็นสมมูลย์แบบแถวกับ CB ซึ่ง CB มีอย่างน้อยหนึ่งแถวเป็นศูนย์

นั่นคือ AB เป็นซิงกูลาร์เมตริกซ์

ดังนั้น $\det (AB) = 0$

ในกรณีนี้ก็จะได้

$$\det(AB) = (\det A)(\det B)$$

<u>ตัวอย่างที่ 18</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ และ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

เพราะฉะนั้น $(\det A)(\det B) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$= (5)(-2)$$
$$= -10$$

เพราะว่า $AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

เพราะฉะนั้น $\det(AB) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -10$

นั่นคือ $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

เนื่องจาก $AA^{-1} = I_n$

โดยทฤษฎี 4.13 จะได้ว่า

$$\det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}) = \det I_n = 1$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

และโดยทฤษฎี 4.13 เช่นกันจะได้ว่า ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์คล้าย (similar matrices) นั่นคือ

$B = P^{-1}AP$ สำหรับนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ P บางเมตริกซ์แล้ว $\det A = \det B$

เพราะว่า $B = P^{-1}AP$ สำหรับนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ P บางเมตริกซ์

เพราะฉะนั้น $PB = (PP^{-1})AP$

$= AP$

จะได้ $\det(PB) = \det(AP)$

และ $(\det P)(\det B) = (\det A)(\det P)$

นั่นคือ $\det B = \det A$

<u>หมายเหตุ</u> ให้ A และ B เป็น (n x n) เมตริกซ์ เรากล่าวว่า B คล้ายกับ A ถ้ามีนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ P ซึ่ง $B = P^{-1}AP$

สำหรับดีเทอร์มินันท์ของผลบวกของ (n x n) เมตริกซ์ A และ B โดยทั่วไป

$$\det(A \pm B) \neq \det A + \det B$$

แต่ถ้า A, B และ C เป็น (n x n) เมตริกซ์ ซึ่งสมาชิกทุกตัวเท่ากันหมดยกเว้นแถว(หลัก)ที่ k โดยที่แถวที่ k ของ C เป็นผลบวกของแถวที่ k ของ A และ B แล้ว

$$\det C = \det A + \det B$$

เราจะไม่พิสูจน์ผลอันนี้แต่จะแสดงโดยตัวอย่างต่อไปนี้

ให้ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

และ $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

จะเห็นว่าแถวที่ 3 ของ C คือผลบวกของแถวที่ 3 ของ A และ B

เพราะว่า $\det A = -4$ $\det B = -8$

และ $\det C = -12$

ดังนั้น $\det C = \det A + \det B$

4.3 การกระจายแถวและหลัก (Row and Column Expansions)

ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส เราอาจกำหนด det A เป็นฟังชันของสมาชิก $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ ในแถวแรกได้ เนื่องจากแต่ละเทอมของ $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ จะต้องมีสมาชิกตัวหนึ่งคือ a_{1j_1} มาจากแถวที่หนึ่ง

เพราะฉะนั้น เราอาจจะเขียน det A เป็นเสมือน ลิเนียคอมบิเนชั่น (Linear Combination) ดังนี้

$$\det A = C_{11}a_{11} + C_{12}a_{12} + \cdots + C_{1n}a_{1n} \quad \ldots\ldots(4.1)$$

จากนิยามของ det A เราสังเกตว่า

$$C_{1k} = \Sigma\, s(j)\, a_{2j_2}\, a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} \quad \ldots\ldots(4.2)$$

เมื่อการบวก ขยายบนทุก $(n-1)!$ เพอร์มิวเทชัน $j = j_1 j_2 \ldots j_n$ ซึ่ง $j_1 = k$

สังเกตว่า

$$s(j) = s(kj_2j_3\ldots j_n) = (-1)^{k-1}s(j_2j_3\ldots j_n) \quad \ldots\ldots(4.3)$$

เมื่อ

$$s(j_2j_3\ldots j_n) = \text{sign} \prod_{p > q \geq 2} (j_p - j_q)$$

เนื่องจากจำนวน 1, 2, ..., k - 1 ปรากฏอยู่ทางด้านขวาของ k ในเพอร์มิวเทชัน $k\, j_2 \ldots j_n$

