บทที่ 5

แนวการสอนเมตริกซ์จากหนังสือต่าง ๆ

บทนี้มีวัตถุประสงค์ เพื่อรวบรวมแนวทางการสอนเมตริกซ์ โดยพิจารณาจากหนังสือ วารสารต่าง ๆ พร้อมทั้งข้อเสนอแนะ รวมทั้งวิธีการของผู้วิจัยเอง เพื่อใช้ปรับปรุงแนวการสอนเมตริกซ์ให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

5.1 แนวการสอนเมตริกซ์ของ SMSG (School Mathematics Study Group)

บทนำ

SMSG เริ่มโดยกล่าวถึงจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตักยะและจำนวนจริง จากนั้นจึงกล่าวถึงความจำเป็นที่จะต้องสร้างจำนวนเชิงซ้อนขึ้น และได้ตั้งปัญหาทำไมเราไม่สร้างจำนวนใหม่ ๆ ให้มากขึ้น คำตอบก็คือไม่ใช่เรื่องยากที่จะสร้างจำนวนใหม่ ๆ ขึ้นอีก แต่เป็นเรื่องยากที่จะทำให้จำนวนที่สร้างขึ้นใหม่นั้นมีประโยชน์ สามารถนำไปใช้ได้ แต่อย่างไรก็ตามจำนวนใหม่ ๆ จำนวนมากได้ถูกสร้างขึ้นโดยนักคณิตศาสตร์ และส่วนหนึ่งของความสำเร็จในการสร้างจำนวนใหม่ขึ้นมานั้นคือ "เมตริกซ์"

ก่อนที่จะกล่าวว่าเมตริกซ์คืออะไร SMSG ได้กล่าวถึงความสำคัญของเมตริกซ์ก่อนว่า มีประโยชน์เกือบทุกแขนงของวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ โอเปอเรชันจำนวนมาก กระทำโดยสมองกล " electronic brains " คำนวณด้วยเมตริกซ์ ปัญหาจำนวนมากในทางสถิติแสดงในเทอมของเมตริกซ์ เมตริกซ์มาในรูปปัญหาของเศรษฐศาสตร์ และเมตริกซ์มีความสำคัญอย่างยิ่งในการศึกษาอะตอมมิคฟิสิกส์ เพราะอะตอมมิคฟิสิกส์ แสดงปัญหาส่วน

ใหญ่ในเทอมของเมตริกซ์ พีชคณิตอื่น ๆ จำนวนมาก เช่น พีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน และพีชคณิตเวคเตอร์ สามารถอธิบายได้โดยง่ายในเทอมของเมตริกซ์

SMSG เริ่มเข้าสู่เมตริกซ์ โดยกล่าวถึงผู้นิยมกีฬาเบสบอลจำนวนมากเปิดหนังสือพิมพ์ เพื่อจะดูตารางทำนองต่อไปนี้

	G	AB	R	H
Aaron	68	280	52	109
Williams	52	194	29	60
Mantle	60	228	51	70
Lopez	63	241	38	72

ถ้าเขานิยมทีม Mantle เขาจะดูตัวเลขในแถวที่สามและหลักที่สี่ของจำนวนเหล่านี้ เพื่อจะดูว่าทีม Mantle ตีได้ไกลกี่ครั้งในระหว่างฤดูดังกล่าว

ต่อจากนั้นจึงให้สังเกตว่า เราพูดถึง "แถว" ในการพูดถึงแถวตามแนวนอน และหลัก ในการพูดถึงแถวตามแนวตั้ง ดังนั้น

แถวที่สามคือ

60 228 51 70

หลักที่สี่คือ

109
60
70
72

ต่อจากนั้นเมื่อตัดหัวเรื่องบนแถว และหลัก ออกจะได้กลุ่มของสมาชิกเรียกว่า "เมตริกซ์"

การบวกเมตริกซ์

SMSG เริ่มจากการบวกจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งจะประยุกต์ไปสู่เมตริกซ์ โดยให้ระลึกว่า เมื่อจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนบวกกัน ตัวอย่างเช่น $3 + 5i$ และ $-2 + 4i$ ให้เอาส่วนจริงสองจำนวนบวกกัน และเอาส่วนจินตภาพสองจำนวนบวกกัน ดังนั้น

$$(3 + 5i) + (-2 + 4i) = (3 + (-2)) + (5 + 4)i = 1 + 9i$$

ถ้าแทนจำนวนเชิงซ้อนเป็นเวคเตอร์หลัก (Column vector) จะหาผลบวกโดยการบวกสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นการแนะนำรูปแบบที่ใช้ในการบวกเมตริกซ์ของอันดับเดียวกัน ผลบวกของสองเมตริกซ์กระทำโดยการบวกสมาชิกแต่ละตัวในตำแหน่งเดียวกัน ตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเราไม่ได้ให้กฎการบวกของเมตริกซ์ที่มีขนาดต่างกัน เราจะบวกเมตริกซ์ได้เฉพาะเมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากันเท่านั้น

ต่อจากนั้นจึงให้นิยามของการบวก

การคูณของเมตริกซ์

SMSG เริ่มต้นโดยให้ดูปัญหาดังนี้

จำนวนหลอดและจำนวนลำโพงในเครื่อง T.V. สามแบบ แสดงรายละเอียดดังนี้

	แบบ A	แบบ B	แบบ C
จำนวนหลอด	13	18	20
จำนวนลำโพง	2	3	4

สมาชิกในแต่ละแถวจะเรียกว่าจำนวนชิ้นส่วนต่อเครื่อง

สมมุติว่าในเดือนมกราคม ได้รับรายการสั่งซื้อ T.V. แบบ A 12 เครื่อง แบบ B 24 เครื่อง และแบบ C 12 เครื่อง และในเดือนกุมภาพันธ์ แบบ A 6 เครื่อง แบบ B 12 เครื่อง และแบบ C 9 เครื่อง เราสามารถจัดรายการในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

	มกราคม	กุมภาพันธ์
แบบ A	12	6
แบบ B	24	12
แบบ C	12	9

สมาชิกในแต่ละหลัก จะเรียกว่าจำนวนเครื่องต่อเดือน

เพื่อที่จะหาจำนวนของหลอดและลำโพงที่ต้องการในแต่ละเดือน ตามรายการสั่งซื้อเหล่านั้น เราต้องใช้ตัวเลขจากทั้งสองเซ็ต

ตัวอย่างเช่นในการคำนวณหาจำนวนหลอดที่ต้องการในเดือนมกราคม เราก็คูณตัวเลขแต่ละตัวในแถวที่ 1 ของเมตริกซ์ ที่แสดงจำนวนชิ้นส่วนต่อเครื่อง กับตัวเลขที่สมนัยกันในหลักแรกของเมตริกซ์ที่แสดงจำนวนเครื่องต่อเดือน แล้วบวกผลคูณทั้งสองเข้าด้วยกัน ดังนั้นจำนวนหลอดที่ต้องการในเดือนมกราคมคือ

$$13(12) + 18(24) + 20(12) = 828$$

ในการคำนวณหาจำนวนลำโพงที่ต้องการในเดือนมากราคม เราก็คูณตัวเลขแต่ละตัวในแถวที่สองของเมตริกซ์ที่แสดงจำนวนชิ้นส่วนต่อเครื่องกับตัวเลขที่สมนัยกันในหลักแรกของเมตริกซ์ ที่แสดงจำนวนเครื่องต่อเดือน แล้วบวกผลคูณทั้งสามเข้าด้วยกัน ดังนั้นจำนวนลำโพงที่ต้องการในเดือนมากราคมคือ

$$2(12) + 3(24) + 4(12) = 144$$

สำหรับเดือนกุมภาพันธ์ก็ทำในทำนองเดียวกันจะได้จำนวนหลอดและจำนวนลำโพงตามลำดับดังนี้

$$13(6) + 18(12) + 20(9) = 474$$

และ

$$2(6) + 3(12) + 4(9) = 84$$

เราสามารถจัดผลทั้งสี่จำนวนมาตั้งเป็นแถว และหลักซึ่งเรียกว่าเมตริกซ์ แสดงจำนวนชิ้นส่วนต่อเดือน

	มกราคม	กุมภาพันธ์
จำนวนหลอด	828	474
จำนวนลำโพง	144	84

เมื่อแทนการกระทำนี้ให้อยู่ในรูปสมการจะได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 13 & 18 & 20 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 24 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 828 & 474 \\ 144 & 84 \end{pmatrix}$$

ซึ่ง 828 มีค่าเท่ากับผลบวกของผลคูณของตัวเลขต่าง ๆ ในแถวที่หนึ่งของตัวประกอบทางซ้ายมือกับตัวเลขต่าง ๆ ที่สมนัยกันของหลักที่หนึ่งของตัวประกอบทางขวามือ

474 มีค่าเท่ากับผลบวกของผลคูณของตัวเลขต่าง ๆ ในแถวแรกของตัวประกอบทางซ้ายมือกับตัวเลขต่าง ๆ ที่สมนัยกันในหลักที่สองของตัวประกอบทางขวามือ และตัวเลขอื่น ๆ ก็ได้มาจากการกระทำเช่นเดียวกันนี้

