บทที่ 6
แนวการสอนเมตริกซ์และระบบสมการเชิงเส้น

ในบทนี้ ผู้วิจัยจะเสนอแนวการสอนเรื่องการบวกเมตริกซ์ การคูณเมตริกซ์ ระบบสมการเชิงเส้นและการกระทำเบื้องต้น และอินเวอร์สของเมตริกซ์ ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อให้ผู้สอนได้เห็นวิธีการต่าง ๆ มากยิ่งขึ้น เพื่อนำไปใช้ปรับปรุงแนวการสอน หรือเป็นแนวทางสำหรับผู้สอนในการสร้างแบบการสอน (Module) ให้สมบูรณ์แบบยิ่งขึ้นในเรื่องต่าง ๆ เพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอน

6.1 การบวกเมตริกซ์

ผลิตผลของเห็ด

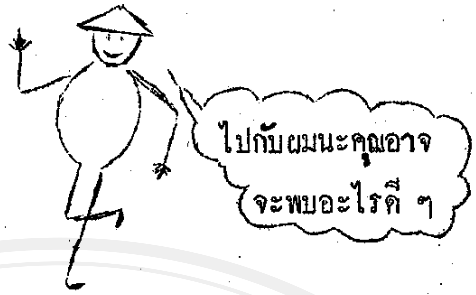
การเพาะเห็ดเป็นอาชีพอย่างหนึ่ง ที่เกษตรกรกำลังให้ความสนใจ นายดำริเป็นผู้หนึ่งที่มีความสนใจ เขาทำการเพาะเห็ด และมีเห็ดส่งออกตลาดในเดือนเมษายนถึงเดือนมิถุนายน ดังต่อไปนี้

เมษายน เห็ดฟาง 150 ก.ก. เห็ดหูหนู 145 ก.ก.
เห็ดเป๋าฮื้อ 210 ก.ก.

พฤษภาคม เห็ดฟาง 180 ก.ก. เห็ดหูหนู 169 ก.ก.
เห็ดเป๋าฮื้อ 202 ก.ก.

มิถุนายน เห็ดฟาง 195 ก.ก. เห็ดหูหนู 130 ก.ก.
เห็ดเป๋าฮื้อ 110 ก.ก.

การรายงานผลผลิต
จะดูง่ายขึ้น ถ้าเขียนอยู่ในรูป
ตารางดังนี้



น้ำหนัก (ก.ก) / เดือน	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ
เมษายน	150	145	210
พฤษภาคม	180	169	202
มิถุนายน	195	130	110

ถ้านำเฉพาะตัวเลขดังกล่าวมาเขียนไว้ในวงเล็บโดยไม่เขียน
หัวเรื่อง จะได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 150 & 145 & 210 \\ 180 & 169 & 202 \\ 195 & 130 & 110 \end{pmatrix}$$

ผลิตผลของนายบุญช่วย

	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ
เมษายน	150	80	78
พฤษภาคม	115	87	87

$$\begin{pmatrix} 150 & 80 & 78 \\ 115 & 87 & 87 \end{pmatrix}$$

ผลิตผลของนายเทียม

	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ	เห็ดนางรม
เมษายน	150	110	90	45

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 150 & 110 & 90 & 45 \end{pmatrix}$$

ผลิตผลของนายแสง

	เห็ดฟาง
เมษายน	150
พฤษภาคม	210
มิถุนายน	195
กรกฎาคม	175

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 150 \\ 210 \\ 195 \\ 175 \end{pmatrix}$$

ผลิตผลของนายมงคล

	เห็ดฟาง
เมษายน	85

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 85 \end{pmatrix}$$

คุณเห็นไหมว่า แต่ละอันมีลักษณะแตกต่างกันไป

พิจารณาดูซิ .....

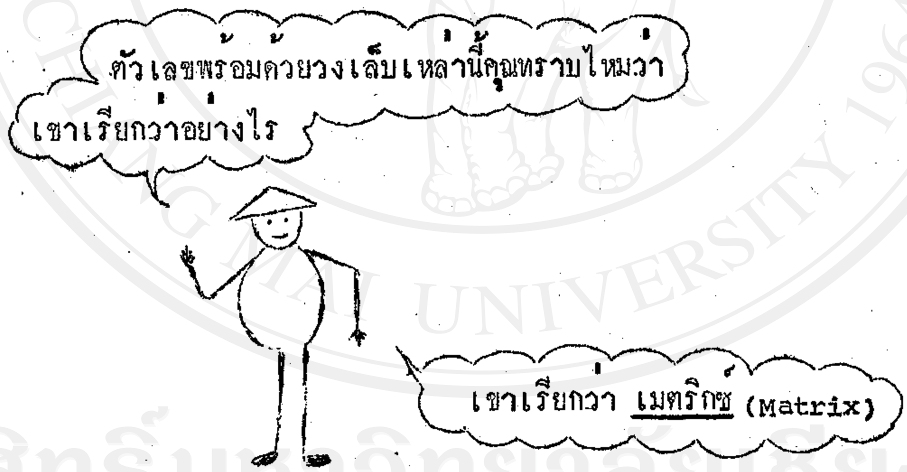
แต่ละจำนวนจะเรียงเป็นแถว (rows) และหลัก (columns) ปิดล้อมด้วยเครื่องหมายวงเล็บ

$$\begin{pmatrix} 150 & 145 & 210 \\ 180 & 169 & 202 \\ 195 & 130 & 110 \end{pmatrix}$$ มีสามแถวและสามหลัก

$$\begin{pmatrix} 150 & 80 & 78 \\ 115 & 87 & 87 \end{pmatrix}$$ มีสองแถว สามหลัก

$$\begin{pmatrix} 150 & 110 & 90 & 45 \end{pmatrix}$$ มีหนึ่งแถว สี่หลัก

$$\begin{pmatrix} 150 \\ 210 \\ 195 \\ 175 \end{pmatrix}$$ มีสี่แถว หนึ่งหลัก



คุณเข้าใจวิธีเขียนเมตริกซ์หรือยัง.....เอาล่ะ ก่อนที่เราจะผ่านไป เรามาลองทบทวนดูเล็กน้อย

ทำด้วยตัวคุณเอง

อย่าเขียนในหนังสือนี้นะจ๊ะ !

นายกัง

	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู
มกราคม	410	112
กุมภาพันธ์	520	118

เมื่อคุณเห็นจุด ๆ อย่างนี้ คุณจะต้องใส่ตัวเลขลงไปให้ครบอย่างนี้

$$\begin{bmatrix} 410 & 112 \\ 520 & 118 \end{bmatrix}$$

มี สอง แถว สอง หลัก

นายสน

	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู
มีนาคม	480	115
เมษายน	320	220
พฤษภาคม	145	127

$$\begin{bmatrix} 480 & \dots \\ \dots & 220 \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

มี .... แถว .... หลัก

นายสว่าง

	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ
มกราคม	115	75	15
กุมภาพันธ์	120	35	25
มีนาคม	95	40	10

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 115 & \dots & \dots \\ \dots & 35 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

มี .... แถว .... หลัก

นายสงบ

	เห็ดฟาง
มกราคม	51
กุมภาพันธ์	75
มีนาคม	37
เมษายน	45

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 51 \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \\ \cdot\cdot \end{pmatrix}$$

มี .... แถว .... หลัก

นายบรรเลง

	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดนางรม
มกราคม	150	45	37

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \dots & \dots & 37 \end{pmatrix}$$

มี .... แถว .... หลัก

ถ้าคุณทำไปด้วยความไม่แน่ใจ ลองกลับไปอ่านตอนต้นดูใหม่อีกครั้ง... แต่ถ้าคุณทำได้ถูกต้องแล้ว .. คุณลองติดตามผมต่อไปซิ .. ไปรู้จักเพื่อนของผมเขาจะแนะนำตัวให้คุณรู้จัก ...

<u>แนะนำเพื่อนใหม่</u>

ใคร ๆ เรียกฉันว่าเมตริกซ์

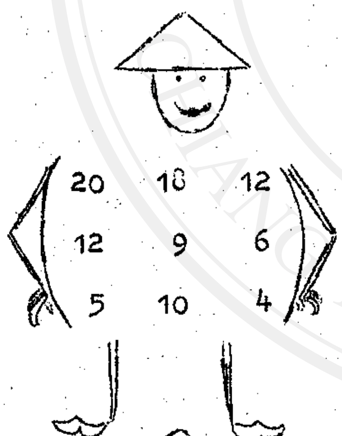
ฉันมีสองแถว และ สองหลัก

เมื่อฉันมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก

ใคร ๆ จึงเรียกฉันว่า " เมตริกซ์จัตุรัส "

ในกรณีนี้ฉันเป็น (2 × 2) เมตริกซ์

(อ่านว่าสองบายสองเมตริกซ์)



ฉันเป็นเมตริกซ์จัตุรัสเหมือนกัน,

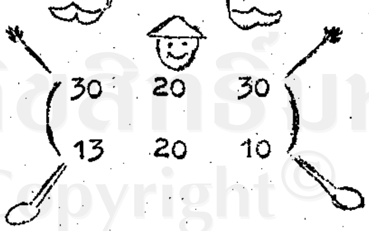
ทำไมหรือ ?

ฉันมีแถว<u>สามแถว</u>

มีหลัก <u>สามหลัก</u>

ดังนั้นฉันเป็น (3 × 3) เมตริกซ์

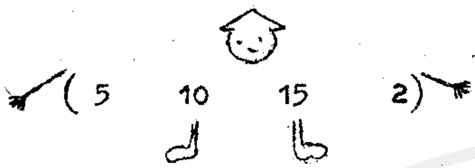
และเรียกว่า <u>มีอันดับ</u> 3 × 3



ฉันเป็น (2 × 3) เมตริกซ์

(สองแถวและสามหลัก)

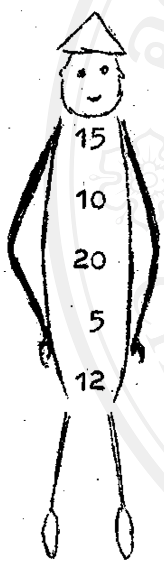
และมีอันดับเท่ากับ ..2.. × ..3..