(โดยการจัด $j_2 \ldots j_n$ ให้เรียงกันเป็น 1 2 3 ... โดยเว้นตำแหน่ง k ไว้)

เพราะฉะนั้น

$$C_{1k} = (-1)^{k-1}\, \Sigma s(j_2\ldots j_n) a_{2j_2}\, a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} \quad \ldots\ldots(4.4)$$

เมื่อการบวกขยายบนทุก $(n-1)!$ เพอร์มิวเทชัน $j_2 \dots j_n$ ของ $(n-1)$ จำนวน $1, \dots, k-1, k-2, \dots, n$ ดังนั้น

$$C_{1k} = (-1)^{k-1} \det A_{1k} \qquad \dots\dots\dots\dots(4.5)$$

เมื่อ A_{1k} เป็น $((n-1) \times (n-1))$ สับเมตริกซ์ของ A โดยหักแถวที่ 1 และหลักที่ k ออก

ฉะนั้น จากข้อ (4.1) และ (4.5) ได้การกระจายของ det A โดยแถวแรก

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = (-1)^0 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^1 5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^2 6 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \quad \dots(4.6)$$

จากตัวอย่างดังกล่าวนี้ สมมุติว่าถ้าต้องการกระจายดีเทอร์มินันต์โดยแถวที่ 3 นำแถวที่ 3 มาไว้เป็นแถวที่ 1 อาจทำได้โดยสลับที่แถวที่ 3 กับแถวที่ 2 แล้วจึงสลับที่แถวที่ 2 กับแถวที่ 1 จะได้

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -3 & 8 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -3 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 8 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^0(-3)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^1 8 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^2 7 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

<u>นิยาม 4.4</u> ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ ให้ A_{ij} เป็น $((n-1) \times (n-1))$ สับเมตริกซ์ของ A โดยหักแถวที่ i และหลักที่ j ออก

เรียก $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ $(i,j = 1,\ldots,n)$

ว่าโคแฟคเตอร์ ของ a_{ij}

<u>ทฤษฎี 4.14</u> ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ เมื่อ $n \geq 2$ แล้ว

$$\det A = C_{i1}a_{i1} + C_{i2}a_{i2} + \cdots + C_{in}a_{in} \quad \ldots\ldots\ldots(4.7)$$

(กระจายโดยยึดแถว i) $(i = 1,\ldots,n)$

และ

$$\det A = C_{1j}a_{1j} + C_{2j}a_{2j} + \cdots + C_{nj}a_{nj} \quad \ldots\ldots\ldots(4.8)$$

(กระจายโดยยึดหลัก j) $(j = 1,\ldots,n)$

เมื่อ $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

<u>พิสูจน์</u> เราได้พิสูจน์ (4.7) สำหรับ $i = 1$ เรียบร้อยแล้วในข้อ (4.1) ถึง (4.5)

สำหรับ $i > 1$ เราจะนำแถว i ไปไว้แถวแรกโดยการเปลี่ยนคู่ของแถว i และ $i - 1$ ต่อจากนั้นก็เปลี่ยน $(i - 1)$ อันใหม่กับ $(i - 2)$ ... กระทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ $(i - 1)$ ครั้ง ก็จะได้แถวที่ i ขึ้นมาอยู่แถวที่หนึ่งและแถวที่ $1,2,\ldots(i-1)$ เดิมก็จะกลายเป็นแถวที่ $2,3,\ldots,i$ เรียกเมตริกซ์ที่ได้ว่าเมตริกซ์ B

เพราะว่ามีการเปลี่ยน $(i - 1)$ ครั้ง

เพราะฉะนั้นจากทฤษฎี 4.4

$$\det A = (-1)^{i-1}\det B$$

การกระจาย $\det B$ โดยแถวแรกจะได้

$$\det B = b_{11}\det B_{11} - b_{12}\det B_{12}+\cdots+(-1)^{n-1}b_{1n}\det B_{1n}$$

เนื่องจาก $b_{1j} = a_{ij}$ และ $B_{1j} = A_{ij}$

จะได้ว่า

$$\det B = a_{i1}\det A_{i1} - a_{i2}\det A_{i2}+\cdots+(-1)^{n-1}a_{in}\det A_{in}$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$\begin{aligned}\det A &= (-1)^{i-1}\det B\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}\det A_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j-2}\det A_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det A_{ij}\\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้ (4.7) ตามต้องการ