นอกจากนั้นได้พิจารณาผลคูณ

$$\begin{bmatrix} 828 & 474 \\ 144 & 84 \end{bmatrix}$$

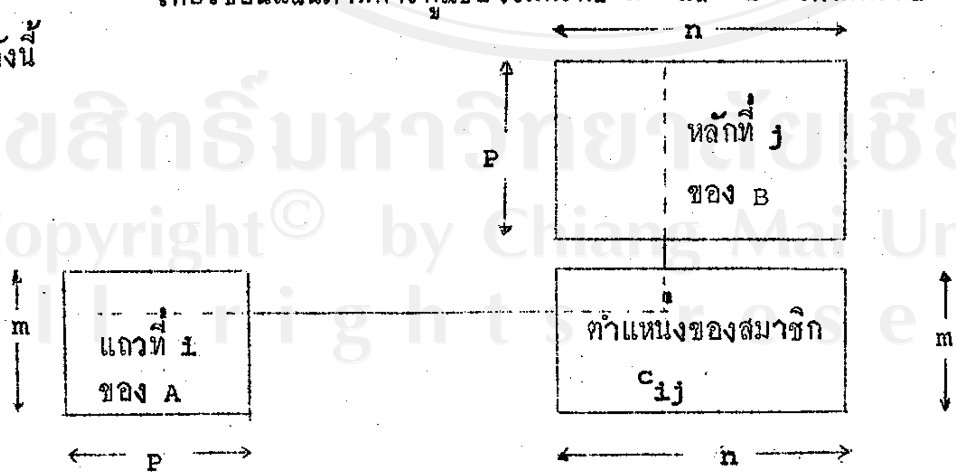
ให้เขียนในรูปสัญลักษณ์ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

สับสคริป (subscript) จะบ่งแถวและหลัก ซึ่งสมาชิกปรากฏอยู่ และบ่งแถวและหลักของเมตริกซ์ทั้งสองที่ทำให้ได้สมาชิกตัวดังกล่าวเช่น a_{21} อยู่ในแถวที่สองและหลักที่หนึ่งได้จากการบวกของผลคูณของสมาชิกในแถวที่สองของตัวประกอบ ทางซ้ายกับสมาชิกที่สมนัยกันของหลักที่หนึ่งของตัวประกอบทางขวา

ซึ่งจากหลักเกณฑ์ดังกล่าวนำไปสู่กฎเกณฑ์สำหรับการคูณของสองเมตริกซ์

โดยเขียนแผนภาพการคูณของเมตริกซ์ A และ B ได้เมตริกซ์ C ดังนี้

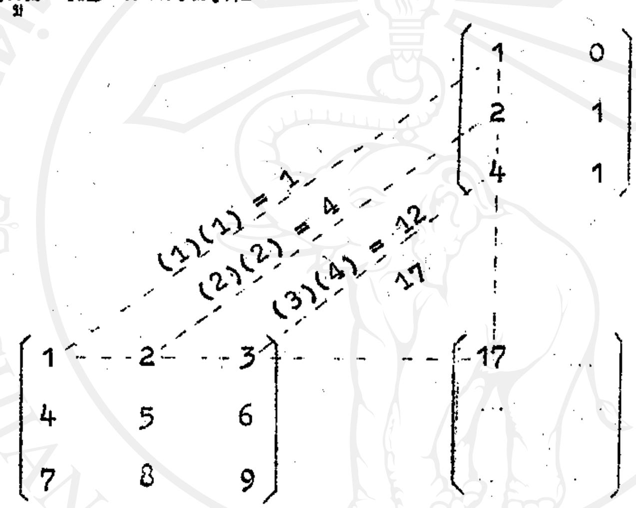


ซึ่งจากแผนภาพหมายถึง A เป็น $(m \times p)$ เมตริกซ์ B เป็น $(p \times n)$ เมตริกซ์ และ $AB = C$ เป็น $(m \times n)$ เมตริกซ์

สำหรับเมตริกซ์

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{และ } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ผลคูณ AB คำนวณโดย



ขั้นสุดท้ายคำตอบสำหรับผลคูณ AB ได้ดังนี้

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 5 \\ 38 & 11 \\ 59 & 17 \end{pmatrix}$$

จากนี้จึงให้นิยามของการคูณเมตริกซ์

<u>การสอนเรื่องอินเวอร์สของเมตริกซ์</u>

SMSG เริ่มต้นโดยกล่าวถึงปัญหาการหารเมตริกซ์ว่าเกิดขึ้นเมื่อเราต้องการที่จะแก้สมการเมตริกซ์ที่อยู่ในรูป

$$AX = C$$

ให้พิจารณาสมการคู่ขนานที่เกี่ยวข้องกับจำนวนจริง

$$ax = c$$

แต่ละ a ที่ไม่เท่ากับศูนย์จะมีจำนวนเลข $\frac{1}{a}$ ซึ่งโดยมากจะเขียน a^{-1} ซึ่งมีคุณสมบัติคือ $a.a^{-1} = 1$

เนื่องจากการคูณของจำนวนจริงเป็นคอมมิวเทตีฟจึงได้ว่า $a^{-1}a = 1$

ดังนั้นถ้า a เป็นจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์แล้วจะมีจำนวน b เรียกอินเวอร์สการคูณ (multiplicative inverse) ของ a ซึ่ง

$$ab = 1 = ba \qquad (b = a^{-1})$$

กำหนดสมการ $ax = c$ เมื่อ $a \neq 0$ อินเวอร์สการคูณ b ทำให้หาคำตอบสำหรับ x ได้ดังนี้

$$b(ax) = bc$$

$$(ba)x = bc$$

$$1x = bc$$

จากนั้นจึงกล่าวถึงอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ และนิยามอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ และได้แสดงให้เห็นว่า ถ้ามี B ซึ่งสอดคล้องกับ A โดยที่

$$AB = I = BA$$

แล้วจะสามารถแก้สมการทุกสมการในรูปแบบ

$$AX = C$$

เนื่องจากว่า

$$B(AX) = BC$$

$$(BA)X = BC$$

$$IX = BC$$

$$X = BC$$

การหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์เริ่มจากตัวอย่างต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

ให้ตรวจสอบว่ามีอินเวอร์ส B ซึ่ง AB = I = BA หรือไม่

ถ้าให้

$$B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3p-r & 3q-s \\ 5p-2r & 5q-2s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นจะมีสมการต่อไปนี้

$$3p-r = 1 \quad , \quad 3q-s = 0$$

$$5p-2r = 0 \quad , \quad 5q-2s = 1$$

แก้สมการหาค่า p, q, r และ s จะได้

$$p = 2, \quad q = -1, \quad r = 5 \quad \text{และ} \quad s = -3$$

นั่นคือ
$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

จากนั้นได้ตรวจสอบแสดงให้เห็นว่า $AB = I = BA$ จริง

หลังจากนั้นจึงหาอินเวอร์สของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ถ้า A มีอินเวอร์ส จะแทนอินเวอร์สของ A ด้วยเมตริกซ์

$$B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า

$$AB = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากนั้น SMSG ใช้วิธีแก้สมการหาค่า p, q, r และ s

ได้ $p = \frac{d}{h}$

$q = -\frac{b}{h}$

เมื่อ $h = ad - bc \neq 0$

$r = -\frac{c}{h}$

$s = \frac{a}{h}$

จะได้ $B = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เมื่อ $h = ad - bc \neq 0$

จากนั้นจึงเขียนเป็นทฤษฎีว่า

ถ้า $h = ad - bc \neq 0$ แล้ว เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

มีอินเวอร์สเป็น

$$\frac{1}{h}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

<u>การสอนเรื่องเมตริกซ์และระบบเชิงเส้น</u> (Matrices and Linear Systems)

ในตอนนี้ SMSG จะแสดงการใช้เมตริกซ์ในการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น โดยเริ่มจากการวิเคราะห์วิธีการคำนวณระบบเหล่านี้ แล้วจึงแสดงวิธีทำนองเดียวกันเมื่ออยู่ในรูปของเมตริกซ์

เริ่มต้นโดยให้พิจารณาระบบสมการ

$$\text{(I)} \quad \begin{aligned} x - y + z &= -2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ x - 2y - 2z &= -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ 2x + y + 3z &= 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{aligned}$$

ขั้นแรกของการหาคำตอบทำดังนี้

คูณสมการ (1) ด้วย 1 เป็นสมการ (1′)

คูณสมการ (1) ด้วย −1 แล้วบวกกับสมการ (2) เป็นสมการ (2′)

คูณสมการ (1) ด้วย −2 แล้วบวกกับสมการ (3) เป็นสมการ (3′) ดังต่อไปนี้

$$\text{(II)} \quad \begin{aligned} x - y + z &= -2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1') \\ 0 - y - 3z &= 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2') \\ 0 + 3y + z &= 5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3') \end{aligned}$$

ขั้นที่สองทำทำนองเดียวกับขั้นแรก คงสมการ $(1')$ ไว้เป็นสมการ $(1'')$

คูณสมการ $(2')$ ด้วย -1 ได้ $(2'')$

คูณสมการ $(2')$ ด้วย 3 แล้วบวกกับสมการ $(3')$ ได้สมการ $(3'')$ ดังนั้นจะได้

$$
\text{(III)} \quad
\begin{array}{lr}
x - y + z = -2 & \ldots\ldots\ldots\ldots(1'') \\
0 + y + 3z = -1 & \ldots\ldots\ldots\ldots(2'') \\
0 + 0 - 8z = 8 & \ldots\ldots\ldots\ldots(3'')
\end{array}
$$