ฉันมีลักษณะพิเศษ
ใคร ๆ เรียกฉันว่า
<u>เมตริกซ์แถว</u> (row matrix)
เนื่องจากฉันมี 1 แถวและ 4 หลัก

ดังนั้นจึงเรียกว่า (1 × 4) เมตริกซ์
คุณสามารถบอกอันดับของฉันได้หรือไม่

...... x ....



ฉันก็มีลักษณะพิเศษเหมือนกัน ใคร ๆ เรียกฉันว่า
<u>เมตริกซ์หลัก</u> (column matrix)
ฉันมี 5 แถว และ 1 หลัก
ดังนั้นจึงเรียกว่า (5 × 1) เมตริกซ์
ฉันมีอันดับเท่าใด ?

...... x ......

เสียใจ ! สมาชิกทั้งหมดของฉันเป็นศูนย์ ใคร ๆ จึงเรียกฉันว่า <u>เมตริกซ์ศูนย์</u> (zero matrix)

6.1.3 <u>การรวมผลิตผล</u>

คุณคงอยากรู้จักอะไร ๆ อีกใช่ไหม ผมจะพาคุณไปดูรายงานผลิตผลของเกษตรกรที่เกี่ยวกับเห็ดกันดีกว่า

รายงานปริมาณเห็ดที่นายมืดและนายดินเพาะได้ ดังนี้

	นายมืด			นายดิน		
	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ
มกราคม	20	7	5	25	17	15
กุมภาพันธ์	12	9	12	15	9	2

คุณทราบไหมว่า ทั้งสองคนผลิตเห็ดแต่ละประเภทในแต่ละเดือนรวมกันได้เท่าไร ?

แน่นอนละ คำตอบที่ได้ก็คือ

	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ		เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ
มกราคม	20 + 25	7 + 17	5 + 15	หรือ	45	24	20
กุมภาพันธ์	12 + 15	9 + 9	12 + 2		27	18	14

ถ้าเขียนในรูปเมตริกซ์จะได้

$$\begin{pmatrix} 20 & 7 & 5 \\ 12 & 9 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 17 & 15 \\ 15 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20+25 & 7+17 & 5+15 \\ 12+15 & 9+9 & 12+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 45 & 24 & 20 \\ 27 & 18 & 14 \end{pmatrix}$$

(2 x 3) + (2 x 3) → (2 x 3)

นายมณฑลและนายสงกรานต์เพาะเห็ดได้ดังนี้

	นายมณฑล		นายสงกรานต์	
	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู
กุมภาพันธ์	15	10	20	17

ทั้งสองเพาะเห็ดแต่ละชนิดได้รวมกันเป็น

$$(15 \quad 10) + (20 \quad 17) = (25 \quad 27)$$

(1 x 2) + (1 x 2) → (1 x 2)

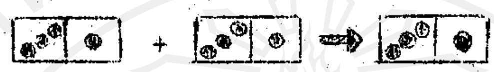
นายกระแสและนายเกรียงศักดิ์ เพาะเห็ดฟางได้ดังนี้

	นายกระแส	นายเกรียงศักดิ์
มกราคม	20	30
กุมภาพันธ์	25	25
มีนาคม	30	27

เห็ดฟางรวมในแต่ละเดือนของคนทั้งสอง

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 \\ 25 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 57 \end{pmatrix}$$

(3 x 1) (3 x 1) (3 X1)



นายกำจร

	เป๋าฮื้อ	นางรม
มกราคม	50	45

นายวันชัย

	ฟาง
มกราคม	50
กุมภาพันธ์	52
มีนาคม	49

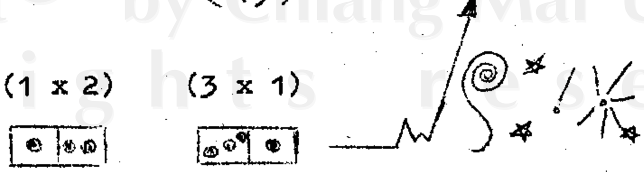
เขียนเป็นเมตริกซ์ได้

$$(50 \quad 45) \quad \text{และ} \quad \begin{pmatrix} 50 \\ 52 \\ 49 \end{pmatrix}$$

ผลบวกของเมตริกซ์ทั้งสองเป็นเท่าใด ?

$$(50 \quad 45) + \begin{pmatrix} 50 \\ 52 \\ 49 \end{pmatrix} = \text{ไม่มีคำตอบ}$$

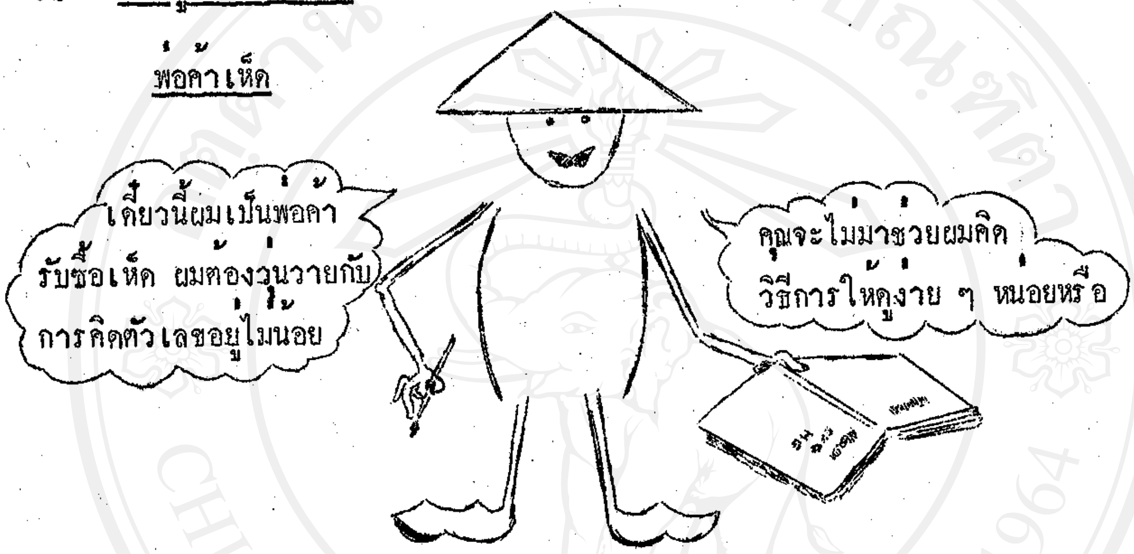
(1 x 2) (3 x 1)



คุณทราบไหมว่า การบวกเมตริกซ์จะทำได้เฉพาะเมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากันเท่านั้น และการบวกจะบวกสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน

6.2 การคูณของเมตริกซ์

พ่อค้าเห็ด



วันอาทิตย์ผมซื้อเห็ดมาจากเมือง ก. เป็นจำนวนดังนี้

	เห็ดฟาง (ก.ก.)	เห็ดหูหนู (ก.ก.)	เห็ดเป่าฮื้อ (ก.ก.)
เมือง ก.	5	10	5

	ราคา (บาท)
เห็ดฟาง	20
เห็ดหูหนู	25
เห็ดเป่าฮื้อ	30

ผมจะต้องจ่ายเงินในวันอาทิตย์

$$5 \times 20 + 10 \times 25 + 5 \times 30 = 500 \text{ บาท}$$

จากรายการดังกล่าว ถ้าเขียนเป็นเมตริกซ์จะได้ดังนี้

เมตริกซ์ของเห็ด

$$\begin{bmatrix} 5 & , & 10 & , & 5 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ของราคา

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix}$$

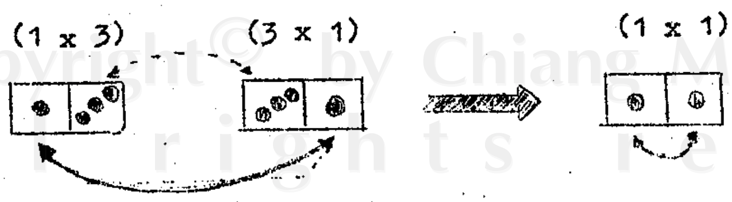
เมตริกซ์ของรายจ่าย

$$\begin{bmatrix} 500 \end{bmatrix}$$

ถ้ากำหนดการกระทำของเมตริกซ์ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5 \times 20) + (10 \times 25) + (5 \times 30) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 500 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$



วันจันทร์ ผมซื้อเห็ดจากเมือง ก. และเมือง ข. มาดังนี้

	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ
เมือง ก.	5	10	5
เมือง ข.	10	5	2

	ราคา
เห็ดฟาง	20
เห็ดหูหนู	25
เห็ดเป๋าฮื้อ	30

ผมต้องจ่ายเงินดังนี้

เมือง ก. $(5 \times 20) + (10 \times 25) + (5 \times 30) = 500$ บาท

เมือง ข. $(10 \times 20) + (5 \times 25) + (2 \times 30) = 385$ บาท

เขียนเป็นเมตริกซ์ได้ดังนี้

เมตริกซ์ของเห็ด

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{เมือง ก.} \\ \text{เมือง ข.} \end{array} \end{array}$$

เมตริกซ์ของราคา

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix}$$

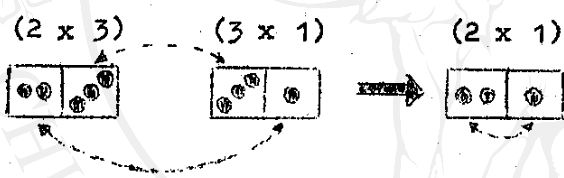
เมตริกซ์ของรายจ่าย

$$\begin{bmatrix} 500 \\ 385 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{เมือง ก.} \\ \text{เมือง ข.} \end{matrix}$$

เมื่อกำหนดการกระทำในลักษณะเดิมจะได้

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5 \times 20) + (10 \times 25) + (5 \times 30) \\ (10 \times 20) + (5 \times 25) + (2 \times 30) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 500 \\ 385 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$



นั่นคือ รายจ่ายของเมือง ก. ได้จากผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถวที่ 1 ของเมตริกซ์แรก กับสมาชิกที่สมนัยกันในหลักของเมตริกซ์ที่สอง