ในการพิสูจน์ (4.8) นั้นเราให้ $R = A^T$ กระจาย R โดยแถวที่ j

$$\det R = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} r_{jk} \det R_{jk}$$

แต่ $r_{jk} = a_{kj}$ และ $R_{jk} = (A_{kj})^T$

ดังนั้น $\det R_{jk} = \det (A_{kj})^T = \det A_{kj}$

และเนื่องจาก $\det A = \det A^T$

เพราะฉะนั้น
$$\det A = \det R = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det A_{kj}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_{kj} C_{kj}$$

<u>ตัวอย่างที่ 19</u> จงหา $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ โดยการใช้แถวที่ 3 เป็นหลัก

ในการกระจาย

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}0 \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{3+3}(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2 + 6) + (-2)(2 + 8)$$

$$= 16 - 20$$

$$= -4$$

<u>ตัวอย่างที่ 20</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & -12 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{3C_1 + C_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -4 & 2 & 1 & -9 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}(4) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} \overset{-R_2+R_1}{=} (4) \begin{vmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{2+1}(4)(2) \begin{vmatrix} -4 & 16 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = (-8)(-36 + 32)$$

$$= 32$$

<u>ทฤษฎี 4.15</u> ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ แล้ว

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = 0 \text{ สำหรับ } i \neq j$$

$$a_{1j}C_{1i} + a_{2j}C_{2i} + \dots + a_{nj}C_{ni} = 0 \text{ สำหรับ } j \neq i$$

เราพิสูจน์เพียงสูตรแรกเท่านั้น ส่วนสูตรที่สองได้ผลมาจากสูตรแรกโดยทฤษฎี 4.3

พิจารณาเมตริกซ์ B ซึ่งได้จากเมตริกซ์ A โดยแทนแถวที่ j ของ A ด้วยแถวที่ i ของ A ดังนั้น B เป็นเมตริกซ์ซึ่งมีแถวสองแถวเหมือนกันคือแถวที่ i และแถวที่ j ดังนั้น det B = 0

กระจาย det B ตามแถวที่ j สมาชิกของแถวที่ j ของ B คือ $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ และโคแฟคเตอร์ของแถวที่ j คือ $C_{j1}, C_{j2}, \dots, C_{jn}$

ดังนั้น $0 = \det B = a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn}$

<u>ตัวอย่างที่ 21</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9 ,$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 6 ,$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

เพราะฉะนั้น $a_{31}C_{21} + a_{32}C_{22} + a_{33}C_{23} = -2 \times 9 + 3 \times 6 + 0 \times (-7)$

$$= -18 + 18$$

$$= 0$$

<u>นิยาม 4.5</u> ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ และ C_{ij} เป็นโคแฟคเตอร์ของ a_{ij} ดังนั้น adj A เรียกแอดจอยน์ (adjoint) ของ A คือทรานสโพสของเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการแทนที่แต่ละสมาชิก a_{ij} ด้วยโคแฟคเตอร์ C_{ij}

นั่นคือ

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & & & \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>ตัวอย่างที่ 22</u> ให้ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

โคแฟคเตอร์คือ

$$C_{11} = (-1)^{(1+1)} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(3) = -3$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-2) = 2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-6) = 6$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-2) = 2$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(1) = -1$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

เพราะฉะนั้น $\text{adj } A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \\ -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

<u>ทฤษฎี 4.16</u> ถ้า $A = (a_{ij})$ เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ แล้ว

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)\, I_n$$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก

$$A(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} \cdots & C_{j1} \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{j2} & C_{n2} \\ & & \\ & & \\ C_{1n} & C_{jn} & C_{nn} \end{pmatrix}$$

สมาชิกในตำแหน่ง (i,j) ของผลคูณของเมตริกซ์ $A(\text{adj } A)$ คือ

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

โดยทฤษฎี 4.14 และ 4.15 จะได้ว่า

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn} = \det A \quad \text{ถ้า} \quad i = j$$
$$= 0 \quad \text{ถ้า} \quad i \neq j$$