ขั้นที่สาม

คูณสมการ $(3'')$ ด้วย $-\frac{1}{8}$ ได้สมการ $(3''')$

คูณสมการ $(3'')$ ด้วย $\frac{3}{8}$ แล้วบวกกับ $(2'')$ ได้สมการ $(2''')$

คูณสมการ $(3'')$ ด้วย $\frac{1}{8}$ แล้วบวกกับสมการ $(1'')$ ได้สมการ $(1''')$

ดังนั้นจะได้

$$
\text{(IV)} \quad
\begin{array}{lr}
x - y + 0 = -1 & \ldots\ldots\ldots\ldots(1''') \\
0 + y + 0 = 2 & \ldots\ldots\ldots\ldots(2''') \\
0 + 0 + z = -1 & \ldots\ldots\ldots\ldots(3''')
\end{array}
$$

ตอนนี้คงสมการ $(2''')$ และ $(3''')$ และบวกสมการที่สองกับสมการแรก จะได้

$$
\text{(V)} \quad
\begin{array}{l}
x + 0 + 0 = 1 \\
0 + y + 0 = 2 \\
0 + 0 + z = -1
\end{array}
$$

หรือในรูปที่คุ้นเคยก็คือ

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = -1$$

ในขบวนการที่ทำเราได้ระบบ (II) จากระบบ (I), (III) จาก (II) , (IV) จาก (III) และ (V) จาก (IV), ดังนั้น เซ็ตใด ๆ ของค่าซึ่งสอดคล้องกับระบบ (I) จะต้องสอดคล้องกับแต่ละระบบที่ได้รับด้วย เรียกระบบ (I), (II), (III), (IV) และ (V) นี้ว่า <u>เป็นระบบสมมูลย์</u>

ต่อจากนี้จึงให้นิยามของระบบสมมูลย์ (equivalent system) และการกระทำที่จะให้ได้ระบบสมมูลย์กระทำได้ดังนี้

A คูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยจำนวนที่ไม่เป็นศูนย์

B บวกสมการหนึ่งกับสมการอื่น ๆ

C สลับที่สมการสองสมการ

ให้พิจารณาระบบสมการ

$$x - y + z = -2$$

$$x - 2y - 2z = -1$$

$$2x + y + 3z = 1$$

โดยการนำสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x, y และ z มาสร้างเมตริกซ์ A จะได้

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ให้

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

จะได้ว่า

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - y + z \\ x - 2y - 2z \\ 2x + y + 3z \end{pmatrix}$$

ซึ่งเป็น (3 x 1) เมตริกซ์ และเป็นจำนวนเดียวกันกับจำนวนทางซ้ายมือของสมการเชิงเส้น

ดังนั้นสมการ

$$AX = B$$

คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

เป็นระบบสมมูลย์ (โดยนิยามของการเท่ากันของเมตริกซ์) กับระบบสมการเชิงเส้น

ดังนั้นสมการ

$$AX = B$$

คือ

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ซึ่งเคยแก้สมการมาแล้วว่ามีคำตอบชุดเดียว (unique solution)
คือ

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

พิจารณาขบวนการที่ทำมาแล้ว และเขียนระบบสมการอยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

สองข้างของ $\iff$ หมายถึงว่าสมการเมตริกซ์เป็นสมมูลย์กัน
เมื่อพิจารณาเฉพาะขั้นแรกและขั้นสุดท้าย

ขั้นแรกคือ

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ขั้นสุดท้ายคือ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ขบวนการของเราคือเปลี่ยนเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ A ไปสู่เมตริกซ์เอกลักษณ์ I และเพราะว่า

$$A^{-1}A = I$$

ดังนั้น ด้วยวิธีการเปลี่ยนดังกล่าวนี้ เราต้องเอา A^{-1} คูณเข้าทางซ้ายมือของทั้งสองข้างของสมการ

$$AX = B$$

จะได้

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

ดังนั้น $$X = A^{-1}B$$

สำหรับกรณีนี้ A จะต้องมีอินเวอร์ส ซึ่งเราต้องไม่ลืมว่ามีเมตริกซ์เป็นจำนวนมากที่ไม่มีอินเวอร์สสำหรับการคูณ

<u>การสอนเรื่องอินเวอร์สของเมตริกซ์ของ SMSG</u> (ต่อ)

เมื่อเขียนระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมตริกซ์

$$AX = B$$

ในการแก้ระบบสมการนี้จะต้องเกี่ยวข้องกับอินเวอร์สของเมตริกซ์ A นั่นคือถ้า A^{-1} หาค่าได้ คำตอบของสมการนี้คือ

$$X = A^{-1}B$$

จากที่กล่าวมาแล้วพิจารณาเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ทางด้านซ้าย

ขั้นที่ 1 ขั้นที่ 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

ขั้นที่ 3 ขั้นที่ 4

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

สรุปการกระทำได้ว่า

ขั้นต่าง ๆ เกิดจากการกระทำเช่นเดียวกับการกระทำของระบบสมการเชิงเส้น เพื่อให้ได้ระบบสมมูลย์นั่นเอง แต่การกระทำนี้เกิดกับแถวของเมตริกซ์ จึงเรียกว่าการกระทำเบื้องต้นกับแถว (elementary row operations)

และเมตริกซ์สองเมตริกซ์เรียกว่าเป็นสมมูลย์แบบแถว (row equivatent) ต่อเมื่อเมตริกซ์หนึ่งสามารถเปลี่ยนไปสู่อีกเมตริกซ์หนึ่งโดยการกระทำเบื้องต้นกับแถว

พิจารณาสมการ

$$AX = B$$

สามารถเขียนเป็นสมการสมมูลย์คือ

$$AX = IB \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

และสามารถเปลี่ยนสมการดังกล่าวนี้ไปเป็น

$$X = A^{-1}B$$

ซึ่งสมการสมมูลย์คือ

$$IX = A^{-1}B \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (4) และ (5) จะเห็นว่าขณะที่ A เปลี่ยนไปสู่ I, I จะเปลี่ยนไปสู่ A^{-1} และแสดงให้เห็นโดยอาศัยหลักขนาน (parallel column) ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(R_1;\ -1R_1 + R_2\ ;\ -2R_1 + R_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(R_1;\ -1R_2;\ 3R_2 + R_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$(\frac{1}{8} R_3 + R_1;\ \frac{3}{8} R_3 + R_2;\ -\frac{1}{8} R_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$(1R_2 + R_1;\ R_2;\ R_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{4}{8} & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

แสดงว่า

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{4}{8} & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

เป็นอินเวอร์สของ A

จำเป็นจะต้องแสดงว่า

$$CA = \begin{pmatrix} -\frac{4}{8} & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = I$$

ซึ่งแสดงว่า C เป็นอินเวอร์ส A^{-1} ของ A

สำหรับ AC = I เป็นผลจาก CA = I

เมื่อเริ่มขบวนการอาจไม่ทราบว่า A^{-1} หาค่าได้หรือไม่ แต่ถ้าสามารถเปลี่ยน A ไปสู่ I ได้แล้ว จะบอกได้ว่า A^{-1} หาค่าได้

การสอนเรื่องระบบสมการเชิงเส้นของ SMSG (ต่อ)

พิจารณาระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
2x - 3y + 4z &= 5 \\
2x + 7y - 2z &= 1 \\
2x + 2y + z &= 3
\end{aligned}
$$

โดยอาศัยหลักขนาน

$$
\left(\begin{array}{ccc} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 7 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)
$$

ภายหลังที่ได้ทำไปสามขั้นจะได้

$$
\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & \frac{11}{10} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Bigg| \left(\begin{array}{ccc} \frac{7}{20} & \frac{3}{20} & 0 \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)
$$

ถ้าเราคูณสองเมตริกซ์นี้ทางด้านขวาด้วย

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{ตามลำดับ}
$$

จะได้

$$
\begin{aligned}
x + \frac{11}{10} z &= \frac{19}{10} \\
y - \frac{3}{5} z &= -\frac{2}{5} \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$x = \frac{19}{10} - \frac{11}{10}z$$

เมื่อ z แทนด้วยจำนวนจริงใด ๆ

$$y = -\frac{2}{5} + \frac{3}{5}z$$

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ x - y + z &= 4 \\ 4x - y + 2z &= 14 \end{aligned}$$

โดยอาศัยหลักข้างบน

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ภายหลังที่ได้ทำไปแล้วจะได้

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

คูณสองเมตริกซ์นี้ทางด้านขวามือด้วย

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \text{ตามลำดับ}$$

จะได้ระบบ

$$x + \frac{1}{3}z = \frac{11}{3}$$

$$y - \frac{2}{3}z = -\frac{1}{3}$$

$$0 = -1$$

ซึ่งจาก $0 = -1$ ไม่เป็นความจริง
ดังนั้นระบบนี้ไม่มีคำตอบ

5.2 แนวการสอนเมตริกซ์ของ SSMCIS (Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study)

บทนำ

SSMCIS เริ่มต้นโดยกล่าวถึงบางสิ่งบางอย่างที่มีประโยชน์ นำไปใช้ได้อย่างกว้างขวาง เปรียบเทียบกับล้อซึ่งเป็นเครื่องมือที่จำเป็นมาแต่อดีต ใช้ขับเคลื่อนเกวียน แม้แต่ปัจจุบันประโยชน์ของมันก็ยิ่งมากขึ้น ในทางคณิตศาสตร์ "เมตริกซ์" ก็มีที่ใช้อย่างกว้างขวางเช่นกัน ได้ถูกนำมาใช้ตั้งแต่ 100 ปีมาแล้ว โดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษที่ชื่อ Arthur Cayley (1821 - 1895) และปัจจุบันก็มีประโยชน์ต่อนักฟิสิกส์ นักชีววิทยา นักเศรษฐศาสตร์ ผู้ชำนาญกสิกรรม นักสังคม นักจิตวิทยา และอื่น ๆ เป็นจำนวนมาก

