บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 <u>เซต</u>

เซตเป็นคำอนิยามที่ใช้ในการกล่าวถึงกลุ่มของสิ่งของต่าง ๆ เช่น กลุ่มของนักเรียน ฝูงปลา โขลงช้าง เป็นต้น เพื่อไม่ให้เกิดการสับสนจึงใช้คำว่า "เซต" แทนคำที่มีความหมายเหล่านี้ ดังนั้นจึงเรียกใหม่ว่าเซตของนักเรียน เซตของปลา เซตของช้าง

ใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่แทนเซต สิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ภายในเซตเรียกว่า "สมาชิก" ใช้สัญลักษณ์ " ε " แทนคำว่า "เป็นสมาชิกของ" เช่น A เป็นเซตมี a เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $a \varepsilon A$ ถ้า b ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $b \notin A$

ตัวอย่างของเซต เช่น A = { นก, ปลา }

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

การเขียนเซตแบ่งได้ 2 แบบคือ

1. แบบแจกแจงสมาชิก เขียนสมาชิกทุกตัวของเซตลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา และใช้เครื่องหมายจุลภาคคั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น $\{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

2. แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต ใช้ตัวแปรแทนสมาชิกในเซต และบรรยายคุณสมบัติของสมาชิกในเซตเป็นข้อความ เช่น

{a / a เป็นจำนวนเต็ม }

ชนิดต่าง ๆ ของเซต

บทนิยาม 2.1.1 เซตว่าง (empty set) คือเซตที่ไม่มีสมาชิกใช้สัญลักษณ์ ϕ หรือ { } แทนเซตว่าง

เช่น $\{ a / a > 3$ และ $a < 3 \}$

บทนิยาม 2.1.2 เซตจำกัด (finite set) คือเซตที่มีสมาชิก n ตัว โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เช่น $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ มีสมาชิก 100 ตัว

บทนิยาม 2.1.3 เซตไม่จำกัด (infinite set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

เช่น $\{2, 4, 6, \ldots\}$

หมายเหตุ ϕ ถือว่าเป็นเซตจำกัด ซึ่งสามารถแสดงการพิสูจน์ได้ในการศึกษาเซตชั้นสูง แต่ในที่นี้จะไม่แสดงการพิสูจน์

บทนิยาม 2.1.4 ถ้า A และ B เป็นเซต แล้ว

1. A เป็นสับเซต (subset) ของ B (เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$ เช่น $A = \{3, 5\}$ และ $B = \{1,3,5\}$ เพราะฉะนั้น $A \subseteq B$

2. A เท่ากับ B (เขียนแทนด้วย $A = B$) ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ เช่น $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{2,1,3\}$ เพราะฉะนั้น $A = B$

3. A เป็นสับเซตแท้ของ B (เขียนแทนด้วย $A \subset B$) ก็ต่อเมื่อ A เป็นสับเซตของ B และ $A \neq B$ เช่น $A = \{0,2,3\}$ และ $B = \{0,1,2,3,4\}$ เนื่องจาก $A \subseteq B$ และมี $4 \in B$ แต่ $4 \notin A$ ดังนั้น $A \neq B$ เพราะฉะนั้น $A \subset B$

<u>บทนิยาม 2.1.5</u> "เซตของเซต" (Set of sets)

เซตซึ่งมีสมาชิกเป็นเซต เรียกว่า เซตของเซต

เช่น $K = \{\{5\}, \{1,2\}, \emptyset\}$

<u>บทนิยาม 2.1.6</u> "เพาเวอร์เซต" (Power set)

ถ้า A เป็นเซต แล้วเซตของสับเซตทั้งหมดของ A เรียกว่าเพาเวอร์เซตของเซต A เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $\theta(A)$

เช่น $A = \{1,2\}$ แล้ว $\theta(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

<u>บทนิยาม 2.1.7</u> "เอกภพสัมพัทธ" (Universal set)

ถ้าทุก ๆ เซตที่กล่าวถึงต่างก็เป็นสับเซตของเซตใดเซตหนึ่ง เรียกเซตนั้นว่า "เอกภพสัมพัทธ" ใช้สัญญลักษณ์ " U " เช่น ถ้ากล่าวถึงเซตต่าง ๆ ที่ล้วนแต่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม แล้ว U ก็คือเซตของเลขจำนวนเต็ม

<u>บทนิยาม 2.1.8</u> ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว ยูเนียนของ A และ B (เขียนแทนด้วย $A \cup B$) คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรือ B