รายจ่ายของเมือง ข. ได้จากผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถวที่ 2 ของเมตริกซ์แรกกับสมาชิกที่สมนัยกันในหลักของเมตริกซ์ที่สอง

วันอังคารซื้อเห็ดแต่ละชนิดเป็นสองราคา คือ เห็ดคุณภาพดีซื้อราคาหนึ่งและเห็ดคุณภาพรอง ซื้ออีกราคาหนึ่ง โดยซื้อคุณภาพดีและคุณภาพรองของเห็ดแต่ละชนิดในจำนวนน้ำหนักเท่ากัน ดังนี้

	เห็ดฟาง	เห็ดหูหนู	เห็ดเป๋าฮื้อ
เมือง ก.	5	10	5
เมือง ข.	10	5	2

	คุณภาพดี ราคา	คุณภาพรอง ราคา
เห็ดฟาง	25	20
เห็ดหูหนู	30	25
เห็ดเป๋าฮื้อ	35	30

ผมต้องจ่ายเงินดังนี้

เห็ดคุณภาพดี

เมือง ก. $(5 \times 25 + 10 \times 30 + 5 \times 35) = 600$

เมือง ข. $(10 \times 25 + 5 \times 30 + 2 \times 35) = 470$

เห็ดคุณภาพรอง

เมือง ก. $(5 \times 20 + 10 \times 25 + 5 \times 30) = 500$

เมือง ข. $(10 \times 20 + 5 \times 25 + 2 \times 30) = 385$

เขียนเป็นเมตริกซ์ได้ดังนี้

เมตริกซ์ของเห็ด

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{เมือง ก.} \\ \text{เมือง ข.} \end{array} \end{array}$$

เมตริกซ์ของราคา

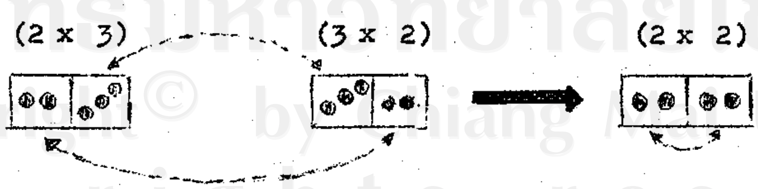
$$\begin{array}{cc} \text{คุณภาพดี} & \text{คุณภาพรอง} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 30 & 25 \\ 35 & 30 \end{pmatrix}$$

เมตริกซ์ของรายจ่าย

$$\begin{array}{cc} \text{คุณภาพดี} & \text{คุณภาพรอง} \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 600 & 500 \\ 470 & 385 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{เมือง ก.} \\ \text{เมือง ข.} \end{array} \end{array}$$

เมื่อกำหนดการกระทำในลักษณะเดิมจะได้

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 25 & 20 \\ 30 & 25 \\ 35 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 500 \\ 470 & 385 \end{pmatrix} \quad \text{..........(iii)}$$



จะได้ว่า 600 ได้จาก $(5 \times 25) + (10 \times 30) + (5 \times 35)$

500 ได้จาก $(5 \times 20) + (10 \times 25) + (5 \times 30)$

470 ได้จาก $(10 \times 25) + (5 \times 30) + (2 \times 35)$

385 ได้จาก $(10 \times 20) + (5 \times 25) + (2 \times 30)$

จาก (iii) เมื่อ แทนเมตริกซ์รายจ่ายด้วย

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

โดยที่ a_{11} หมายถึงสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 1

นั่นคือ $a_{11} = 600$

a_{12} หมายถึง สมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 2

นั่นคือ $a_{12} = 500$

สำหรับ a_{21} และ a_{22} คุณคงบอกได้เช่นเดียวกัน

ดังนั้น

a_{11} ได้จาก $(5 \times 25) + (10 \times 30) + (5 \times 35)$

a_{12} ได้จาก $(5 \times 20) + (10 \times 25) + (5 \times 30)$

a_{21} ได้จาก $(10 \times 25) + (5 \times 30) + (2 \times 35)$

a_{22} ได้จาก $(10 \times 20) + (5 \times 25) + (2 \times 30)$

พิจารณาให้ดีคุณอาจเห็นได้ว่าตัวเลขที่ห้อยอยู่ข้างล่างทางขวาของ a เช่น a_{21} นอกจากบอกตำแหน่งของสมาชิกตัวดังกล่าวแล้ว ยังบอกอะไรให้ทราบได้อีก

a_{21} จะบอกให้เราทราบว่า ได้จากผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถวที่ 2 ของเมตริกซ์แรกกับ สมาชิกในหลักที่ 1 ของเมตริกซ์ที่สอง

a_{22} จะบอกให้ทราบว่าได้จากผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถวที่ 2 ของเมตริกซ์แรกกับสมาชิกในหลักที่ 2 ของเมตริกซ์ที่สอง

คุณช่วยบอกผมบ้างซิว่า

a_{11} ได้จากผลบวกของ ....

....

....

a_{12} ได้จากผลบวกของ ....

....

....

การกระทำดังกล่าวแล้วในข้อ (i), (ii) และ (iii) คุณทราบไหมว่าเขาเรียกว่าอย่างไร ?

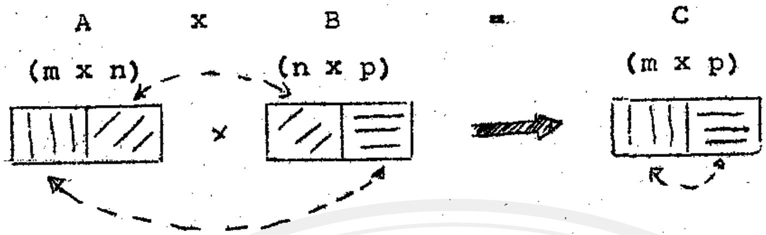
การกระทำดังกล่าวเรียกว่า " การคูณของเมตริกซ์ "

จาก (i), (ii) และ (iii) จะเห็นได้ว่า การคูณของเมตริกซ์กำหนดขึ้นเมื่อ

(1) จำนวนหลักของเมตริกซ์แรกเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ที่สอง

(2) เมตริกซ์ผลคูณที่ได้จะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์แรก และจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของเมตริกซ์ที่สอง

ฉะนั้น ถ้าเราจะเขียนรูปแบบของการคูณของเมตริกซ์จากที่กล่าวมาแล้วจะสรุปได้ดังนี้



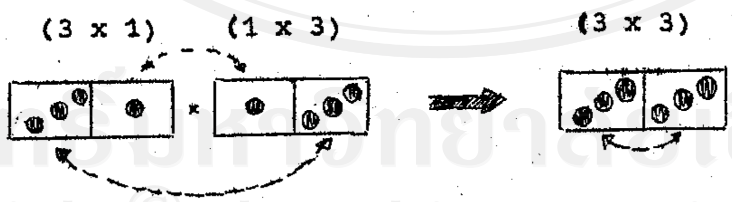
เมื่อ c_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j ของ C จะได้ว่า

c_{ij} เกิดจากผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถวที่ i ของ A กับสมาชิกที่สมนัยกันในหลักที่ j ของ B

เมื่อกำหนดการคูณของเมตริกซ์เช่นนี้แล้ว ลองมาพิจารณาดูซิว่า เมื่อเราสลับเมตริกซ์ที่หนึ่งกับเมตริกซ์ที่สอง เมตริกซ์ผลคูณที่ได้จะเปลี่ยนไปหรือไม่ ?

จาก (i) เมื่อสลับเมตริกซ์ที่หนึ่งกับเมตริกซ์ที่สองจะได้ผลคูณของเมตริกซ์ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} = C$$



เมื่อให้ C เป็นเมตริกซ์ผลคูณ

เนื่องจากเมตริกซ์แรกมีหลักเดียวและเมตริกซ์ที่สองมีแถวเดียว ดังนั้นจะได้

$$c_{11} = 20 \times 5 = 100$$

20 มาจากแถวที่ 1 และ 5 มาจากหลักที่ 1

$$c_{12} = 20 \times 10 = 200$$

20 มาจาก แถวที่ 1 และ 10 มาจากหลักที่ 2

$$c_{13} = 20 \times 5 = 100$$

20 มาจากแถวที่ 1 และ 5 มาจากหลักที่ 3

$$c_{32} = 30 \times 10 = 300$$

30 มาจาก แถวที่ 3 และ 10 มาจากหลักที่ 2

สำหรับสมาชิกอื่น ๆ คุณคงช่วยผมตอบได้แล้ว ว่าได้มาอย่างไร ? โดยใส่ช่องว่างต่าง ๆ ให้ครบ

c_{21} = ...2.... x .... = ...

c_{22} = ... x ....10.... = ...

c_{23} = ... x .... = ...

c_{31} = ... x .... = ...

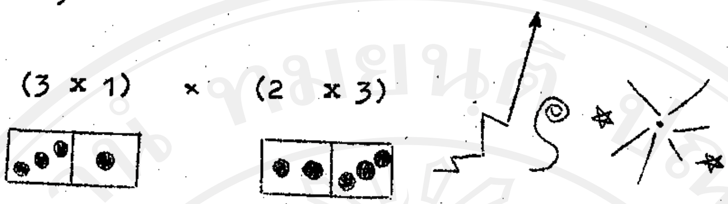
c_{32} = ... x .... = ...