ต่อจากนั้นได้แนะนำให้รู้จักเมตริกซ์โดยกล่าวว่าในสังคมที่ซับซ้อนต้องการรายงานทางด้านตัวเลขเป็นจำนวนมาก ตัวอย่างเช่น

ร้านประดิษฐ์หัตถกรรม มีสามโรงงาน ซึ่งแต่ละแห่งใช้เครื่องประกอบอีเลคโทรนิคสี่แบบแตกต่างกัน เรียก A, B, C และ D โรงงาน I ใช้ชิ้นส่วน A จำนวน 30 ชิ้น ชิ้นส่วน B จำนวน 43 ชิ้น ชิ้นส่วน C จำนวน 37 ชิ้น

และชิ้นส่วน C จำนวน 16 ชิ้น ต่อวัน โรงงาน II ใช้ชิ้นส่วน A จำนวน 25 ชิ้น ชิ้นส่วน B จำนวน 15 ชิ้น ชิ้นส่วน C จำนวน 30 ชิ้น และชิ้นส่วน D จำนวน 12 ชิ้น ต่อวัน โรงงาน III ใช้ชิ้นส่วน A จำนวน 61 ชิ้น ชิ้นส่วน B จำนวน 50 ชิ้น ชิ้นส่วน C จำนวน 55 ชิ้น และชิ้นส่วน D จำนวน 30 ชิ้น ต่อวัน

เป็นการยากที่จะจำหรือเปรียบเทียบข้อมูลเหล่านี้เมื่อเขียนไว้ในลักษณะดังกล่าวข้างบนนี้ แต่ถ้าเขียนไว้ในตารางจะได้ข้อมูลทั้งหมดที่สรุปเรื่องราวดังนี้

โรงงาน

	I	II	III
A	30	25	61
B	43	15	50
C	37	30	55
D	16	12	30

ถ้าแยกตารางออกจากหัวเรื่อง และใส่วงเล็บล้อมรอบจะได้เมตริกซ์

$$\begin{pmatrix} 30 & 25 & 61 \\ 43 & 15 & 50 \\ 37 & 30 & 55 \\ 16 & 12 & 30 \end{pmatrix}$$

ต่อไปนี้จึงให้นิยามของเมตริกซ์

การสอนเรื่องการบวกเมตริกซ์

SSMCIS เริ่มนำเข้าสู่การบวกเมตริกซ์ โดยกล่าวว่าชายคนหนึ่งทำสัญญาสร้างบ้านสองแบบ ซึ่งเรียกว่าแบบ A และแบบ B ในเมืองสามเมือง คือ Huntington, Smithtown และ Merrick เมตริกซ์ P และเมตริกซ์ Q ดังข้างล่างนี้ จะแสดงว่ามีบ้านกี่หลังของแต่ละแบบที่สร้างในปี 1966 และ 1967 ตามลำดับ

$$\begin{array}{ll} & \text{1966} \\ & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Huntington} \\ \text{Smithtown} \\ \text{Merrich} \end{array} & \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \\ & \text{เมตริกซ์ } P \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{1967} \\ \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{เมตริกซ์ } Q \end{array}$$

ถ้าถามว่าบ้านแต่ละแบบมีจำนวนเท่าใดในแต่ละเมืองที่เขาสร้างในเวลา 2 ปีนี้ การหาคำตอบก็คือการบวกสมาชิกใน P และ Q ซึ่งอยู่ในตำแหน่งเดียวกัน และเขียนคำตอบในตำแหน่งเดียวกันในเมตริกซ์ที่สาม ซึ่งแทนด้วยเมตริกซ์ R

$$\underset{P}{\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}} + \underset{Q}{\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} = \underset{R}{\begin{pmatrix} 8+6 & 3+3 \\ 4+2 & 5+7 \\ 3+4 & 3+3 \end{pmatrix}} = \underset{R}{\begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 12 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}}$$

สังเกตว่า P, Q และ R มีขนาดเท่ากัน ฉะนั้นเมตริกซ์จะบวกกันได้ เมื่อมีขนาดเท่ากัน

ในตอนนี้ SSMCIS ยังไม่ได้ให้เป็นนิยามของการบวกและได้เข้าสู่เรื่องการคูณเมตริกซ์เลย สำหรับนิยามการบวกและการคูณ SSMCIS จะให้ในบทต่อไป

การสอนเรื่องการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

SSMCIS เริ่มต้นโดยพิจารณาจากตัวอย่างเดียวกันกับการบวกดังนี้

สมมุติว่าบ้านแบบ A แต่ละหลังมี 6 ประตู 8 หน้าต่าง และแบบ B แต่ละหลังมี 5 ประตู 7 หน้าต่าง ดังแสดงโดยตาราง

	ประตู (D)	หน้าต่าง (W)
A	6	8
B	5	7

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

ถามว่าจะต้องใช้ประตูเท่าใด และหน้าต่างเท่าใดในแต่ละเมือง โดยคิดเฉพาะปี 1967

$$Q = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad S = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

เราใช้วิธีธรรมดาที่จะหาคำตอบคือคำนวณดังต่อไปนี้

สำหรับเมือง Huntington ต้องใช้ 6 x 6 ประตูสำหรับแบบ A
ใช้ 3 x 5 ประตูสำหรับแบบ B
ผลรวม 6 x 6 + 3 x 5 = 51 ประตู

สำหรับเมือง Smithtown ต้องใช้ 2 x 6 ประตูสำหรับแบบ A
ใช้ 7 x 5 ประตูสำหรับแบบ B
ผลรวม 2 x 6 + 3 x 5 = 47 ประตู

สำหรับเมือง Merrich ต้องใช้ 4 x 6 ประตูสำหรับแบบ A
ใช้ 3 x 5 ประตูสำหรับแบบ B
ผลรวม 4 x 6 + 3 x 5 = 39 ประตู

ทำนองเดียวกันจะคำนวณหาจำนวนหน้าต่างได้ดังนี้

สำหรับเมือง Huntington ต้องใช้ $6 \times 8 + 3 \times 7 = 69$ หน้าต่าง

เมือง Smithtown ต้องใช้ $2 \times 8 + 7 \times 7 = 65$ หน้าต่าง

เมือง Merrich ต้องใช้ $4 \times 8 + 3 \times 7 = 53$ หน้าต่าง

$$\begin{array}{c} \\ H \\ S \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} D & \quad W \end{array} \\ \begin{pmatrix} 51 & 69 \\ 47 & 65 \\ 39 & 53 \end{pmatrix} \end{array}$$ แทนด้วยเมตริกซ์ T

การคำนวณทั้งหมดนี้เรียกว่าการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ (Multiplication on matrices) ซึ่งแสดงโดยรูปแบบดังนี้

$$\underset{Q}{\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}} \underset{S}{\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}} = \underset{T}{\begin{pmatrix} 6 \times 6 + 3 \times 5 & 6 \times 8 + 3 \times 7 \\ 2 \times 6 + 7 \times 5 & 2 \times 8 + 7 \times 7 \\ 4 \times 6 + 3 \times 5 & 4 \times 8 + 3 \times 7 \end{pmatrix}}$$

$$= \underset{T}{\begin{pmatrix} 51 & 69 \\ 47 & 65 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}}$$

จากนี้จึงกล่าวว่าการคูณเมตริกซ์เป็นไปได้เพราะว่าจำนวนของหลักใน Q เท่ากับจำนวนของแถวใน S และผลคูณเป็นเมตริกซ์ T ซึ่งมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวใน Q และจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักใน S และได้แสดงแบบแผนในโอเปอเรชัน โดยให้ศึกษาจากการคูณเพียงบางส่วน เพื่อให้พยายามหารูปแบบดังนี้

$$\overset{R}{\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}} \overset{S}{\begin{bmatrix} 6 & \cdot \\ 5 & \cdot \end{bmatrix}} = \overset{T}{\begin{bmatrix} 6 \times 6 + 3 \times 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}}$$

แถวที่ 1 หลักที่ 1 สมาชิกแถวที่ 1 หลักที่ 1

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & 8 \\ \cdot & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & 6 \times 8 + 3 \times 7 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

แถวที่ 1 หลักที่ 2 สมาชิกแถวที่ 1 หลักที่ 2

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & 8 \\ \cdot & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & 4 \times 8 + 3 \times 7 \end{bmatrix}$$

แถวที่ 3 หลักที่ 2 สมาชิกแถวที่ 3 หลักที่ 2

สำหรับในรูปทั่วไป สมาชิกในผลคูณเมตริกซ์สำหรับแถวที่ i และหลักที่ j หาได้โดยคูณในแต่ละคู่ จำนวนแรกในแถว i ของเมตริกซ์แรก และจำนวนแรกในหลักที่ j ของเมตริกซ์ที่สอง ทำเช่นเดียวกันสำหรับตัวที่สองและเรื่อย ๆ ไป แล้วบวกผลคูณเหล่านี้

<u>ตัวอย่าง</u> สมมุติประตูราคาบานละ \$ 8 และหน้าต่างบานละ \$ 10 ฉะนั้นราคาแสดงโดย (2 x 1) เมตริกซ์ C