เขียนสั้น ๆ ได้ดังนี้

$A \cup B = \{x/x \in A$ หรือ $x \in B\}$

เช่น $A = \{1,2,5\}$, $B = \{0,1,2,6\}$

$A \cup B = \{0,1,2,5,6\}$

<u>บทนิยาม 2.1.9</u> ถ้า A และ B เป็นเซต แล้วอินเตอร์เซคชันของ A และ B (เขียนแทนด้วย $A \cap B$) คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และ B

เขียนสั้น ๆ ได้ดังนี้

$A \cap B = \{x/x \in A$ และ $x \in B\}$

เช่น $A = \{-1,0,1,2\}$, $B = \{0,2,4,6\}$

$A \cap B = \{0,2\}$

<u>บทนิยาม 2.1.10</u> ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว คอมพลีเมนต์ของ B เทียบกับ A (เขียนแทนด้วย A - B) คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และไม่อยู่ใน B

เขียนสั้น ๆ ได้ดังนี้

$A - B = \{x/x \in A$ และ $x \notin B\}$

เช่น $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,3,6\}$

$A - B = \{1,4,5\}$

<u>บทนิยาม 2.1.11</u> ถ้า U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $A \subseteq U$ แล้วคอมพลีเมนต์ของ A (เขียนแทนด้วย $\bar{A}$) คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน U และไม่อยู่ใน A

เขียนสั้น ๆ ได้ดังนี้

$\bar{A} = \{x/x \in U$ และ $x \notin A\}$

เช่น $U = \{1,2,3,\ldots\}$, $A = \{3,4,5,\ldots\}$

$\bar{A} = \{1,2\}$

<u>บทนิยาม 2.1.12</u> เซต A และ B จะเรียกว่าเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน (disjoint set) ถ้า $A \cap B = \emptyset$ ดังนั้นเซต $A_1, A_2, \ldots, A_n$ จะเรียกว่าเป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ถ้า $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$ และ $i, j = 1,2,\ldots, n$

<u>ทฤษฎี 2.1.1</u> "กฎไอเดมโพเทนต์" (Idempotent laws)

ถ้า A เป็นเซต แล้ว

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$

<u>ทฤษฎี 2.1.2</u> "กฎการสลับที่" (Commutative laws)

ถ้า A และ B เป็นเซต แล้ว

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $A \cap B = B \cap A$

<u>ทฤษฎี 2.1.3</u> "กฎการจัดหมู่" (Associative laws)

ถ้า A, B และ C เป็นเซต แล้ว

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

<u>ทฤษฎี 2.1.4</u> "กฎการกระจาย" (Distributive laws)

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

<u>ทฤษฎี 2.1.5</u> "กฎการคงรูป" (Identity laws)

ถ้า A เป็นเซต และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ แล้ว

1. $A \cup \emptyset = A$

2. $A \cap \emptyset = \emptyset$

3. $A \cup U = U$

4. $A \cap U = A$

<u>ทฤษฎี 2.1.6</u> "กฎคอมพลีเมนต์" (Complement laws)

ถ้า A เป็นเซต และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ แล้ว

1. $A \cup \bar{A} = U$

2. $A \cap \bar{A} = \emptyset$

3. $\bar{U} = \emptyset$

4. $\bar{\emptyset} = U$

- - -

<u>ทฤษฎี 2.1.7</u> " De Morgan's laws"

ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

<u>พาร์ทิชันของเซต</u> (Partition of sets)

<u>บทนิยาม 2.1.13</u> ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นสับเซตของ U จะเรียก $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ว่า พาร์ทิชันของ U ถ้า

1. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U$ และ

2. $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

<u>ตัวอย่าง 2.1.1</u> ให้ $U = \{1,2,3,\ldots, 10\}$

$A = \{1,2,3\}$

$B = \{5, 10\}$

$C = \{4,6,7,8,9\}$

เรียก A, B, C ว่าเป็นพาร์ทิชันของ U เพราะ

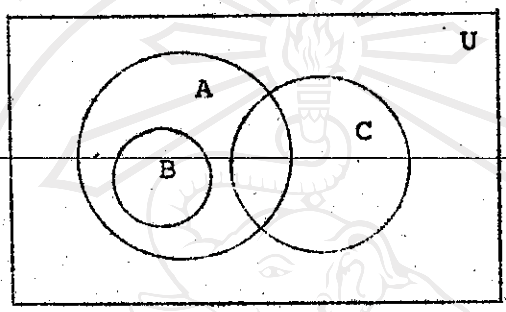
1. $A \cup B \cup C = U$

2. $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ และ $A \cap C = \emptyset$