เพราะฉะนั้น $C = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 100 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 300 & \ldots \end{bmatrix}$

จาก (ii) เมื่อสลับเมตริกซ์แรกกับเมตริกซ์ที่สองจะได้

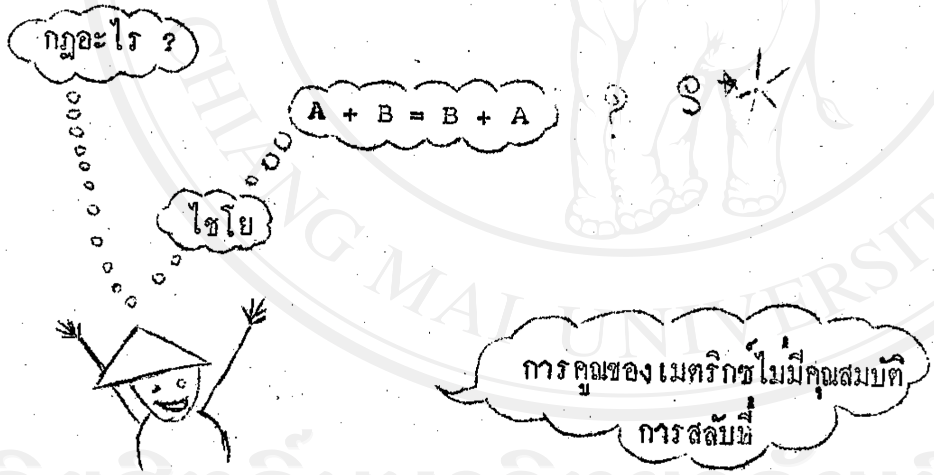
$$\begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 10 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \text{ไม่มีคำตอบ}$$

(3 x 1) × (2 x 3)



เพราะว่าจำนวนแถวของเมตริกซ์ที่หนึ่งไม่เท่ากับจำนวนหลักของเมตริกซ์ที่สอง

เมื่อถึงตอนนี้ เราคงสรุปกฎอะไรได้อย่างหนึ่งใช่ไหม ?



6.3 ระบบสมการเชิงเส้นและการกระทำเบื้องต้น

สมการเชิงเส้น

จากที่เคยได้เรียนมาแล้ว คงจำได้ว่า สมการของเส้นตรงอยู่ในรูป

$$ax + by = c$$

เรียก x, y ว่าตัวแปร

เรียก a, b ว่าสัมประสิทธิ์ของ x และ y ตามลำดับ

และ เรียก c ว่าตัวคงที่

สมการดังกล่าวเรียกว่า สมการเชิงเส้น

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างสามตัวอย่างของสมการเชิงเส้นที่อยู่ในรูปดังกล่าว คือ

$$A_1 : 2x + 3y = 6$$

$$B_1 : x - y = -\frac{1}{2}$$

$$C_1 : \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 12$$

ถ้าคูณสมการต่าง ๆ ด้วยจำนวนที่ไม่เท่ากับศูนย์ เช่น

คูณสมการ A_1 ด้วย 3 สมการที่ได้เรียก $3A_1$

คูณสมการ B_1 ด้วย 2 สมการที่ได้เรียก $2B_1$

คูณสมการ C_1 ด้วย (-4) สมการที่ได้เรียก $-4C_1$

จะได้

$$3A_1 : 6x + 9y = 18$$

$$2B_1 : 2x - 8y = -1$$

$$-4C_1 : -3x - 2y = -48$$

ถ้าแทนค่า x ด้วย 0 และแทนค่า y ด้วย 2 ใน A_1 จะได้

$2(0) + 3(2) = 6$ ซึ่งข้อความนี้เป็นจริง เรากล่าวว่า $(x, y) = (0, 2)$ สอดคล้อง กับ A_1 และถ้าเราแทนค่า x และ y ดังกล่าวใน $3A_1$ จะได้

$6(0) + 9(2) = 18$ ซึ่งข้อความนี้เป็นจริงด้วย

ฉะนั้น $(x,y) = (0, 2)$ สอดคล้องกับ $3A_1$ ด้วย

ค่าของทุกคู่ลำดับที่สอดคล้องกับสมการ เช่น A_1 เรียกว่า เซ็ตคำตอบของสมการ

แต่ในกรณีที่ (1, 2) ไม่สอดคล้องกับ A_1 เพราะว่า เมื่อแทน $x = 1$ และ $y = 2$ ใน A_1 จะได้

$2(1) + 3(2) = 8 \neq 6$

จะได้ว่า (1, 2) ไม่สอดคล้องกับ $3A_1$ ด้วย เพราะว่า

$6(1) + 9(2) = 24 \neq 18$

ระบบสมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้นกลุ่มหนึ่ง เรียกว่า ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations)

ต่อไปนี้เป็นระบบสมการเชิงเส้นสามระบบ คือ ระบบ A, B และ C

$$A \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

$$B \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$C \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + 6y = 24 \end{cases}$$

จากระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวนี้ ประกอบด้วยตัวแปรสองตัว

สังเกตว่า ระบบสมการจริง ๆ แล้วจะเป็นประโยคที่เชื่อมกันด้วย " และ " ตัวอย่างเช่น

$$2x + y = 8$$
$$2x - y = 0$$

หมายถึง

$2x + y = 8$ และ $2x - y = 0$

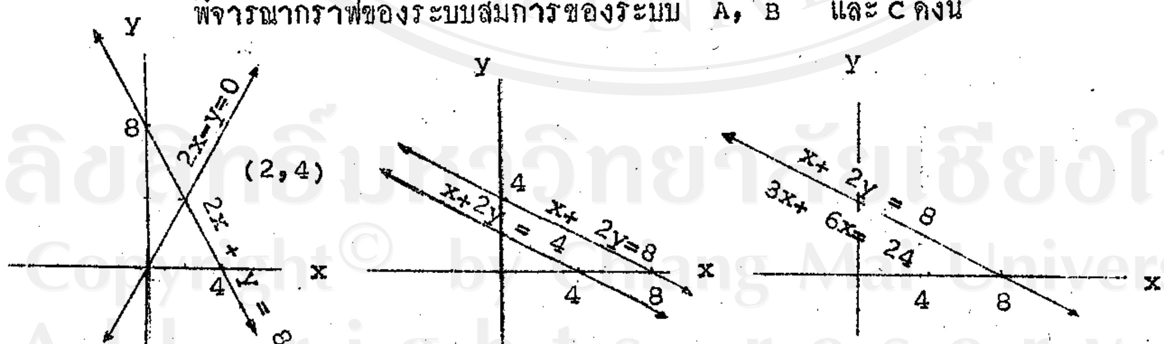
เมื่อ $x \varepsilon R$ และ $y \varepsilon R$ (หมายถึง x และ y เป็นสมาชิกของจำนวนจริง)

ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับ

$2x - y = 0$ และ $2x + y = 8$

นั่นคือ เราสามารถสลับสมการสองสมการของระบบใด ๆ ได้

พิจารณากราฟของระบบสมการของระบบ A, B และ C ดังนี้



$$A \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad B \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \quad C \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + 6y = 24 \end{cases}$$

รูปที่ 1

ระบบ A : เส้นกราฟตัดกัน และมีจุดร่วมกันหนึ่งจุด

ระบบ B : กราฟขนานกันจะไม่มีจุดร่วมกัน

ระบบ C : กราฟทับกัน ฉะนั้นทุก ๆ จุดของกราฟจะร่วมกัน

ในการแก้ปัญหาระบบสมการ เราต้องตรวจสอบทุกคู่ลำดับที่สอดคล้องกับทุกสมการของระบบ คู่ลำดับที่สอดคล้องกับทุกสมการของระบบ เรียกว่า " คำตอบของระบบ " เซ็ตของคำตอบเรียกว่า เซ็ตของคำตอบของระบบ และระบบมีคำตอบก็ต่อเมื่อมีคำตอบที่สอดคล้องกับทุกสมการ

จากกราฟในรูปที่ 1 เราสามารถหาเซ็ตคำตอบของทั้งสามระบบได้ คือ

กราฟของสมการในระบบ A ตัดกันที่จุด (2, 4) เราสามารถตรวจสอบว่า (2, 4) สอดคล้องกับทั้งสองสมการ คือ

$2x + y = 8$	$2x - y = 0$
$2 \times 2 + 4 \overset{?}{=} 8$	$2 \times 2 - 4 \overset{?}{=} 0$
$4 + 4 = 8$ ✓	$4 - 4 = 0$ ✓

ไม่มีคู่ลำดับอื่น ๆ ที่สอดคล้องกับทั้งสองสมการ เพราะว่าไม่มีจุดอื่น ๆ นอกจาก (2, 4) อยู่บนทั้งสองกราฟ

ดังนั้นเซ็ตคำตอบของระบบ A มีเพียงหนึ่งคู่ลำดับคือ {(2, 4)}

กราฟของสมการในระบบ B ขนานกัน ดังนั้นเซ็ตคำตอบของระบบนี้เป็น เซ็ตว่าง (empty set)

พิสูจน์ว่าระบบ B ไม่มีคำตอบ

ขั้นแรก เปลี่ยนแต่ละสมการของระบบไปสู่รูป slope-intercept ($y = mx + c$) จะได้สมการ

$$y = -\frac{1}{2}x + 2$$

และ

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

ขั้นที่สอง สมมุติว่าสมการเหล่านี้มีคำตอบร่วม (common solution) เป็น (a, b)

จากข้อสมมุตินี้จะได้ว่า

$$b = -\frac{1}{2}a + 2$$

และ

$$b = -\frac{1}{2}a + 4$$

นั่นคือ $-\frac{1}{2}a + 2 = -\frac{1}{2}a + 4$

$2 = 4$ ซึ่งเป็นเท็จ

ดังนั้นข้อสมมุติที่ว่าระบบ B มีคำตอบจึงขัดแย้ง นั่นคือ ระบบ B ไม่มีคำตอบ หรือ กล่าวว่าระบบ B มีเซ็ตคำตอบเป็นเซ็ตว่าง

กราฟของสมการในระบบ C ทับกันสนิท (coincide) ดังนั้นเซ็ตคำตอบของระบบนี้เป็นเซ็ตอนันต์ (infinite set) ของคู่ลำดับ

$$\{(x,y) \mid y = -\frac{1}{2}x + 4; \ x,y \in R\}$$

เราสามารถบอกได้ว่า สมการของระบบนี้ต้องเป็นเส้นเดียวกัน เช่น สังเกตจากกราฟ ซึ่งรูปของ slope intercept ($y = mx + C$) ของแต่ละสมการนี้เป็น