	ราคา
D	8
W	10

$$C = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ฉะนั้นในปี 1967 แต่ละเมืองจะต้องเสียค่าใช้จ่ายรวมของหน้าต่างและประตูเป็นเงินเท่าใด ซึ่งคำตอบหาได้โดยการคูณเมตริกซ์แสดงดังนี้

$$\underset{T}{\begin{pmatrix} 51 & 69 \\ 47 & 65 \\ 39 & 53 \end{pmatrix}} \underset{C}{\begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}} = \underset{D}{\begin{pmatrix} 51 \times 8 + 69 \times 10 \\ 47 \times 8 + 65 \times 10 \\ 39 \times 8 + 53 \times 10 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1098 \\ 1026 \\ 842 \end{pmatrix} \begin{array}{c} H \\ S \\ M \end{array}$$

สังเกตขนาดของแต่ละเมตริกซ์ในการคูณ

T : 3 x 2   C : 2 x 1   D : 3 x 1

<u>การสอนเรื่องสมการเชิงเส้นและเมตริกซ์</u> (Linear Equations and Matrices) ของ SSMCIS

เริ่มโดยแสดงให้เห็นว่าสำหรับสมการเชิงเส้นต่าง ๆ เมื่อใช้ตัวคงที่ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์คูณตลอดจะไม่ทำให้คำตอบเปลี่ยนไป แล้วสรุปเป็นกฎเกณฑ์

ต่อจากนั้นได้แสดงการกระทำของระบบสมการ ทำให้เกิดระบบสมการใหม่ การกระทำดังกล่าวเรียกว่า<u>การกระทำเบื้องต้น</u> (Elementary Operation)

ระบบใหม่ที่เกิดขึ้นเรียกว่าเป็น<u>สมมูลย์กับระบบเดิม</u>

จากนั้นจึงได้แสดงให้เห็นว่าคำตอบของระบบเดิมกับระบบใหม่ที่เป็นสมมูลย์กันมีคำตอบเดียวกัน แล้วจึงสรุปเป็นกฎเกณฑ์

หลังจากนี้จึงเป็นตัวอย่างของการแก้สมการในรูปสมการ (Equation Form) และรูปตาราง (Tableau Form) ซึ่งรูปฟอร์มเป็นดังนี้

Equation Form	Instruction	Tableau Form x	y	-1	
$2x + 3y - 1 = 0$	A_1	2	3	1	= 0
$3x - 2y - 8 = 0$	A_2	3	-2	8	= 0
$x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2} = 0$	$B_1 = (\frac{1}{2})A_1$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	= 0
$0x + (-\frac{13}{2})y - \frac{13}{2} = 0$	$B_2 = A_2 + (-3)B_1$	0	$-\frac{13}{2}$	$\frac{13}{2}$	= 0
$x + 0y - 2 = 0$	$C_1 = B_1 + (-\frac{3}{2})C_2$	1	0	2	= 0
$0x + y + 1 = 0$	$C_2 = (-\frac{2}{13})C_1$	0	1	-1	= 0

การสอนเรื่องการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์

ก่อนที่จะสอนเรื่องการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ SSMCIS ได้สอนการแก้สมการทั้งสมการโฮโมจีเนียส และสมการนอนโฮโมจีเนียส และได้กล่าวถึงสมการเชิงเส้นที่เขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์มาแล้ว ฉะนั้นจึงได้นำความรู้ดังกล่าวมาช่วยหาอินเว่อร์สของเมตริกซ์ โดยจะแสดงว่าเมตริกซ์มีอินเวอร์สหรือไม่ และถ้ามีจะหาได้อย่างไร โดยยกตัวอย่างจากเมตริกซ์ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

ให้ $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ เป็นอินเวอร์ส

ดังนั้น $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ในรูปตารางสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{array}{ccc|c} x & z & -1 & \\ \hline 2 & 3 & 1 & = 0 \\ 1 & 2 & 0 & = 0 \end{array} \qquad \text{และ} \qquad \begin{array}{ccc|c} y & w & -1 & \\ \hline 2 & 3 & 0 & = 0 \\ 1 & 2 & 1 & = 0 \end{array}$$

ซึ่งเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เหมือนกันทั้งสองตาราง ดังนั้นเราสามารถเชื่อมตาราง ทั้งสองอยู่ในตารางเดียวกันกับสองหลักของ -1 เราต้องระมัดระวังในการอ่าน หลักแรกของ -1 สำหรับตัวแปร x และ z และหลักที่สองสำหรับ y และ w

A	2	3	1	0	A_1
	1	2	0	1	A_2
B	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$B_1 = \frac{1}{2}A_1$
	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$B_2 = A_2 + (-1)B_1$
C	1	0	2	-3	$C_1 = B_1 + (-\frac{3}{2})C_2$
	0	1	-1	2	$C_2 = 2B_2$

เราจะเห็นจาก C ว่าจะมีคำตอบเพียงค่าเดียวสำหรับ x, y, z และ w ดังนั้น $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ มีอินเวอร์ส (อันเดียว) เมื่อเมตริกซ์เอกลักษณ์ ปรากฏที่ด้านซ้ายมือของ C เราอ่านอินเวอร์สของ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ทางด้านขวามือของ C นั่นคืออินเวอร์สของ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ คือ $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

สังเกตว่าเราเริ่มต้นด้วยตาราง

A	I_2

เมื่อ A เป็นเมตริกซ์ที่เราต้องการหาอินเวอร์สและจบลงด้วย

I_2	A^{-1}

สำหรับกรณีที่เมตริกซ์ A มีอินเวอร์ส

ด้วยวิธีการเดียวกันสามารถหาอินเวอร์สของ (3 x 3) เมตริกซ์

เมื่อ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ดังนี้

1	2	0	1	0	0	A_1
0	1	0	0	1	0	A_2
0	3	1	0	0	1	A_3
1	0	0	1	-2	0	$B_1 = A_1 + (-2)B_2$
0	1	0	0	1	0	$B_2 = A_2$
0	0	1	0	-3	1	$B_3 = A_3 + (-3)B_2$

จะเห็นว่า

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

ตรวจสอบผลอันนี้โดยแสดงว่า $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$

ตัวอย่างต่อไปเขาจะแสดงการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ M ซึ่งไม่มีอินเวอร์ส

$$\text{ให้} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1	2	3	1	0	0	A_1
2	-1	-2	0	1	0	A_2
3	1	1	0	0	1	A_3
1	2	3	1	0	0	$B_1 = A_1$
0	-5	-8	-2	1	0	$B_2 = A_2 + (-2)B_1$
0	-5	-8	-3	0	1	$B_3 = A_3 + (-3)B_1$
1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$C_1 = B_1 + (-2)C_2$
0	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$C_2 = (-\frac{1}{5})B_2$
0	0	0	-1	-1	1	$C_3 = B_3 + 5C_2$

เลขศูนย์สามตัวในบรรทัดสุดท้ายแสดงให้เห็นว่าเราจะไม่ได้ I_3 ฉะนั้นโดยวิธีแก้สมการดังกล่าวจึงเป็นการเปล่าประโยชน์ที่จะทำต่อไป

ถ้าเราเปลี่ยนเป็นรูปสมการจากแถวสุดท้ายจะได้

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -1$$

$$0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = -1$$

$$0x_7 + 0x_8 + 0x_9 = 1$$

เห็นชัดว่าไม่มีคำตอบสำหรับ $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ ดังนั้น M ไม่มีอินเวอร์ส

5.3 แนวการสอนเมตริกซ์ของ สสวท. (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี)

บทนำ

สสวท. เริ่มการสอนเมตริกซ์ด้วยการให้สังเกตการเขียนตัวเลขแสดงจำนวนในชีวิตประจำวัน ว่าบางครั้งมีการเขียนตัวเลขเรียงกันเป็นแถว ๆ เช่นในการแสดงผลการแข่งขันฟุตบอลของโรงเรียน เขียนแสดงดังนี้

	ชนะ	เสมอ	แพ้	ประตูได้	ประตูเสีย	คะแนน
โรงเรียน ก	2	1	0	7	2	5
โรงเรียน ข	1	2	0	4	2	4
โรงเรียน ค	1	1	1	5	6	3
โรงเรียน ง	0	0	3	2	8	0

ถ้าตัดชื่อโรงเรียน ชนะ เสมอ แพ้ ประตูได้ ประตูเสีย คะแนน ออกใช้เครื่องหมายวงเล็บ ( ) หรือ [ ] เขียนล้อมรอบตัวเลขเหล่านี้ไว้จะได้สิ่งที่ทางคณิตศาสตร์เรียกว่าเมตริกซ์ (matrix) ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

การบวกเมตริกซ์

สสวท. เริ่มเข้าสู่การบวกเมตริกซ์ โดยการกล่าวถึงบริษัทขายบ้านพร้อมที่ดินแห่งหนึ่งปลูกบ้านขายพร้อมที่ดินให้เลือกซื้อได้สองแห่งคือ ทางชานเมืองด้านเหนือ และด้านใต้ มีแบบบ้านทั้งหมดสามแบบ การปลูกบ้านแบ่งเป็นสองรุ่นดังนี้

รุ่นที่ 1

	แบบที่ 1	แบบที่ 2	แบบที่ 3
ชานเมืองด้านเหนือ	15	18	17
ชานเมืองด้านใต้	12	20	14

รุ่นที่ 2

	แบบที่ 1	แบบที่ 2	แบบที่ 3
ชานเมืองด้านเหนือ	14	19	22
ชานเมืองด้านใต้	17	25	0

เราต้องการทราบว่าบริษัทแห่งนี้มีบ้านแต่ละแบบปลูกไว้ในที่แต่ละแห่งแบบละกี่หลัง ต้องเอาจำนวนในตารางที่อยู่ตำแหน่งเดียวกันมาบวกกันจะได้ผลลัพธ์ดังนี้