- - - -

Euler Venn Diagram

ความสัมพันธ์ระหว่างเซตและสับเซต สามารถแสดงได้โดยเขียนแผนภาพ ซึ่งเรียกว่า Venn diagram โดยใช้รูปสี่เหลี่ยมแทนเอกภพสัมพัทธ์ และใช้วงกลมแทนเซตต่าง ๆ เช่น ถ้า $B \subset A$ และ C เป็นเซตใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ U เขียนแสดงได้ดังนี้



2.2 ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน (Relation and function)

บทนิยาม 2.2.1 ถ้า A และ B เป็นเซต แล้วผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product) ของ A และ B (เขียนแทนด้วย $A \times B$) คือเซตของคู่ลำดับ (a, b) เมื่อ $a \in A$ และ $b \in B$

เรียก a ว่า สมาชิกตัวหน้าของคู่ลำดับ

และ เรียก b ว่า สมาชิกตัวหลังของคู่ลำดับ

เขียนผลคูณคาร์ทีเซียนในรูปเซตได้ดังนี้

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u> ถ้า $A = \{a,b,c\}$, $B = \{m,n\}$

จะได้ $A \times B = \{(a,m), (a,n), (b,m), (b,n), (c,m), (c,n)\}$

$B \times A = \{(m,a), (n,a), (m,b), (n,b), (m,c), (n,c)\}$

จะเห็นว่า $A \times B \neq B \times A$

<u>บทนิยาม 2.2.2</u> ถ้า A และ B เป็นเซต และ $r \subseteq A \times B$ แล้วจะเรียก r ว่าเป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B (Relation r from A to B)

เรียกเซตของสมาชิกตัวหน้าทั้งหมดของ r ว่า โดเมน (domain) ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ D_r

เรียกเซตของสมาชิกตัวหลังทั้งหมดของ r ว่าเรนจ์ (range) ของความสัมพันธ์ r เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ R_r

<u>ตัวอย่าง 2.2.2</u> จากตัวอย่างที่ 2.2.1

นิยาม $r = \{(a,m), (b,m), (b,n)\}$

$r \subset A \times B$

$D_r = \{a,b\}$ และ $R_r = \{m,n\}$

<u>บทนิยาม 2.2.3</u> ถ้า $A \neq \emptyset$ และ $B \neq \emptyset$ เป็นเซต และ $f \subseteq A \times B$ แล้วเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (function f from A to B) ก็ต่อเมื่อ

1. $D_f = A$ และ

2. ถ้า $(x,y) \in f$ และ $(x,z) \in f$ แล้ว $y = z$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $(x,y) \in f$ จะเรียก y ว่าเป็นค่าของ f ที่จุด x แทนด้วย $f(x)$ นั่นคือ $y = f(x)$

<u>ตัวอย่าง 2.2.3</u> ให้ $A = \{3,4,5\}$, $B = \{a,b,c,d\}$

ดังนั้น $A \times B = \{(3,a), (3,b), (3,c), (3,d), (4,a), (4,b), (4,c),$
$(4,d), (5,a), (5,b), (5,c), (5,d)\}$

นิยาม $r_1 = \{(3,a), (4,b), (5,c)\}$

$r_2 = \{(3,a), (3,c), (4,b), (5,d)\}$

$r_3 = \{(4,b), (5,c)\}$

$r_4 = \{(3,c), (4,c), (5,c)\}$

จะได้ว่า r_1 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ
$D_{r_1} = \{3,4,5\} = A$ และไม่มี $[(x,y) \in r_1$ และ $(x,z) \in r_1]$
ซึ่ง $y \neq z$

r_2 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะมี $(3,a) \in r_2$ และ
$(3,c) \in r_2$ แต่ $a \neq c$

r_3 ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ $D_{r_3} = \{4,5\} \neq A$

r_4 เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ $D_{r_4} = \{3,4,5\} = A$
และไม่มี $[(x,y) \in r_4$ และ $(x,z) \in r_4]$ ซึ่ง $y \neq z$

<u>บทนิยาม 2.2.4</u> ถ้า A และ B เป็นเซต และ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B
แล้ว

1. f จะเป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B (function f from A onto B) ก็ต่อเมื่อ $R_f = B$