$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

ดังนั้น จึงเขียนอยู่ในรูปทั่วไปได้ดังคุณสมบัติต่อไปนี้

คุณสมบัติข้อ 1

สำหรับสมการเชิงเส้น $ax + by = c$ และ $kax + kby = kc$ เมื่อ $k \neq 0$ จะมีกราฟเป็นเส้นเดียวกัน นั่นคือ มีเซ็ตคำตอบเหมือนกัน โดยมี Slope intercept เป็น $y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x$

ประโยชน์ที่ได้จากคุณสมบัติข้อ 1 ก็คือ การทำให้สัมประสิทธิ์ของ x หรือสัมประสิทธิ์ของ y ในสมการเชิงเส้นเป็น 1 (หรือจำนวนอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ศูนย์) โดยที่ไม่ทำให้เซ็ตคำตอบของสมการเปลี่ยนไป ตัวอย่างเช่น ถ้าเราต้องการให้สัมประสิทธิ์ของ y ในสมการ

$$2x + 3y = 6$$

เป็น 1 เราจะให้ $k = \frac{1}{3}$ จะได้

$$\frac{2}{3}x + y = 2$$

สมมุติว่าเรามีระบบ A ของสมการเชิงเส้นซึ่งประกอบด้วย A_1 และ A_2 ดังนี้

$$A \begin{cases} 2x + 3y = 6 & : A_1 \\ x - 4y = -\frac{1}{2} & : A_2 \end{cases}$$

สมมุติว่า ระบบ B เกิดจากระบบ A โดย

$$B \begin{cases} x + \frac{3}{2}y = 3 & : B_1 = (\frac{1}{2})A_1 \\ x - 4y = -\frac{1}{2} & : B_2 = A_2 \end{cases}$$

ซึ่งแต่ละสมการของระบบ B คือ $B_1 = (\frac{1}{2})A_1$ และ $B_2 = A_2$ เมื่อเปรียบเทียบเซ็ตคำตอบของระบบ A และระบบ B จะได้ว่าทุกคำตอบซึ่งสอด

คล้องกับทั้งสมการ A_1 และ A_2 ต้องสอดคล้องกับสมการ B_1 และ B_2 ด้วย เนื่องจากคุณสมบัติในข้อ 1 และจะไม่มีคำตอบใดเพิ่มขึ้นหรือหายไป จากการแทน A ด้วย B

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> กำหนดระบบสมการ

$$5x + 2y = 2$$

$$2y = x - 4$$

พิจารณาจากกราฟ จงตรวจสอบเซ็ตคำตอบของระบบนี้

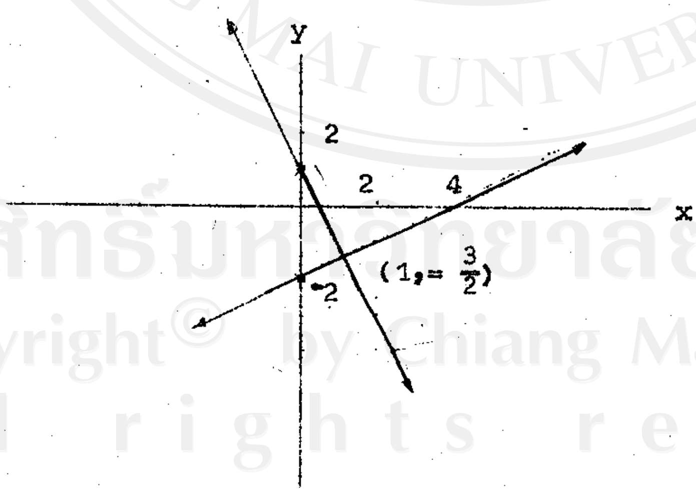
<u>วิธีทำ</u> เขียนตารางค่าสำหรับแต่ละสมการหาจุด co-ordinate ของจุดตัดแกน Y (Y- intercept) จุดตัดแกน X(X-intercept) และจุดที่สามเพื่อตรวจสอบ

$5x + 2y = 2$

X	Y
0	1
$\frac{2}{5}$	0
2	-4

$2y = x - 4$

X	Y
0	-2
4	0
6	1



จากแต่ละสมการ เขียนจุดสามจุด แล้วลากเส้นตรงและเส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุด $(1\ ,-\frac{3}{2})$

ดังนั้น เซ็ตคำตอบของระบบนี้ คือ $\{(1, -\frac{3}{2})\}$

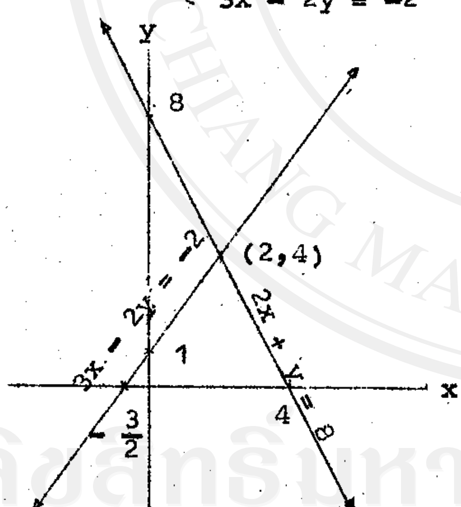
<u>ตรวจสอบ</u> ทดสอบ $(1, -\frac{3}{2})$ ในทั้งสองระบบสมการ

$5x + 2y = 2$	$2y = x - 4$
$5(1) + 2(-\frac{3}{2}) \stackrel{?}{=} 2$	$2(-\frac{3}{2}) \stackrel{?}{=} 1 - 4$
$5 - 3 = 2$ ✓	$-3 = -3$ ✓

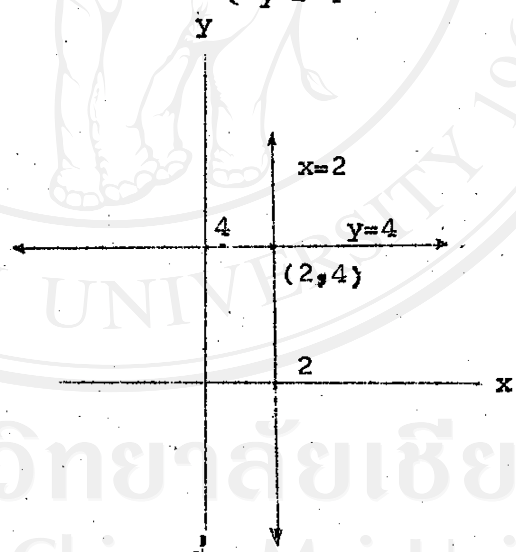
<u>ระบบสมมูลย์ของระบบสมการเชิงเส้น</u>

พิจารณากราฟของระบบสมการต่อไปนี้

$$A \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \quad \text{และ} \quad B \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$



<u>รูปที่ (2-1)</u>



<u>รูปที่ (2-2)</u>

<u>รูปที่ 2</u>

จากรูปที่ (2-1) จะเห็นว่า เส้นกราฟของสมการเชิงเส้น $2x + y = 8$ และ $3x - 2y = -2$ ตัดกันที่จุด (2, 4) ฉะนั้นเซ็ตคำตอบของระบบนี้คือ {(2, 4)} เพราะว่า $2 \times 2 + 4 = 8$ และ $3 \times 2 - 2 \times 4 = -2$ และกราฟเส้นตรงของ $x = 2$ และ $y = 4$ ตัดกันที่จุด (2, 4) เช่นกัน

ระบบสมการสองระบบที่แสดงในรูปที่ 2 นี้เรียกว่า ระบบสมมูลย์ (equivalent systems)

ระบบสองระบบใด ๆ ของสมการเชิงเส้น ซึ่งมีเซ็ตคำตอบเหมือนกัน <u>เรียกว่าระบบสมมูลย์</u>

เราไม่จำเป็นต้องใช้กราฟเพื่อดูเซ็ตคำตอบของระบบ

$$B \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

ว่าเป็น { (2, 4) } สำหรับเซ็ตคำตอบของระบบอื่น ๆ อาจมองไม่เห็นชัด แต่เรามีวิธีทางพีชคณิตที่สามารถเปลี่ยนระบบใดระบบหนึ่งของสมการเชิงเส้นไปสู่ระบบสมมูลย์ ของรูปง่าย ๆ ได้ ดังจะแสดงโดยตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จากระบบสมการ

$$A \begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases} \quad \text{หรือ} \quad \begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ 3x - 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

ของรูปที่ 2

เรารู้ว่า (2, 4) สอดคล้องกับระบบ A

โดยใช้สมการทั้งสองนี้ เราสามารถสร้างสมการใหม่ขึ้นได้ เช่น

$$(2x + y - 8) + 2(3x - 2y + 2) = 0$$

ตอนนี้ (2, 4) ก็ยังคงสอดคล้องกับสมการนี้ด้วย ดังจะเห็นได้จากการแทนค่าต่อไปนี้ ซึ่งจะได้ประโยคเป็นจริง

$$(2 \times 2 + 4 - 8) + 2(3 \times 2 - 2 \times 4 + 2) \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 + 2(0) = 0 \checkmark$$

ดังนั้น $(2x + y - 8) + 2(3x - 2y + 2) = 0$ จึงเป็นสมการเชิงเส้นที่ผ่านจุด (2, 4) ซึ่งเรียกว่าเป็นจุดตัดของสมการ $2x + y = 8$ และ $3x - 2y = -2$ ที่กำหนดให้