	แบบที่ 1	แบบที่ 2	แบบที่ 3
ชานเมืองด้านเหนือ	29	37	39
ชานเมืองด้านใต้	29	45	14

ถ้าเขียนแสดงจำนวนบ้านในรุ่นที่ 1 และรุ่นที่ 2 ด้วยเมตริกซ์ A และ B ตามลำดับ จะได้

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 18 & 17 \\ 12 & 20 & 14 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 14 & 19 & 22 \\ 17 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

ให้ C เป็นเมตริกซ์ที่ได้จากการบวกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมตริกซ์ A และ B จะได้

$$C = \begin{bmatrix} 15 + 14 & 18 + 19 & 17 + 22 \\ 12 + 17 & 20 + 25 & 14 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & 37 & 39 \\ 29 & 45 & 14 \end{bmatrix}$$

ต่อจากนี้จึงให้นิยามของการบวก

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

สสวท. เริ่มเข้าสู่การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ โดยกล่าวว่าเด็กคนหนึ่งซื้อสมุด 5 เล่ม ดินสอ 4 แท่ง และไม้บรรทัด 2 อัน ถ้าสมุดราคาเล่มละ 3 บาท ดินสอราคาแท่งละ 50 สตางค์ และไม้บรรทัดอันละ 1 บาท เด็กคนนี้จะต้องจ่ายเงินเท่าใด

คำตอบของปัญหานี้คือ 19 บาท ซึ่งได้มาจาก

$(5 \times 3) + (4 \times \frac{1}{2}) + (2 \times 1)$ หรือ $15 + 2 + 2$

ถ้ามองโจทย์นี้ในแง่ของเมตริกซ์ A แสดงจำนวนเครื่องเขียนที่เขาซื้อมาดังนี้

$$A = \begin{array}{ccc} (\text{สมุด}) & (\text{ดินสอ}) & (\text{ไม้บรรทัด}) \\ \end{array}$$
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{เป็น } (1 \times 3) \text{ เมตริกซ์}$$

และเขียนแสดงราคาเครื่องเขียนต่าง ๆ ที่เขาซื้อมาเป็นเมตริกซ์ B ถ้าให้ B มีขนาดเป็น (3 x 1) จะได้เมตริกซ์ ดังนี้

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(ราคาของสมุด 1 เล่ม)} \\ \text{(ราคาของดินสอ 1 แท่ง)} \\ \text{(ราคาของไม้บรรทัด 1 อัน)} \end{matrix}$$

และถือเป็นข้อตกลงว่าการคูณเมตริกซ A กับ B ทำได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5x3) + (4 \times \frac{1}{2}) + (2x1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \end{bmatrix}$$

นั่นคือสมาชิกของเมตริกซ์ที่เป็นผลคูณ คือจำนวนที่เป็นคำตอบของปัญหา

ลักษณะการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ข้างต้น เป็นแบบแผนการคูณเมตริกซ์ที่ใช้ทั่ว ๆ ไป

ต่อจากนี้ได้มีการเปลี่ยนสมาชิกของเมตริกซ์เสียใหม่ เพื่อจะได้ให้เห็นแบบแผนการคูณเมตริกซ์

และได้สรุปแบบแผนการคูณของเมตริกซ์ (1 x 3) กับ (3 x 1) เป็นดังนี้คือ

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad + bc + cf \end{bmatrix}$$

สรุปว่าแบบแผนการคูณข้างต้นนี้ต้องคูณสมาชิกของเมตริกซ์เข้าด้วยกันเป็นคู่ ๆ แล้วนำผลคูณมารวมกันดังนั้น จำนวนหลักของเมตริกซ์แถวกับจำนวนแถวของเมตริกซ์หลักจึงต้องเท่ากัน

ให้พิจารณากรณีที่ A เป็น (2 x 3) เมตริกซ์ และ B เป็น (3 x 1) เมตริกซ์ โดยเริ่มปัญหาดังนี้

พี่น้องสองคนเข้าไปในร้านขายเครื่องเขียน คนพี่ซื้อสมุด 5 เล่ม ดินสอ 4 แท่ง และไม้บรรทัด 2 อัน คนน้องซื้อสมุด 6 เล่ม ดินสอ 2 แท่ง และไม้บรรทัด 1 อัน ถ้าสมุดราคาเล่มละ 3 บาท ดินสอราคาแท่งละ 50 สตางค์ ไม้บรรทัดราคาอันละ 1 บาท ถามว่าพี่น้องสองคนนี้จะจ่ายเงินค่าเครื่องเขียนคนละเท่าใด

ถ้าให้ A เป็นเมตริกซ์ แสดงจำนวนเครื่องเขียนที่พี่น้องสองคนนี้ซื้อ อาจเขียนเป็น (2 x 3) เมตริกซ์ ดังนี้

$$\begin{array}{cccc} \text{(สมุด)} & \text{(ดินสอ)} & \text{(ไม้บรรทัด)} & \\ \left[\begin{array}{c} 5 \\ 6 \end{array}\right. & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} & \left.\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \text{(พี่)} \\ \text{(น้อง)} \end{array} \end{array}$$

และถ้า B แสดงราคาเครื่องเขียนต่าง ๆ B อาจเขียนเป็น (3 x 1) เมตริกซ์ ได้ดังนี้

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(ราคาสมุด 1 เล่ม)} \\ \text{(ราคาดินสอ 1 แท่ง)} \\ \text{(ราคาไม้บรรทัด 1 อัน)} \end{array}$$

ดังนั้น

$$A \times B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

เมื่อพิจารณาคำตอบของปัญหาและวิธีการคูณเมตริกซ์ที่เคยทำมาข้างต้นจะได้ว่า การคูณควรได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนสองจำนวน ถ้าให้คำตอบเป็น (2 x 1) เมตริกซ์ จะได้

$$A \times B = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

เนื่องจากจำนวนเครื่องเขียนที่พี่ซื้อเป็นแถวบนของเมตริกซ์ A ดังนั้น จะให้ x เป็นรายจ่ายของพี่ และในทำนองเดียวกัน y จะเป็นรายจ่ายของน้อง วิธีการหาค่าของ x และ y จึงต้องใช้แถวแรกของเมตริกซ์ A คูณกับเมตริกซ์ B และแถวที่สองของเมตริกซ์ A คูณกับเมตริกซ์ B ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5x3) + (4 \times \frac{1}{2}) + (2 \times 1) \\ (6x3) + (2 \times \frac{1}{2}) + (1 \times 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 20 \end{bmatrix}$$

จากเมตริกซ์ที่เป็นผลคูณจะได้ว่าพี่ต้องจ่าย 19 บาท ส่วนน้องต้องจ่าย 20 บาท

ทำนองเดียวกัน ถ้าเด็ก p คนซื้อของ q ชนิด เมตริกซ์แสดงจำนวนสินค้าที่เด็กซื้อจะเป็น (p x q) เมตริกซ์ และเมตริกซ์แสดงราคาสินค้า q ชนิดนั้นจะเป็น (q x 1) เมตริกซ์ ส่วนเมตริกซ์ที่เป็นผลคูณจะเป็น (p x 1)เมตริกซ์ สมาชิกแต่ละตัวของเมตริกซ์ผลคูณจะแสดงรายจ่ายของเด็กแต่ละคนตามลำดับ วิธีหาสมาชิกแต่ละตัวของเมตริกซ์ผลคูณทำเช่นเดียวกับวิธีที่แสดงมาแล้ว

สำหรับการคูณของเมตริกซ์ จำนวนหลักของเมตริกซ์แรกจะต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์หลัง และการคูณที่แสดงมาแล้วทั้งหมด เมตริกซ์หลังของการคูณมีจำนวนหลักเป็นหนึ่ง แล้วเมตริกซ์ผลคูณก็จะมีจำนวนหลักเป็นหนึ่งด้วย ถ้าเมตริกซ์ที่เป็นตัวคูณตัวหลังมีหลักเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งแล้วการคูณก็ยังใช้ขบวนการเดิมกับหลักที่เพิ่มขึ้นได้อีกครั้ง ดังนั้นจึงนิยามให้ผลคูณที่ได้ครั้งหลังเป็นหลักที่สองของเมตริกซ์ผลคูณ เช่น

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 14\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ดังนั้นถือว่า

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 15 \\ 20 & 14\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

โดยกฎเกณฑ์ทำนองเดียวกันจะได้

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 46 \\ 24 & 45 \end{bmatrix}$$

ต่อจากนั้นจึงให้เป็นกฎเกณฑ์ทั่วไปของการคูณเมตริกซ์

<u>อินเวอร์สของเมตริกซ์</u>

สสวท. กล่าวเฉพาะการหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ขนาด (2 x 2) เท่านั้น และก่อนที่จะถึงตอนนี้ได้กล่าวถึงเอกลักษณ์การคูณของเมตริกซ์แล้ว

สสวท. เริ่มโดยกล่าวว่าสำหรับจำนวนจริงสองจำนวนที่คูณกันได้ 1 จะเรียกจำนวนทั้งสองนั้นว่าเป็นอินเวอร์สของกันและกัน สำหรับเมตริกซ์ขนาด (2 x 2) A และ B ถ้า A กับ B คูณกันได้เมตริกซ์เอกลักษณ์เราจะเรียกเมตริกซ์ A และ B ว่าเป็นอินเวอร์สของกันและกัน นิยมเขียน A^{-1} แทนอินเวอร์สของเมตริกซ์ A เช่น

ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ พิจารณาผลคูณของ A กับเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ในการหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ สสวท. ใช้วิธีหาโดยแก้สมการโดยสมมุติ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $AA^{-1} = I$

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จะได้ $ax_1 + bx_3 = 1$ และ $cx_1 + dx_3 = 0$

$ax_2 + bx_4 = 0$ $cx_2 + dx_4 = 1$

แก้สมการ

จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เมื่อ $ad - bc \neq 0$

การใช้เมตริกซ์แก้ระบบสมการเชิงเส้น

ระบบสมการที่สสวท. กล่าวถึงนี้จะมีจำนวนสมการในระบบเท่ากับจำนวนตัวแปร

สสวท. เริ่มโดยสร้างเมตริกซ์จากระบบสมการโดยเขียนสมาชิกของเมตริกซ์แต่ละแถวจากแต่ละสมการโดยแถวที่หนึ่งเขียนจากสมการที่หนึ่ง แถวที่สองเขียนจากสมการที่สองสำหรับสมการที่มีสองตัวแปร ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \text{สปส.ของ } x & \text{สปส.ของ } y & \text{ตัวคงที่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ} \\ \text{สปส.ของ } x & \text{สปส.ของ } y & \text{ตัวคงที่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ} \end{bmatrix}$$

เมื่อจำนวนสมการและจำนวนตัวแปรเพิ่มขึ้น การเขียนก็คงใช้วิธีเดียวกัน ...