2. f จะเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป B (one-to-one function from A to B) ก็ต่อเมื่อ ถ้า $f(a_1) = f(a_2)$ แล้ว $a_1 = a_2$

3. f จะเป็นฟังก์ชันสมนัย 1-1 จาก A ไป B (one - to -one correspondence from A to B) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไปบน B

<u>ตัวอย่าง 2.2.4</u> ถ้า $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$

นิยาม $f = \{(1,4), (2,5), (3,5)\}$

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B เพราะ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $R_f = \{4,5\} = B$

<u>ตัวอย่าง 2.2.5</u> จากตัวอย่าง 2.2.3 จะได้ว่า

r_1 เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก A ไป B

<u>ตัวอย่าง 2.2.6</u> ถ้า $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$

นิยาม $f = \{(1,4), (2,6), (3,5)\}$

f เป็นฟังก์ชันสมนัย 1-1 จาก A ไป B

<u>บทนิยาม 2.2.5</u> ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C แล้วคอมโพสิตฟังก์ชันของ f และ g (Composite function of f and g) คือ ฟังก์ชันจาก A ไป C เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ " $g \circ f$ " อ่านว่า "จีโอเอฟ"

เขียนเป็นเซตได้ดังนี้

$g \circ f = \{(a,c) / a \in A, c \in C$ และมี $b \in B$ ซึ่ง $(a,b) \in f$ และ $(b, c) \in g\}$

<u>ตัวอย่าง 2.2.7</u> ให้ $A = \{5,6,7\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{1,2,3,4\}$

นิยาม f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $f = \{(5,a), (6,a), (7,b)\}$

g เป็นฟังก์ชันจาก B ไป C และ $g = \{(a,1), (b,4)\}$

จะได้ $g \circ f = \{(5,1), (6,1), (7,4)\}$

ดังนั้น $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C

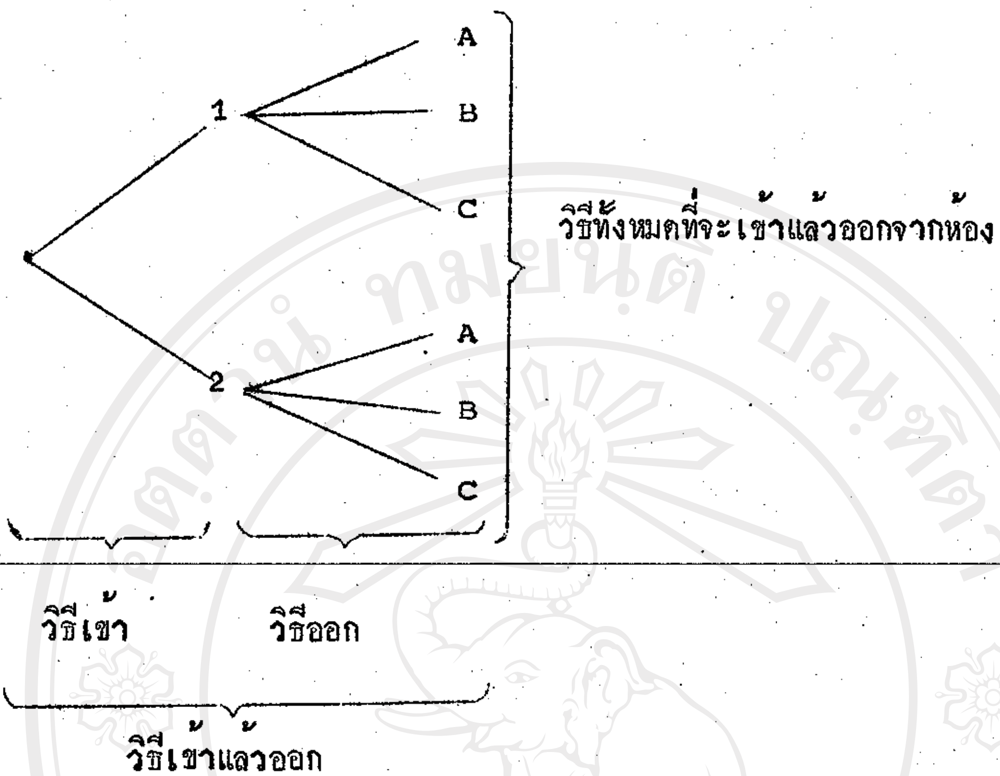
2.3 <u>การจัดลำดับและการจัดหมู่</u> (Permutation and Combination)