เราสามารถทำรูปสมการอันใหม่ให้ง่ายขึ้นดังนี้

$$(2x + y - 8) + 2(3x - 2y + 2) = 0$$

$$2x + y - 8 + 6x - 4y + 4 = 0$$

$$8x - 3y - 4 = 0$$

ฉะนั้น $8x - 3y = 4$ เป็นสมการอันใหม่ที่ผ่านจุดตัดของสมการทั้งสองที่กำหนดให้

จากตัวอย่างข้างบนนี้เขียนเป็นกฎทั่วไปได้ดังนี้

คุณสมบัติข้อ 2

ให้ $ax + by + c = 0$ และ $dx + ey + f = 0$ เป็นสมการเชิงเส้นสองสมการในระนาบโค - ออดิเนท ดังนั้นสำหรับจำนวนจริง k ใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์จะได้

$$(ax + by + c) + k(dx + ey + f) = 0$$

เป็นสมการเชิงเส้นที่ผ่านจุดตัดของสมการทั้งสอง

<u>พิสูจน์</u> ให้ (s_1, s_2) เป็นจุดตัดของสมการ

$ax + by + c = 0$ และ $dx + ey + f = 0$ ที่กำหนดให้

นั่นคือ (s_1, s_2) สอดคล้องกับสมการทั้งสอง

โดยที่ $as_1 + bs_2 + c = 0$ เป็นจริง

และ $ds_1 + es_2 + f = 0$ เป็นจริง

ดังนั้นจะได้ (s_1, s_2) สอดคล้องกับสมการ

$(ax + by + c) + k(dx + ey + f) = 0$ ด้วย

เพราะว่า เมื่อแทนค่า $x = s_1$ และ $y = s_2$ ในสมการ

$$(ax + by + c) + k(dx + ey + f) = 0$$

จะได้ $(as_1 + bs_2 + c) + k(ds_1 + es_2 + f) = 0$

นั่นคือ $0 + k(0) = 0$ เป็นจริง

$\therefore$ $(ax + by + c) + k(dx + ey + f) = 0$ เป็นสมการเชิงเส้นที่ผ่านจุดตัดของสมการทั้งสองที่กำหนดให้

พิจารณาระบบสมการจากระบบ A ดังนี้

$$\text{ระบบ A} \begin{cases} 2x + y = 8 & : A_1 \\ 3x - 2y = -2 & : A_2 \end{cases}$$

สร้างระบบ B จากระบบ A โดยที่

$$B \begin{cases} 2x + y = 8 & B_1 = A_1 \\ 7x = 14 & B_2 = 2A_1 + A_2 \end{cases}$$

จะได้ระบบ B เป็นสมมูลย์กับระบบ A คือ มีเซ็ตคำตอบเดียวกัน เนื่องจากกราฟ $A_1(B_1)$, A_2, B_2 ตัดกันที่จุดเดียวกันตามคุณสมบัติข้อ 2 ซึ่งเขียนเป็นกฎเกณฑ์ทั่วไปได้ดังคุณสมบัติต่อไปนี้

คุณสมบัติข้อ 3

ถ้าระบบ A มีสมการเชิงเส้นเป็น A_1, และ A_2 (ในกรณีที่มีสองตัวแปร) และระบบ B สร้างจากระบบ A โดยที่

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = kA_1 + A_2 \quad \text{ซึ่ง} \quad k \neq 0$$

แล้ว A และ B เป็นระบบสมมูลย์ คือ มีเซ็ตคำตอบเดียวกัน

<u>**พิสูจน์**</u> ให้ระบบสมการเชิงเส้น A ประกอบด้วย

$$ax + by + c = 0 \quad : \quad A_1$$

$$dx + ey + f = 0 \quad : \quad A_2$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นของตัวแปร x และ y

ระบบ B มีสมการเชิงเส้นเป็น

$$ax + by + c = 0 \qquad : B_1 = A_1$$

$$k(ax + by + c) + (dx + ey + f) \quad : B_2 = kA_1 + A_2$$

ดังนั้น โดยคุณสมบัติข้อ 2

จะได้ $B_2 = kA_1 + A_2$ เป็นสมการเชิงเส้นที่ผ่านจุดตัดของ A_1 และ A_2

ให้ A_1 และ A_2 ตัดกันที่ (s_1, s_2)

ดังนั้นจะได้ว่า B_2 และ A_1 ตัดกันที่ (s_1, s_2) ด้วย

แต่ $B_1 = A_1$

ดังนั้น B_2 และ B_1 ตัดกันที่ (s_1, s_2)

นั่นคือ A และ B มีเซ็ตคำตอบเดียวกัน

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาเซ็ตคำตอบของระบบสมการ

$$A \begin{cases} 2x + 3y = 1 & : A_1 \\ x + 2y = 0 & : A_2 \end{cases}$$

<u>วิธีทำ</u> เลือกระบบ B โดยที่

$$B_1 = (-2A_2) + A_1$$

$$B_2 = A_2$$

จะได้

$$B \begin{cases} 0x - y = 1 & : B_1 = (-2A_2) + A_1 \\ x + 2y = 0 & : B_2 = A_2 \end{cases}$$

สำหรับ B_1 เราได้จาก

$$(-2)(x + 2y = 0) + (2x + 3y = 1)$$

หรือ $(-2x - 4y = 0) + (2x + 3y = 1)$

หรือ $-y = 1$ ซึ่งจะได้ $y = -1$

แทนค่า $y = -1$ ใน B_2 จะได้

$x + 2(-1) = 0$ หรือ $x = 2$

ดังนั้นเซ็ตคำตอบในระบบคือ $\{(x,y)\} = \{(2,-1)\}$

ทดลองตรวจสอบคำตอบในระบบ A และระบบ B ดู

พิจารณาการหาเซ็ตคำตอบของระบบ A อีกวิธีหนึ่ง

$$A \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 1x + 2y = 0 \end{cases}$$

เราอาจกำจัดสัมประสิทธิ์ของ x และ y ที่ไม่ได้วงกลมให้เป็นศูนย์ ส่วนสัมประสิทธิ์ภายในวงกลมจะเปลี่ยนไปเป็นหนึ่ง ดังนี้

เปลี่ยนระบบ A ไปเป็นระบบ B โดย

$$B \begin{cases} 0x - y = 1 & : B_1 = (-2)A_2 + A_1 \\ x + 2y = 0 & : B_2 = A_2 \end{cases}$$

เปลี่ยนระบบ B ไปเป็นระบบ C โดย

$$C \begin{cases} 0x + y = -1 & : C_1 = -B_1 \\ x + 0y = 2 & : C_2 = 2B_1 + B_2 \end{cases}$$

จาก C เห็นได้โดยง่ายว่าคำตอบของ A คือ

$$(x,y) = (2,-1)$$

หรืออาจแสดงการหาคำตอบของระบบในตารางดังนี้

A	$2x + 3y = 1$	A_1
	$x + 2y = 0$	A_2
B	$0x - y = 1$	$B_1 = (-2)A_2 + A_1$
	$x + 2y = 0$	$B_2 = A_2$
C	$0x + y = -1$	$C_1 = (-1)B_1$
	$x + 0y = 2$	$C_2 = 2B_1 + B_2$

คำตอบคือ $(x,y) = (2,-1)$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงแก้ระบบสมการ $3x + 2y = 1$

$2x - 3y = -8$

A	$3x + 2y = 1$	A_1
	$2x - 3y = -8$	A_2
B	$x + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$	$B_1 = \frac{1}{3}A_1$
	$0x - \frac{13}{3}y = -\frac{26}{3}$	$B_2 = (-2)B_1 + A_2$
C	$x + 0y = -1$	$C_1 = (-\frac{2}{3})\ C_2 + B_1$
	$0x + y = 2$	$C_2 = (-\frac{3}{13})\ B_2$

$$(x,y) = (-1,2)$$

ตรวจสอบ $A_1 : 3(-1) + 2(2) = 1$ เป็นจริง

$A_2 : 2(-1) - 3(2) = -8$ เป็นจริง

<u>ข้อสังเกต</u> จะเห็นว่า

$B_2 = A_2 + (-2)\ B_1$ ซึ่ง B_1 เป็นสมการที่ได้จาก A_1

และ $C_1 = B_1 + (-\frac{2}{3})C_2$ ซึ่ง C_2 เป็นสมการที่ได้จาก B_2

ซึ่งไม่ทำให้คำตอบของระบบเปลี่ยนไป ดังนั้นระบบ B และ C ที่ได้จึงมีคำตอบเดียวกับระบบ A

ในการแก้ปัญหาระบบสมการ สิ่งที่เปลี่ยนแปลง คือ ค่าของสัมประสิทธิ์และตัวคงที่เท่านั้น ฉะนั้น เพื่อความสะดวก เราอาจจะเขียนเฉพาะค่าดังกล่าวเท่านั้น ซึ่งจะเปรียบเทียบทั้งสองแบบดังนี้

A	$3x + 2y = 1$	A_1
	$2x - 3y = -8$	A_2
B	$x + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$	$B_1 = \frac{1}{3}A_1$
	$0x - \frac{13}{3}y = -\frac{26}{3}$	$B_2 = (-2)B_2 + A_2$
C	$x + 0y = -1$	$C_1 = (-\frac{2}{3})C_2 + B_1$
	$0x + y = 2$	$C_2 = -\frac{3}{13}B_2$

x	y	
3	2	1
2	−3	−8
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{26}{3}$
1	0	−1
0	1	2

$(x, y) = (-1, 2)$

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสามตัวในสมการสามสมการ เราสามารถพิสูจน์ได้เช่นเดียวกันว่า ถ้าระบบ B ได้จากระบบ A โดยเปลี่ยนเฉพาะ A_i (สมการที่ i) ของ A ไปเป็น $B_i = kA_j + A_i$ เมื่อ $i \neq j$ และระบบทั้งสองจะมีคำตอบเหมือนกัน ดังคุณสมบัติต่อไปนี้

คุณสมบัติข้อ 4

ระบบ A และ B ซึ่ง

$$A \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0 & : A_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0 & : A_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z - d_3 = 0 & : A_3 \end{cases}$$

และ

$$B \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0 & : B_1 = A_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0 & : B_2 = A_2 \\ k(a_1x + b_1y + c_1z - d_1)+(a_3x + b_3y + c_3z - d_3) = 0 & \\ & : B_3 = kA_1 + A_3 \end{cases}$$

(หรือ $B_3 = kA_2 + A_3$ ซึ่งพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน)

ระบบทั้งสองจะมีเซ็ตคำตอบเหมือนกัน

<u>พิสูจน์</u>

ให้ (s_1, s_2, s_3) เป็นคำตอบของระบบ A

นั่นคือ เมื่อแทนค่า (x, y, z) ด้วย (s_1, s_2, s_3) ในระบบ A จะทำให้ทุกประโยคที่ได้เป็นจริง

นั่นคือ

$a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 - d_1 = 0$ เป็นจริง (1)

$a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 - d_2 = 0$ เป็นจริง (2)