จากนั้นได้กล่าวถึงการหาคำตอบระบบสมการจะใช้วิธีการสามข้อคือ

1. สลับลำดับของสมการได้

2. ใช้จำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์คูณจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการได้

3. สร้างสมการใหม่ขึ้นโดยการบวกหรือลบแต่ละข้างของสมการสองสมการในระบบได้

ขบวนการทั้งสามข้างต้นทำเพื่อให้ สปส. ของตัวแปรตัวใดตัวหนึ่งหรือหลายตัวเป็นศูนย์ ขบวนการดังกล่าวนำมาใช้กับเมตริกซ์ที่สร้างจากระบบสมการซึ่งคำตอบของสมการจากระบบใหม่เป็นคำตอบของระบบเดิม วิธีการสร้างเมตริกซ์ใหม่เป็นดังนี้คือ

1. สลับแถวสองแถวของเมตริกซ์ได้

2. ใช้จำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์คูณจำนวนในแถวใดแถวหนึ่งได้ โดยคูณทุก ๆ ตัวในแถว

3. ใช้จำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์คูณทุก ๆ จำนวนในแถวใดแถวหนึ่ง แล้วนำไปบวกหรือลบกับอีกแถวหนึ่ง โดยบวกหรือลบสมาชิกในหลักเดียวกันตลอดแถว

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ

$$x + y + z = 10$$
$$3x + z = 13$$
$$y + 2x - 2 - 9 = 0$$

วิธีทำ จัดสมการเสียใหม่ดังนี้

$$x + y + z = -10$$
$$3x + z = 13$$
$$2x + y - z = 9$$

จะได้เมตริกซ์ของ ส.ป.ส.ของตัวแปรและตัวคงที่ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -3 & -2 & -17 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_2 - 3A_1 \\ B_3 = A_3 - 2A_1 \end{matrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 16 \\ 0 & 1 & 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{matrix} C_1 = B_1 + B_3 \\ C_2 = B_2 - 3B_3 \\ C_3 = -B_3 \end{matrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{7} \\ 0 & 0 & 7 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{7} \end{bmatrix} \begin{matrix} D_1 = C_1 + \frac{2}{7}C_2 \\ D_2 = C_2 \\ D_3 = C_3 - \frac{3}{7} C_2 \end{matrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{25}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{7} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} E_1 = D_1 \\ E_2 = D_3 \\ E_3 = \frac{1}{7} D_2 \end{array}$$

จากเมตริกซ์ E เมื่อเขียนในรูประบบสมการจะได้

$$x = \frac{25}{7}$$

$$y = \frac{29}{7}$$

$$z = \frac{16}{7}$$

ดังนั้น $x = \frac{25}{7}$, $y = \frac{29}{7}$ และ $z = \frac{16}{7}$

5.4 <u>แนวการสอนเรื่องอินเวอร์สของเมตริกซ์จากวารสาร</u>

บทความเรื่อง A Discovery Lesson on Matrix Inverses ของ Nathaniel Mann III หน้า 323 - 324 ในวารสาร The Mathematics Teacher ปี 1971 ได้เสนอการหาอินเวอร์สของ (2 x 2) เมตริกซ์ไว้ดังนี้

เมื่อนักเรียนได้เรียนเกี่ยวกับการคูณเมตริกซ์ไปแล้ว นักเรียนรู้ว่า การคูณเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$$

จะได้เท่ากับ

$$\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{bmatrix}$$

และนักเรียนจะพบว่าเมตริกซ์เอกลักษณ์คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ฉะนั้นจึงพร้อมที่จะหาอินเวอร์ส

กำหนดเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

ให้ $\begin{bmatrix} \square & \triangle \\ \text{⬡} & \text{⬠} \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สของ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \square & \triangle \\ \text{⬡} & \text{⬠} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ

(1) $3 \times \square + 1 \times \text{⬡} = 1$

(2) $5 \times \square + 2 \times \text{⬡} = 0$

ถ้าเขียนคู่ลำดับของจำนวนที่สอดคล้องกับประโยคแรก ดังนั้น จากคู่ลำดับเหล่านี้ สามารถหาคู่ลำดับซึ่งสอดคล้องกับประโยคที่สองด้วย (ถ้ายังไม่มีคู่ลำดับที่สอดคล้องกับ (2) เราจะต้องขยายการหาคู่ลำดับออกไปอีก)

จาก (1) จะได้คู่ลำดับที่สอดคล้องคือ

(□ , ⬡) ; (0, 1), (1,-2), (2,-5), (3,-8), (-1,4), (-2,7), (-3,10)... ต่อไปเรื่อย ๆ

จากคู่ลำดับเหล่านี้ (2, -5) จะสอดคล้องกับ (2) ด้วย ดังนั้น

□ = 2 ⬡ = -5

เช่นเดียวกัน

(3) 3 x △ + 1 x ⬠ = 0

(4) 5 x △ + 2 x ⬠ = 1

จาก (3) จะได้คู่ลำดับ (△ , ⬠) ; (0,0), (1,-3), (2,-6), (3,-9), (-1,3), (-2,6), (-3,9)... ต่อไปเรื่อย ๆ

และจากคู่ลำดับเหล่านี้จะได้ว่า

(-1,3) จะสอดคล้องกับ (4) ด้วย

ดังนั้น △ = -1, ⬠ = 3

เพราะฉะนั้นจะได้ $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ เป็นอินเวอร์สของ $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

จะเห็นความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกในเมตริกซ์ที่กำหนดให้ และสมาชิกในอินเวอร์สของเมตริกซ์ที่กำหนดให้ว่าเกิดจากการเปลี่ยนสมาชิกตัวแรก[4] และสมาชิกตัวที่ 4 และเปลี่ยนเครื่องหมายเป็นตรงกันข้ามของสมาชิกตัวที่ 2 และสมาชิกตัวที่ 3

ดังนั้นทฤษฎีนี้จะต้องถูกทดสอบโดยเมตริกซ์อื่น ๆ ตัวอย่างเช่น เมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

เราทดสอบดูจากเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าผลคูณไม่เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

ดังนั้นทฤษฎีนี้ต้องถูกแก้ไขใหม่ เราจะต้องเปลี่ยน 11 ให้เป็น 1

---

[4] เพื่อความสะดวก เขากล่าวถึงสมาชิกของเมตริกซ์ โดย

$$\begin{bmatrix} \text{ตัวที่ } 1 & \text{ตัวที่ } 2 \\ \text{ตัวที่ } 3 & \text{ตัวที่ } 4 \end{bmatrix}$$

ข้อแนะนำคือหารแต่ละสมาชิกของเมตริกซ์อินเวอร์สทดลองด้วย 11

ดังนั้น

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{4}{11} & \frac{5}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

คำถามต่อไปคือทำไมจึงต้องหารด้วย 11 ในกรณีของตัวอย่างที่สองนี้ แต่ไม่จำเป็นต้องหารในกรณีของตัวอย่างแรก

พิจารณาอีกหนึ่งตัวอย่างคือ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ในกรณีนี้เราต้องหารแต่ละสมาชิกในเมตริกซ์อินเวอร์ส ทดลองด้วย 3 จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

คำถามที่ว่าทำไมจึงต้องหารด้วย 3 เราสามารถดูที่เมตริกซ์ที่กำหนดให้ และเราจะคาดคะเนว่าต้องหารด้วยเลขอะไร ในขบวนการของการหาอินเวอร์สได้หรือไม่?