หลักเบื้องต้นของการนับ

สมมุติว่าห้องหนึ่งมีทางเข้า 2 ทาง คือทางที่ 1 และ 2 และทางออก 3 ทาง คือ A, B และ C (ทางเข้าห้ามออก และทางออกห้ามเข้า) มีวิธีที่จะผ่านเข้าและออกจากห้องนี้ได้ 6 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1	เข้าทางที่ 1	ออกทางที่ A
วิธีที่ 2	เข้าทางที่ 1	ออกทางที่ B
วิธีที่ 3	เข้าทางที่ 1	ออกทางที่ C
วิธีที่ 4	เข้าทางที่ 2	ออกทางที่ A
วิธีที่ 5	เข้าทางที่ 2	ออกทางที่ B
วิธีที่ 6	เข้าทางที่ 2	ออกทางที่ C

จะเห็นว่าแต่ละวิธีนั้นกระทำไม่ซ้ำกัน รวมทั้งหมดมี 6 วิธี ถ้าจะพิจารณาแยกเหตุการณ์ก็จะแยกได้ 2 เหตุการณ์ คือ เข้ากับออก วิธีเข้ามี 2 วิธี คือ เลือกเข้าได้ 2 ทาง แต่ละวิธีจะมีทางเลือกออกได้ 3 วิธี เขียนแผนภาพได้ดังนี้



รูปที่ 2.3.1

เมื่อเลือกทางเข้าทางหนึ่ง จะมีวิธีออกถึง 3 ทาง ดังนั้น เมื่อเลือกเข้าได้ 2 ทาง วิธีที่จะเข้าแล้วออกจะมีถึง $2 \times 3 = 6$ วิธี จากตัวอย่างนี้ตั้งเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎี 2.3.1 "กฎขั้นมูลฐานของการนับ" (Fundamental Principle of Counting)

ถ้ามีการกระทำสองอย่างติดต่อกัน การกระทำอย่างแรกมี n_1 วิธี และแต่ละวิธีนั้นทำให้การกระทำอย่างที่สองมี n_2 วิธี ดังนั้นการกระทำทั้งสองอย่างจะกระทำได้ถึง $n_1 \times n_2$ วิธี

ในกรณีทั่วไป ถ้ามีการกระทำหลายอย่างเกิดขึ้นติดต่อกัน หรือกระทำพร้อมกัน การกระทำอย่างแรกมี n_1 วิธี และแต่ละวิธีของการกระทำอย่างแรกนั้นเกิดการกระทำอย่างที่สอง n_2 วิธี และแต่ละวิธีของการกระทำอย่างที่สอง จะ

กระทำอย่างที่สามได้ n_3 วิธี ดังนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จนถึงการกระทำอย่างที่ k ซึ่งทำได้ n_k วิธี เพราะฉะนั้นการกระทำ k อย่างติดต่อกันนี้จะมีวิธีกระทำได้ถึง

$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ วิธี

ตัวอย่าง 2.3.1 โยนเหรียญ 3 อัน พร้อมกัน จะเกิดกรณีต่าง ๆ ได้กี่วิธี

วิธีทำ แบ่งการกระทำเป็น 3 อย่าง คือ

1. เหรียญอันที่ 1 เกิดกรณีต่าง ๆ 2 กรณี
2. เหรียญอันที่ 2 เกิดกรณีต่าง ๆ 2 กรณี
3. เหรียญอันที่ 3 เกิดกรณีต่าง ๆ 2 กรณี

เพราะฉะนั้น การกระทำ 3 อย่างพร้อมกัน จะเกิดกรณีต่าง ๆ ได้

$2 \times 2 \times 2 = 8$ วิธี

การจัดลำดับ (permutation)

ตัวอย่าง 2.3.2 มีตัวเลข 3 ตัว คือ 4, 5 และ 6 สามารถนำมาจัดเรียงลำดับต่าง ๆ ได้ดังนี้

กรณีที่ 1 จัดเรียงลำดับทีละ 1 ตัว ได้ 3 วิธี คือ

4 , 5 , 6

กรณีที่ 2 จัดเรียงลำดับทีละ 2 ตัว

ตำแหน่งที่ 1 เลือกตัวเลขได้ 3 วิธี

ตำแหน่งที่ 2 เลือกตัวเลขได้อีก 2 วิธี เพราะตัวเลขตัวหนึ่งถูกเลือกไปแล้ว

ดังนั้นจัดเรียงลำดับทีละ 2 ตัว ได้ $3 \times 2 = 6$ วิธี คือ

45 , 46 , 54 , 56 , 64 , 65

<u>กรณีที่ 3</u> จัดเรียงลำดับทีละ 3 ตัว

ตำแหน่งที่ 1 เลือกตัวเลขได้ 3 วิธี

ตำแหน่งที่ 2 เลือกตัวเลขได้อีก 2 วิธี เพราะตัวเลขตัวหนึ่งถูกเลือกไปแล้ว

ตำแหน่งที่ 3 เลือกตัวเลขได้อีก 1 วิธี

ดังนั้นจัดเรียงลำดับทีละ 3 ตัว ได้ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี คือ