$a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 - d_3 = 0$ เป็นจริง (3)

จะได้ (s_1, s_2, s_3) เป็นคำตอบของระบบ B ด้วย

เพราะว่า เมื่อแทนค่า $(x, y, z) = (s_1, s_2, s_3)$ ในระบบ B จะได้

$a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 - d_1 = 0$ เป็นจริงตาม (1)

$a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 - d_2 = 0$ เป็นจริงตาม (2)

และ $k(a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 - d_1) + (a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 - d_3) \overset{?}{=} 0$

จะได้ $k(0) + 0 = 0$ เป็นจริง

ให้ (s_1, s_2, s_3) เป็นคำตอบของระบบ B

นั่นคือ (s_1, s_2, s_3) สอดคล้องสำหรับทุกสมการของ B คือ

เมื่อแทน $(x, y, z) = (s_1, s_2, s_3)$ ในระบบ B จะทำให้ทุกประโยคที่ได้เป็นจริง

นั่นคือ $a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 - d_1 = 0$ เป็นจริง (4)

$a_2s_1 + b_2s_2 + c_2s_3 - d_2 = 0$ เป็นจริง (5)

และ

$$k(a_1s_1 + b_1s_2 + c_1s_3 - d_1) + (a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 - d_3) = 0$$

เป็นจริง (6)

โดยเนื่องจาก (4) และ (6) เป็นจริง

จึงได้

$$k(0) + (a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 - d_3) = 0 \text{ เป็นจริง}$$

นั่นคือ $a_3s_1 + b_3s_2 + c_3s_3 - d_3 = 0$ เป็นจริง (7)

ฉะนั้น (s_1, s_2, s_3) จะเป็นคำตอบของระบบ A ด้วย

เพราะเมื่อแทนค่า $(x, y, z) = (s_1, s_2, s_3)$ ใน A จะได้สมการตามข้อ (4), (5) และ (7) ซึ่งเป็นจริง

สำหรับระบบเชิงเส้นที่มีตัวแปร m ตัวในสมการ n สมการ เราก็สามารถพิสูจน์ได้เช่นเดียวกันว่า ถ้าระบบ B ได้จากระบบ A โดยเปลี่ยนเฉพาะ A_i (สมการที่ i) ของ A ไปเป็น $B_i = kA_j + A_i$ เมื่อ $i \neq j$ ระบบทั้งสองจะมีคำตอบเหมือนกัน

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงวิธีแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรสามตัว ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้

$$2x - 3y + z = 4$$

$$x + y - z = 1$$

$$x - 2y + 2z = 7$$

	x	y	z		
A	2	-3	1	4	A_1
	1	1	-1	1	A_2
	1	-2	2	7	A_3
B	0	-5	3	2	$B_1 = A_1 + (-2)B_2$
	1	1	-1	1	$B_2 = A_2$
	0	-3	3	6	$B_3 = A_3 + (-1)B_2$
C	0	0	-2	-8	$C_1 = B_1 + 5C_3$
	1	0	0	3	$C_2 = B_2 + (-1)C_3$
	0	1	-1	-2	$C_3 = (-\frac{1}{3})B_3$
D	0	0	1	4	$D_1 = (-\frac{1}{2})C_1$
	1	0	0	3	$D_2 = C_2$
	0	1	0	2	$D_3 = C_3 + D_1$

จำนวนที่อยู่ในวงกลมจะถูกเปลี่ยนให้ไปเป็น 1 และจำนวนอื่น ๆ ในหลักเดียวกันจะถูกเปลี่ยนให้เป็นศูนย์หมด

ตอนนี้ระบบ D สามารถเขียนได้เป็น

$$0x + 0y + z = 4$$
$$x + 0y + 0z = 3$$
$$0x + y + 0z = 2$$

นั่นคือ

$$(x, y, z) = (3, 2, 4)$$

คำตอบนี้สอดคล้องกับระบบ A ด้วย

<u>สรุป</u>

การแก้ปัญหาระบบสมการกระทำได้โดยวิธีการดังต่อไปนี้

1. สลับที่สมการสองสมการใด ๆ
2. ใช้จำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์คูณตลอดสมการ
3. สมการใดสมการหนึ่งบวกกับ k เท่าของสมการอื่น ๆ เมื่อ $k \neq 0$

การกระทำ 3 ข้อดังกล่าวเรียกว่า การกระทำเบื้องต้น (Elementary Operation)

และถ้าการกระทำดังกล่าวกระทำบนแถวของเมตริกซ์ เราเรียกการกระทำนี้ว่า การกระทำเบื้องต้นกับแถว (Elementary row Operation)

6.4 การหาอินเวอร์สของเมตริกซ์

การหาอินเวอร์สของ (2 x 2) เมตริกซ์ โดยวิธีต่อไปนี้ อาจมิได้ช่วยให้การหาอินเวอร์สง่ายขึ้นหรือสะดวกขึ้นเลย แต่อาจช่วยให้ผู้ศึกษาเห็นวิธีการอื่น ๆ ในการหาอินเวอร์ส และช่วยฝึกการคูณเมตริกซ์ให้เกิดความชำนาญมากขึ้น และช่วยให้เกิดมโนสำนึก (concept) ในการเรียนเมตริกซ์

<u>วิธีที่ 1</u> สิ่งสำคัญในการหาอินเวอร์สโดยวิธีนี้ คือ ต้องทราบความจริงจากข้อความต่อไปนี้

$$AP = I \implies A = P^{-1}$$

$$(BA)Q = I \implies BA = Q^{-1}$$

$$(DCBA)R = I \implies DCBA = R^{-1}$$

สำหรับนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ P, Q และ R

โดยที่เราจะพิจารณาเมตริกซ์ A, B, C และ D ซึ่งอยู่ในรูป[5]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ? & ? \end{pmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{pmatrix} ? & ? \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ดังนั้น สำหรับเมตริกซ์ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ใด ๆ จะได้

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ? & ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ ? & ? \end{pmatrix}$$

และ

$$\begin{pmatrix} ? & ? \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & ? \\ c & d \end{pmatrix}$$

ต่อไปนี้จะแสดงวิธีหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ว่าทำอย่างไร ?

<u>วิธีที่ 1 (ก)</u> ให้ $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ จะหา P^{-1}

<u>ขั้นที่ 1</u> ให้ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

[5] เมตริกซ์ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ? & ? \end{pmatrix}$ หรือ $\begin{pmatrix} ? & ? \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, เครื่องหมาย ? หมายถึงสมาชิกตัวหนึ่งที่ยังไม่สนใจค่า หรือจะต้องกำหนดค่า หรือจะต้องหาค่า

เนื่องจาก (1 0) ในแถวแรกไม่ทำให้ (2 3) ในแถวแรกของ P เปลี่ยนไป ดังนั้นเมตริกซ์ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ จึงมีแถวแรกเป็น (2 3) สำหรับ แถวที่สองกำหนดเป็น (0 , 1) ซึ่งเหมือนกับแถวที่สองของ I นั่นเอง

หาค่า p และ q จากระบบสมการ

$$2p + 4q = 0$$

$$3p + 3q = 1$$

แก้ระบบสมการจะได้

$$p = \frac{2}{3}, \quad q = -\frac{1}{3}$$

ฉะนั้น ให้ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

ดังนั้น $AP = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ขั้นที่ 2 ให้ $\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

เนื่องจาก (0 , 1) ในแถวที่ 2 ไม่ทำให้ (0 , 1) ในแถวที่ 2 ของ AP เปลี่ยนแปลง ดังนั้นเมตริกซ์ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ จึงมีแถวที่ 2 เป็น (0 , 1) และสำหรับแถวแรกเรากำหนดเป็น (1 , 0) ซึ่งเหมือนกับแถวแรกของ I นั่นเอง

หา r และ s จากระบบสมการ

$$2r = 1$$

$$3r + s = 0$$

จะได้ $r = \frac{1}{2}$ และ $s = -\frac{3}{2}$

ฉะนั้น ให้ $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

เพราะฉะนั้น

$$(BA)P = B(AP) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $P^{-1} = BA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

<u>วิธีที่ 1 (ข)</u> ให้ $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ จะหา P^{-1}

<u>ขั้นที่ 1</u> ให้ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ ? & 1 \end{bmatrix}$

หา p ซึ่งทำให้ตำแหน่งที่วงกลมเป็น 1

นั่นคือ $0 \times 3 + 3p = 1$

ดังนั้น $p = \frac{1}{3}$

และตำแหน่งที่เป็นเครื่องหมาย ? จะมีค่าเท่ากับ

$0 \times 2 + p \times 4 = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$

ฉะนั้นให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

ดังนั้น $AP = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix}$

<u>ขั้นที่ 2</u> ให้ $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ? \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$

หา q ซึ่งทำให้ตำแหน่งที่วงกลมเป็น 1

จะได้ $2q + 0(\frac{4}{3}) = 1$

$\therefore \quad q = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ตำแหน่งที่เป็นเครื่องหมาย ? หาค่าได้เท่ากับ

$q(3) + 0(1) = q(3) = \frac{1}{2}(3) = \frac{3}{2}$

ฉะนั้นให้ $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ดังนั้น

$$(BA)P = B(AP) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

<u>ขั้นที่ 3</u> ให้ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

หาค่า r และ s จากระบบสมการ

$r + \frac{4}{3}s = 0$

$\frac{3}{2}r + s = 1$

จะได้ $r = \frac{4}{3}, \quad s = -1$

ฉะนั้นให้ $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}$

ดังนั้น

$$(CBA)P = C(BAP) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ขั้นที่ 4 ให้ $\begin{pmatrix} t & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

หาค่า t และ u จากระบบสมการ

$$1t + 0u = 1$$

$$\frac{3}{2}t + 1u = 0$$

จะได้ $t = 1$

$$u = -\frac{3}{2}$$

ฉะนั้นให้ $D = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ดังนั้น

$$(DCBA)P = D(CBAP) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

นั่นคือ $DCBA = P^{-1}$

ดังนั้น

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

<u>วิธีที่ 2</u> โดยใช้ความรู้ในเรื่องเวคเตอร์ที่ได้เรียนมาแล้ว

หาอินเวอร์สของ $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

<u>ขั้นที่ 1</u>

ให้ $P^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

ดังนั้น

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

จะได้

$$\begin{aligned} 2a + 4b &= 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i) \\ 3a + 3b &= 0 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} 2c + 4d &= 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii) \\ 3c + 3d &= 1 \end{aligned}$$