นักเรียนจะคาดคะเนโดยพยายามดูจากทุกตัวอย่างที่ทำไปแล้วอย่างกว้างขวาง วัตถุประสงค์เพื่อที่จะหากฎที่ใช้ได้สำหรับทุกตัวอย่าง

บางทีอาจจำเป็นที่จะต้องทำให้กระจ่างขึ้นสำหรับตัวอย่างที่หนึ่งเปรียบได้กับการหารด้วย 1 หวังอย่างมากว่าจะมีบางคนในชั้นจะชี้ให้เห็นได้ว่าจำเป็นจะต้องหารด้วยผลต่างระหว่างผลคูณของสมาชิกตัวที่หนึ่งกับตัวที่สี่ และผลคูณของตัวที่สองกับตัวที่สาม

ข้อเสนอแนะในการสอนเมตริกซ์

เมื่อศึกษาจากหนังสือ SMSG, SSMCIS และ สสวท. แล้วจะเห็นได้ว่า SMSG เริ่มกล่าวถึงจำนวนต่าง ๆ ต่อจากนั้นจึงกล่าวถึงเมตริกซ์ ประโยชน์ของเมตริกซ์ต่อวิชาต่าง ๆ ส่วน SSMCIS ก็จะกล่าวถึงความสำคัญของเมตริกซ์ และผู้ที่คิดสร้างเมตริกซ์ขึ้นมา ต่อจากนั้นจึงเริ่มเข้าสู่เมตริกซ์ ส่วน สสวท. ไม่ได้กล่าวถึงประโยชน์และความเป็นมาของเมตริกซ์เลย ซึ่งผู้เขียนวิจัยนี้เห็นว่า สสวท. น่าจะเริ่มจากบทนำโดยกล่าวถึงประโยชน์ และความเป็นมาของเมตริกซ์สักเล็กน้อย เพราะผู้เรียนคณิตศาสตร์มักจะมีข้อสงสัยอยู่เสมอว่าเรียนคณิตศาสตร์ไปทำไม คราวนี้ก็อาจจะสงสัยว่าเรียนเมตริกซ์ไปทำไม ซึ่งเมื่อนักเรียนถามเช่นนี้ผู้สอนก็มักจะตอบว่าเรียนไปเพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับสูงต่อไป ซึ่งคงไม่ใช่คำตอบที่ดี เพราะเราต้องยอมรับว่ามีนักเรียนอีกจำนวนมากไม่มีโอกาสเรียนต่อในระดับสูงต่อไป ทำไมจึงต้องรอให้นักเรียนไปเรียนในระดับสูงต่อไปจึงจะเห็นประโยชน์ของมัน และในการให้ผู้เรียนทราบถึงประโยชน์ของวิชาเมตริกซ์ต่อวิชาต่าง ๆ อาจเป็นแรงจูงใจให้นักเรียนอยากเรียนอยากรู้มากยิ่งขึ้น ถึงแม้ว่าจะยังไม่ทราบว่านำไปใช้กับวิชาอื่น ๆ ได้อย่างไรก็อาจเป็นการกระตุ้นให้ผู้เรียนอยากรู้อยากเห็น และศึกษาเพิ่มเติมมากขึ้น

การสอนเรื่องการบวกเมตริกซ์

SMSG เริ่มจากตัวอย่างของจำนวนเชิงซ้อนซึ่งนำมาเขียนแทนด้วยเวคเตอร์หลักแล้วบวกกันนำไปสู่นิยามของการบวก ส่วน SSMCIS และ สสวท. เริ่มจากปัญหาที่นำไปสู่รูปทั่วไปของการบวกได้ดีกว่า ซึ่งปัญหาที่นำมาใช้เพื่อนำไปสู่การบวกเมตริกซ์ของ SSMCIS และ สสวท. มีลักษณะเหมือน ๆ กันดังที่กล่าวมาแล้ว แต่วิธีการจากหนังสือทั้งสามเล่มเป็นวิธีการที่นำไปใช้ในการสอนได้ ขึ้นอยู่กับผู้สอนจะเห็นว่าแบบใดเหมาะสม

การสอนเรื่องการคูณเมตริกซ์

สำหรับการสอนการคูณเมตริกซ์ SMSG และ SSMCIS เริ่มจากตัวอย่างที่นำไปสู่รูปแบบของการคูณเมตริกซ์ได้ชัดเจนดี และรูปแบบดังกล่าวนำไปสู่รูปทั่วไปของการคูณเมตริกซ์ แต่ สสวท. เริ่มจากตัวอย่างที่ขยายไปสู่รูปทั่วไป ซึ่งวิธีการดังกล่าวเป็นการขยายความคิดไปสู่รูปทั่วไป แต่วิธีการของ SMSG และ SSMCIS ก็คงไม่ทำให้ผู้เรียนเกิดความสับสนแต่ประการใด การสอนจึงขึ้นอยู่กับผู้สอนจะเห็นว่าแบบใดเหมาะสมและเลือกนำไปใช้

การสอนเรื่องสมการเชิงเส้นและเมตริกซ์

การสอนสมการเชิงเส้นของ SSMCIS จะเริ่มจากแสดงให้เห็นว่าสำหรับสมการเชิงเส้นต่าง ๆ เมื่อใช้ตัวคงที่ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์คูณตลอดจะไม่ทำให้คำตอบของสมการเปลี่ยนแปลงไป และได้แสดงการกระทำเบื้องต้นของแถวว่าทำได้อย่างไรบ้างต่อจากนั้นจึงแสดงให้เห็นว่าคำตอบของระบบเดิมกับระบบใหม่ที่สมมูลย์กันนั้นมีคำตอบเดียวกัน แล้วจึงสรุปเป็นกฎเกณฑ์

สำหรับ SMSG จะแสดงตัวอย่างการแก้สมการ ต่อจากนั้นจึงสรุปกฎเกณฑ์ออกมาสามข้อ ซึ่งกฎเกณฑ์ทั้งสามข้อก็นำมาใช้เลย โดยไม่มีการตั้งเป็นกฎเกณฑ์ หรือทฤษฎีมาก่อนว่าเป็นจริง

และหนังสือ สสวท. ได้ให้เป็นกฎเกณฑ์ของการแก้สมการทันทีแล้วนำกฎเกณฑ์ไปใช้เมื่อเขียนสมการเชิงเส้นในรูปเมตริกซ์

จะเห็นได้ว่าวิธีการของ SMSG และ สสวท. ผู้เรียนจะต้องมีความรู้และความเข้าใจกฎเกณฑ์การแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นมาก่อน แล้วแต่ SSMCIS จะพยายามทำให้ผู้เรียนเข้าใจกฎเกณฑ์และหลักการแก้สมการเชิงเส้นเสียก่อน จึงจะนำไปสู่การแก้สมการในแบบโฮโมจีเนียสและนอนโฮโมจีเนียสต่อไป

โดยปกติการเรียนเรื่องสมการเชิงเส้น ผู้เรียนมักจะทราบว่าจะทำอย่างไรจึงจะหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ได้ โดยอาจไม่ทราบว่าทำอย่างนั้นได้อย่างไร และมีกฎเกณฑ์อย่างไรในการทำอย่างนั้น และสำหรับกฎเกณฑ์ที่ SSMCIS ได้กล่าวไว้ก็ไม่ได้พิสูจน์ให้เห็นจริง แต่ได้ยกตัวอย่างแล้วสรุปเป็นกฎเกณฑ์ ฉะนั้นผู้วิจัยจึงได้เขียนเอาไว้ในบทที่ 6 เพื่อให้ผู้สอนนำไปใช้เพิ่มเติมหรือขยายความเข้าใจแก่ผู้เรียนให้เข้าใจแจ่มแจ้งยิ่งขึ้น

การสอนเรื่องการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์

จากหัวข้อ 5.4 จะเห็นว่าวิธีการดังกล่าวเป็นการหาเซ็ตคำตอบของแต่ละประโยค แล้วดูคำตอบที่สอดคล้องกันของประโยคทั้งสอง ถ้าจะใช้สอนในระดับมัธยมต้นก็น่าจะทำได้ และคงจะได้ผลดี แต่นักเรียนอาจเกิดปัญหาในกรณีที่ผลต่างของผลคูณของสมาชิกตัวที่หนึ่งกับตัวที่สี่ และตัวที่สองกับตัวที่สามเป็นศูนย์ (กรณีนี้อาจเกิดขึ้นถ้าผู้สอนให้ผู้เรียนคิดตัวอย่างเอง) นักเรียนอาจพยายามหาเซ็ตคำตอบของแต่ละประโยคเป็นจำนวนมาก เพื่อจะหาคู่ซึ่งสอดคล้องกับทั้งสองประโยค ซึ่งไม่มีคำตอบดังกล่าว โดยที่อาจไม่ทราบว่าระบบสมการดังกล่าวไม่มีคำตอบ

ฉะนั้นถ้าจะนำวิธีดังกล่าวนี้มาให้ผู้เรียนศึกษาและหากฎเกณฑ์ จะต้องเน้นเสียก่อนว่าไม่ใช่ทุกเมตริกซ์ที่มีอินเวอร์ส ในขั้นเริ่มต้นหากฎเกณฑ์ผู้สอนอาจจะใช้วิธียกตัวอย่างเฉพาะเมตริกซ์ที่มีอินเวอร์ส หรือให้นักเรียนช่วยคิดตัวอย่างก็ได้ แต่ในกรณีที่นักเรียนคิดตัวอย่างเอง ถ้านักเรียนคิดตัวอย่างที่ไม่มีอินเวอร์สก็ให้เขียนตัวอย่างดังกล่าวไว้ด้วย แต่จะชอนำมาพิจารณาภายหลัง และเมื่อได้กฎเกณฑ์แล้วจึงนำมาพิจารณาว่าทำไมจึงไม่มีอินเวอร์ส หรือหาข้อสรุปว่าเมื่อใดเมตริกซ์จึงไม่มีอินเวอร์ส

สำหรับการหาอินเวอร์สโดยทั่ว ๆ ไปมักใช้ความรู้ในเรื่องการแก้ระบบสมการเชิงเส้น และการกระทำเบื้องต้นกับแถว เมื่อนักเรียนมีความรู้ในเรื่องการแก้ระบบสมการเชิงเส้น และการกระทำเบื้องต้นกับแถวดีแล้ว การเรียนเรื่องอินเวอร์สของเมตริกซ์ก็กระทำได้โดยง่าย.