456 , 465 , 546 , 564 , 645 , 654

จากตัวอย่างที่กล่าวมานี้สามารถเขียนเป็นบทนิยามได้ดังนี้

<u>บทนิยาม 2.3.1</u> มีของที่แตกต่างกัน n สิ่ง นำมาจัดทีละ r สิ่ง โดยที่ $r \leq n$ โดยถือลำดับเป็นสำคัญ เรียกว่าการจัดลำดับ

ในกรณีทั่วไป ถ้ามีของ n สิ่ง นำมาจัดลำดับคราวละ r สิ่ง ($r \leq n$) จากทฤษฎี 2.3.1 จะได้ว่า

วิธีของการจัดลำดับทั้งหมดจะเท่ากับ $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$

เพื่อสะดวกในการเขียนจะเขียนแทน $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ ด้วย $p(n, r)$ หรือ ${}^{n}P_{r}$

ซึ่งสามารถแสดงการพิสูจน์ให้เห็นจริงได้ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 2.3.2</u> มีสิ่งของที่แตกต่างกัน n สิ่ง นำมาจัดลำดับคราวละ r สิ่ง ($r \leq n$) จะกระทำได้ ${}^{n}P_{r}$ หรือ $P(n, r)$ วิธี โดยที่

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

<u>พิสูจน์</u> มีสิ่งของ n สิ่งที่แตกต่างกัน นำมาจัดคราวละ r สิ่ง ($r \leq n$) มีวิธีคิดดังนี้

ตำแหน่งที่ 1 เลือกสิ่งของมาลงได้ n วิธี

ตำแหน่งที่ 2 เลือกสิ่งของมาลงได้ $n-1$ วิธี เพราะมีสิ่งหนึ่งถูกเลือกไปแล้ว

ตำแหน่งที่ 3 เลือกสิ่งของมาลงได้ $n-2$ วิธี

....

ตำแหน่งที่ r เลือกสิ่งของมาลงได้ $n-(r-1) = n-r+1$ วิธี

จากทฤษฎี 2.3.1

ดังนั้น สิ่งของ n สิ่ง นำมาจัดลำดับคราวละ r สิ่ง คือนำมาวาง ตามตำแหน่งต่าง ๆ r ตำแหน่ง มีวิธีจัดกระทำได้

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \text{ วิธี}$$

ในกรณี $r = n$ คือมีสิ่งของ n สิ่ง นำมาจัดลำดับคราวละทั้งหมด จะกระทำได้ $P(n, n)$ วิธี ซึ่งจะได้

$$P(n,n) = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

เนื่องจากมีการเขียนสูตรที่เป็นผลคูณของจำนวนเต็มบวกต่าง ๆ ที่น้อยลงทีละหนึ่งบ่อยครั้ง จึงกำหนดสัญลักษณ์ เพื่อสะดวกในการเขียน เรียกว่าแฟคทอเรียล (factorial) ดังนี้

ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n!$ หรือ $\underline{|n}$ อ่านว่า n - แฟคทอเรียล หรือแฟคทอเรียล n กล่าวคือ

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots (n-1)n = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$$

เช่น $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$

$5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

และกำหนดว่า $0! = 1$

โดยการกำหนดสัญลักษณ์ดังกล่าว จึงเขียนสัญลักษณ์ $P(n, r)$ ในรูปของแฟคทอเรียลได้ดังนี้

1. $P(n,n) = n(n-1)(n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

2. จาก $P(n,r) = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

จะได้ $$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่าง 2.3.3 มีอักษร 5 ตัว คือ a, b, c, d และ e นำมาจัดลำดับทีละ 3 ตัว จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ $n = 5, \quad r = 3$

ดังนั้นวิธีที่จะจัดได้ทั้งหมด $= P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$ วิธี