นั่นก็คือ $A(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix}$

$$= (\det A)\, I_n$$

สมาชิกในตำแหน่ง (i, j) ของผลคูณของเมตริกซ์ $(\text{adj } A)A$ คือ

$$C_{1i}a_{1j} + C_{2i}a_{2j} + \cdots + C_{ni}a_{nj} = \det A \quad \text{ถ้า} \quad i = j$$
$$= 0 \quad \text{ถ้า} \quad i \neq j$$

ดังนั้นจะได้

$$(\text{adj } A)A = (\det A)\, I_n$$

นั่นคือ

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)\, I_n$$

<u>ตัวอย่างที่ 23</u> จากตัวอย่างที่ 22 ซึ่ง $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \\ -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

จะได้ $$A(\text{adj } A) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \\ -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = 20I_3$$

และ $$(\text{adj } A)A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \\ -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} = 20\, I_3$$

และโดยทฤษฎี 4.16 ทำให้ทราบว่า $\det A = 20$

<u>ทฤษฎี 4.17</u> ถ้า A เป็น $(n \times n)$ เมตริกซ์ และ $\det A \neq 0$ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{adj } A)$$

<u>พิสูจน์</u> โดยทฤษฎี 4.16

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = (\det A)I_n$$

ถ้า $\det A \neq 0$

ดังนั้น

$$A\left(\frac{\text{adj } A}{\det A}\right) = \left(\frac{\text{ajd } A}{\det A}\right)A = I_n$$

นั่นคือ

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$$

<u>ตัวอย่างที่ 24</u> สำหรับ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

จากตัวอย่างที่ 22 จะได้

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

และโดยทฤษฎี 4.16

$$A\,(\text{adj } A) = (\det A)\,I_n$$

และจากตัวอย่างที่ 23

$$A\,(\text{adj } A) = 20\,I_3$$

นั่นคือ $\det A = 20$

และโดยทฤษฎี 4.17

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A}$$

เพราะฉะนั้น $$A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -3 & 9 & -1 \\ -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{3}{20} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

<u>ทฤษฎี 4.18</u> <u>กฎเครมเมอร์</u> (Cramer's rule)

ให้
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นของ n สมการ ที่มีตัวไม่ทราบค่า n ตัว

ให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมตริกซ์สัมประสิทธิ์

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ดังนั้นระบบสมการที่กำหนดให้จะเขียนได้เป็น

$$AX = B$$

ถ้า $\det A \neq 0$ แล้วระบบสมการนี้จะมีคำตอบเพียงชุดเดียวคือ

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

เมื่อ A_i เป็นเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยแทนหลักที่ i ของ A ด้วยเมตริกซ์ B

<u>พิสูจน์</u> ถ้า $\det A \neq 0$ ดังนั้น A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ (โดยทฤษฎี 4.12)

ดังนั้นจะได้

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}B$$

$$= \frac{1}{\det A}(\operatorname{adj} A)B$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{C_{11}}{\det A} & \frac{C_{21}}{\det A} & \cdots & \frac{C_{n1}}{\det A} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{C_{1i}}{\det A} & \frac{C_{2i}}{\det A} & \cdots & \frac{C_{ni}}{\det A} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{C_{1n}}{\det A} & \frac{C_{2n}}{\det A} & \cdots & \frac{C_{nn}}{\det A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}$$

นั่นคือ

$$x_i = \frac{C_{1i}b_1}{\det A} + \frac{C_{2i}b_2}{\det A} + \cdots + \frac{C_{ni}b_n}{\det A}$$

ให้

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i-1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ถ้าหาค่า $\det A_i$ โดยใช้หลักที่ i เป็นหลักในการกระจายจะได้ว่า

$$\det A_i = b_1C_{1i} + b_2C_{2i} + \cdots + b_nC_{ni}$$

ดังนั้น

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A} \qquad \text{สำหรับ } i = 1,2,\ldots,n$$

กฎของเครมเมอร์ใช้ในกรณีที่ จำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวไม่ทราบค่า และเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ และถ้า $n > 4$ มักจะไม่ใช้วิธีนี้ เพราะจะยุ่งยากในการหาค่าดีเทอร์มินันท์

<u>ตัวอย่างที่ 25</u> จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

เมตริกซ์สัมประสิทธิ์คือ

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

จะได้ $x_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

$$x_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{-6}{-2} = 3$$

$$x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{-8}{-2} = 4$$

นั่นคือ $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ และ $x_3 = 4$