<u>ขั้นที่ 2</u> เขียน (i) และ (ii) ในรูปของเมตริกซ์จะได้

$$\begin{pmatrix} 2a + 4b \\ 3a + 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(iii)$$

และ

$$\begin{pmatrix} 2c + 4d \\ 3c + 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(iv)$$

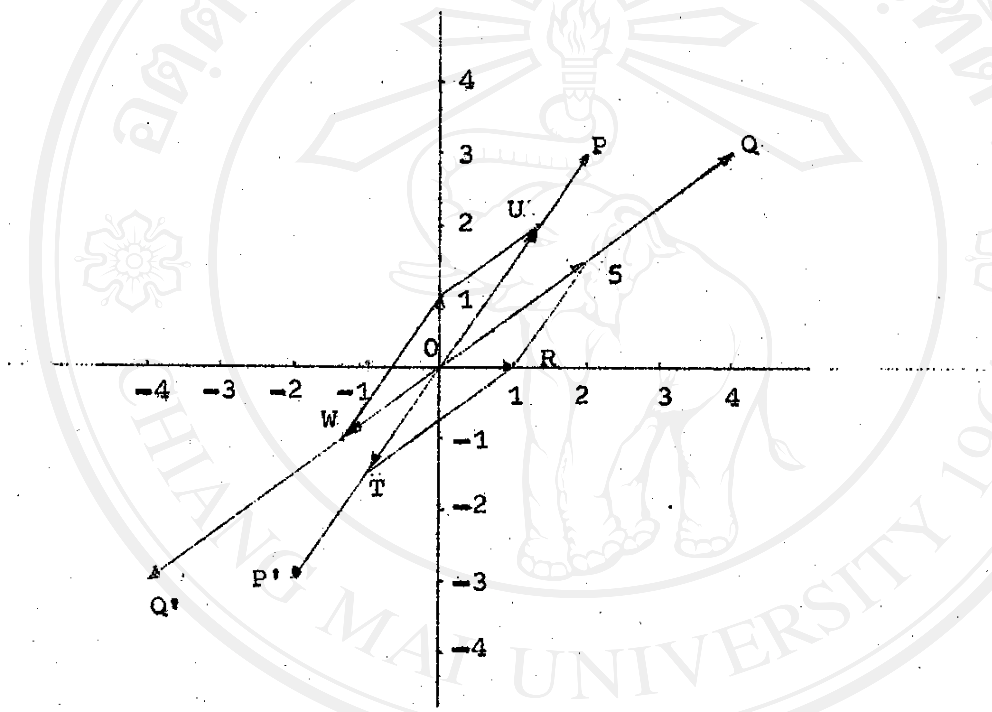
ซึ่งเมื่อพิจารณาเมตริกซ์ (2 x 1) ในรูปของเวคเตอร์ จะได้ว่า (iii) และ (iv) สามารถเขียนได้ เป็น

$$a \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots\ldots(v)$$

$$\text{และ} \quad c\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{.........(vi)}$$

<u>ขั้นที่ 3</u>

พิจารณากราฟของ (v) และ (vi) ดังนี้



<u>ขั้นที่ 4</u>

ค่าของ a และ b วัดได้จากสี่เหลี่ยมด้านขนาน OTRS ซึ่งขนาดของ OT เป็น $-\frac{1}{2}$ ของ OP และขนาดของ OS เป็น $\frac{1}{2}$ ของ OQ ดังนั้น a และ b = $-\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{2}$ ตามลำดับ

ค่าของ c และ d วัดได้จากสี่เหลี่ยมด้านขนาน OUVW ซึ่งขนาดของ OU = $\frac{2}{3}$ ของ OP และ OW = $-\frac{1}{3}$ ของ OW ดังนั้น c และ d เท่ากับ $\frac{2}{3}$ และ $-\frac{1}{3}$ ตามลำดับ

$$\text{ดังนั้น } A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

สำหรับวิธีการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ซึ่งสามารถใช้ได้กับเมตริกซ์จัตุรัสขนาดต่าง ๆ ได้แก่ วิธีที่แสดงอยู่ในหนังสือ SSMCIS ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 5 แต่ผู้เรียนอาจเกิดความสับสนเกี่ยวกับเครื่องหมายได้ เพราะที่เหนือตารางจะเขียนตัวแปร x,y,... และ -1 ซึ่งพออ่านค่า x,y,... กับไม่สนใจเครื่องหมาย -1 นี้เลย แต่จะอ่านค่าที่ได้จากตารางได้ทันที

ฉะนั้น เพื่อมิให้เกิดความสับสน เราจะเขียนสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและตัวคงที่ไว้ในตาราง ใช้เส้นคั่นระหว่างค่าสัมประสิทธิ์และตัวคงที่เปรียบเสมือนเป็นเครื่องหมายเท่ากับ และเขียนเฉพาะตัวแปร x,y,... ไว้เหนือตารางดังเดิม ดังจะแสดงโดยตัวอย่างต่อไปนี้

<u>การหาอินเวอร์สของ (2 x 2) เมตริกซ์</u>

จงหาอินเวอร์สของเมตริกซ์

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{สมมุติให้ } A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 2x + 3z & 2y + 3w \\ x + 2z & y + 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $2x + 3z = 1$ และ $2y + 3w = 0$

$x + 2z = 0$ $\qquad y + 2w = 1$

แก้ระบบสมการดังนี้

x	z			y	w	
2	3	1	A_1	2	3	0
1	2	0	A_2	1	2	1
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$B_1 = \frac{1}{2}A_1$	1	$\frac{3}{2}$	0
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$B_2 = A_2 - B_1$	0	$\frac{1}{2}$	1
1	0	2	$C_1 = B_1 - \frac{3}{2}C_2$	1	0	-3
0	1	-1	$C_2 = 2B_2$	0	1	2

เนื่องจากระบบสมการทั้งสองมีล่าสัมประสิทธิ์เหมือนกัน ต่างกันเฉพาะตัวคงที่ในการกระทำเบื้องต้นของแถวแบบเดียวกัน จะเปลี่ยนล่าสัมประสิทธิ์ไปแบบเดียวกัน จึงสามารถเขียนไว้ในตารางเดียวกันดังนี้

			*	**	
A	2	3	1	0	A_1
	1	2	0	1	A_2
B	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$B_1 = \frac{1}{2}A_1$
	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$B_2 = A_2 - B_1$
C	1	0	2	-3	$C_1 = B_1 - \frac{3}{2}C_2$
	0	1	-1	2	$C_2 = 2B_2$

ซึ่งอ่านค่าได้ว่า $x = 2$, $y = -3$

$z = -1$ และ $w = 2$

หรือ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>ข้อสังเกต</u> (1) หลักที่ 3 (*) สำหรับอ่านค่า x และ z

(2) หลักที่ 4 (**) สำหรับอ่านค่า y และ w

(3) เราเริ่มต้นด้วยตาราง

A	I_2

และจบลงด้วย

I_2	A^{-1}

(4) ถ้าเมื่อใดด้านซ้ายของตารางไม่สามารถทำไปสู่ I_2 ได้ แสดงว่าเมตริกซ์ A ไม่มีอินเวอร์ส เพราะไม่สามารถหาค่า x, y, z และ w ได้

สำหรับการหาอินเวอร์สของ (3 x 3) เมตริกซ์ เราก็จะเริ่มจากหลักการแก้สมการเช่นเดียวกับการหาอินเวอร์สของ (2 x 2) เมตริกซ์ ดังนี้

<u>การหาอินเวอร์สของ (3 x 3) เมตริกซ์</u>

จงหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

ให้ $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$

นั่นคือ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

จะได้ระบบสมการ

$$\begin{array}{lll} 1x_1 + 2x_4 + 0x_7 = 1 & 1x_2 + 2x_5 + 0x_8 = 0 & 1x_3 + 2x_6 + 0x_9 = 0 \\ 0x_1 + 1x_4 - 1x_7 = 0 & 0x_2 + 1x_5 + 1x_8 = 1 & 0x_3 + 1x_6 - 1x_9 = 1 \\ 0x_1 - 1x_4 + 2x_7 = 0 & 0x_2 - 1x_5 + 2x_8 = 0 & 0x_3 - 1x_6 + 2x_9 = 1 \end{array}$$

หรือ

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_4 & x_7 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} x_2 & x_5 & x_8 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} x_3 & x_6 & x_9 & \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}$$

ซึ่งสามารถเขียนไว้ในตารางเดียวกันดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

และสุดท้ายจะได้

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & * & ** & *** \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -2 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

ค่า x_1, x_4, x_7 อ่านได้จากหลักที่ 4 (*)

จะได้ $x_1 = 1$, $x_4 = 0$ และ $x_7 = 0$

ค่า x_2, x_5, x_8 อ่านได้จากหลักที่ 5 (* *)

จะได้ $x_2 = -4$, $x_5 = 2$ และ $x_8 = 1$

ค่า x_3, x_6 และ x_9 อ่านได้จากหลักที่ 6 (* * *)

จะได้ $x_3 = -2$, $x_6 = 1$, และ $x_9 = 1$

นั่นคือ $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

สังเกตได้เช่นเดียวกันว่า เราเริ่มต้นด้วย

$$\begin{array}{|c|c|} \hline A & I \\ \hline \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots(i)$$

และสิ้นสุดที่

$$\begin{array}{|c|c|} \hline I & A^{-1} \\ \hline \end{array} \qquad \ldots\ldots\ldots(ii)$$

และสำหรับเมตริกซ์จัตุรัสขนาดใด ๆ ก็เช่นเดียวกันจะได้ว่า จะเริ่มต้นจาก (i) และสิ้นสุดที่ (ii) สำหรับกรณีที่เมตริกซ์มีอินเวอร์ส ดังนั้นในการหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ใด ๆ เราจะเริ่มต้นจาก (i) ได้ทันที