การจัดลำดับของสิ่งของที่ไม่ต่างกันทั้งหมด

สมมุติว่ามีอักษรอยู่ 5 ตัวคือ a, a, a, b, b ซึ่งมี a อยู่ 3 ตัว และมี b อยู่ 2 ตัว เมื่อนำอักษรทั้งหมดนี้มาจัดเรียงลำดับ จะได้วิธีต่าง ๆ 10 วิธีดังนี้

aaabb	bbaaa	ababa
aabab	babaa	abbaa
abaab	baaba	aabba
baaab		

ถ้าใช้ความรู้เรื่องการจัดลำดับมาช่วยในการคิดคำนวณจะได้ดังนี้

ถ้าถือว่า a ทุกตัวเหมือนกัน และ b ทุกตัวเหมือนกัน สมมุติว่านำอักษรทั้งหมดมาจัดได้ x วิธี

ถ้าถือว่า a แต่ละตัวไม่เหมือนกันคือเป็น a_1, a_2 และ a_3

และ b แต่ละตัวไม่เหมือนกันคือเป็น b_1 และ b_2

แต่ละวิธีที่จัดได้สามารถสลับที่ได้อีก $3!\,2!$ วิธี

ดังนั้นวิธีที่จะจัดได้ทั้งหมดเป็น $x \cdot 3!\,2!$ วิธี

แต่การจัดลำดับของทีละ 5 สิ่งจากของทั้งหมด 5 สิ่ง จัดได้ $5!$ วิธี

เพราะฉะนั้น $x \cdot 3!\,2! = 5!$

$$x = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

จากตัวอย่างที่ยกมานี้ สามารถเขียนเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

<u>ทฤษฎี 2.3.3</u> ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง แบ่งเป็น k ชนิด แต่ละชนิดซึ่งเหมือนกันมีจำนวน $n_1, n_2, \ldots, n_k$ สิ่ง นำมาจัดลำดับคราวละทั้งหมด กระทำได้

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_k!} \text{ วิธี}$$

<u>พิสูจน์</u> สิ่งของทั้งหมดมี n สิ่ง แบ่งเป็น k ชนิด ชนิดที่ 1 ซึ่งเหมือนกันมีจำนวน n_1 สิ่ง ชนิดที่ 2 มี n_2 สิ่ง .... ชนิดที่ k มี n_k สิ่ง โดยที่ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ นำมาจัดลำดับทั้งหมด

สมมุติว่าจัดลำดับสิ่งของ k ชนิดได้ x วิธี ซึ่งจะพบว่า

ชนิดที่ 1 สิ่งของที่เหมือนกัน n_1 สิ่งซึ่งถ้าไม่เหมือนกันจะจัดลำดับได้ $n_1!$ วิธี

ชนิดที่ 2 สิ่งของที่เหมือนกัน n_2 สิ่งซึ่งถ้าไม่เหมือนกันจะจัดลำดับได้ $n_2!$ วิธี

....

ชนิดที่ k สิ่งของที่เหมือนกัน n_k สิ่งซึ่งถ้าไม่เหมือนกันจะจัดลำดับได้ $n_k!$ วิธี

ดังนั้นสิ่งของทั้งหมด ถ้าไม่เหมือนกัน จะจัดลำดับได้

$$x\, n_1!\, n_2!\, \ldots\, n_k! \text{ วิธี}$$

แต่ถ้าคิดจากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง (k ชนิด) ถ้าไม่เหมือนกันจะจัดลำดับได้ $n!$ วิธี

ดังนั้น $\quad x\, n_1!\, n_2! \cdots n_k! = n!$

นั่นคือ $\quad x = \dfrac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$

ตัวอย่าง 2.3.4 มีธงสีแดง 2 ผืน สีขาว 3 ผืน สีเหลือง 1 ผืน นำมาทั้งหมด มาเรียงกันเป็นสัญญาณต่าง ๆ ได้กี่แบบ

วิธีทำ มีธงทั้งหมด 6 ผืน ที่ซ้ำกันคือ สีแดง 2 ผืน สีขาว 3 ผืน

ดังนั้น สลับที่เป็นสัญญาณต่าง ๆ ได้ถึง $\dfrac{6!}{2!\,3!\,1!} = 60$ วิธี

การจัดหมู่ (Combination)

สมมุติว่ามีอักษร 4 ตัวคือ a, b, c, d นำมาจัดเป็นกลุ่มซึ่งมีอักษร 3 ตัว โดยถือว่าการสลับที่ภายในกลุ่มไม่เป็นวิธีที่แตกต่างจากเดิม จะจัดได้ 4 วิธี ดังนี้

abc abd acd bcd

การจัดเป็นกลุ่มโดยไม่ถือเอาการสลับที่ภายในกลุ่มเป็นวิธีที่แตกต่างไปจากเดิมดังนี้เรียกว่า การจัดหมู่

ในกรณีทั่วไป ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง นำมาจัดหมู่คราวละ r สิ่ง ($r \leq n$) จำนวนวิธีทั้งหมดของการจัดหมู่เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ หรือ ${}^{n}C_{r}$ หรือ $C(n, r)$

<u>ทฤษฎี 2.3.4</u> มีสิ่งของ n สิ่ง นำมาจัดหมู่คราวละ r สิ่ง จะกระทำได้ $\binom{n}{r}$ วิธี

โดย $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

<u>พิสูจน์</u> การนำสิ่งของมาจัดหมู่ที่ละ r สิ่งจากของทั้งหมด n สิ่ง
สมมุติว่ามีวิธีที่จัดได้ทั้งหมด x วิธี

ดังนั้น $\binom{n}{r} = x$

ถ้านำแต่ละวิธีของการจัดหมู่นั้นมาจัดลำดับ
ในแต่ละวิธีนั้นจะสลับที่กันได้อีก $r!$ วิธี
ดังนั้นการจัดลำดับจัดได้ทั้งหมด $r!\cdot x$ วิธี
แต่การจัดลำดับของที่ละ r สิ่งจากของ n สิ่งมี $P(n, r)$ วิธี

เพราะฉะนั้น $P(n,r) = r!\cdot x$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = r!\cdot x$$

$$x = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

นั่นคือ $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

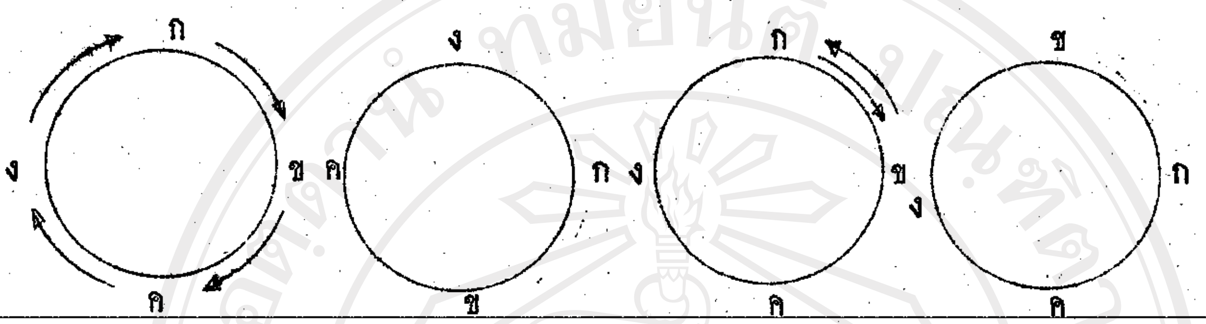
<u>ตัวอย่าง 2.3.5</u> มีอักษร 5 ตัวคือ a, b, c, d และ e นำมาจัดหมู่ที่ละ 3 ตัว จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

$n = 5 \ , \ r = 3$

ดังนั้นวิธีที่จะจัดได้ทั้งหมด $= \binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$ วิธี

<u>การจัดลำดับเป็นวงกลม</u>

<u>ตัวอย่าง 2.3.6</u> สมมุติว่ามีคน 4 คน คือ ก, ข, ค และ ง นั่งล้อมเป็นวงกลม เขาเหล่านั้นจะมีวิธีสลับที่เป็นวิธีต่าง ๆ กัน ได้กี่วิธี ถ้าการเปลี่ยนตำแหน่งไปทั้งชุดโดยไม่สลับกันถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน ดังรูปที่ 2.3.2



ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน ถือว่าเป็นวิธีต่างกัน

<u>รูปที่ 2.3.2</u>

วิธีที่จะเป็นไปได้ทั้งหมดมี = 4! = 24 วิธี ดังนี้

กขคง	กขงค	กงขค	กงคข	กคขง	กคงข
ขคงก	ขงคก	ขคกง	ขกงค	ขงกค	ขกคง
คงกข	คกขง	คกงข	คขกง	คขงก	คงขก
งกขค	งคกข	งขคก	งคขก	งกคข	งขกค

แต่การจัดลำดับเป็นวงกลม ทั้ง 4 วิธีในหลักที่ 1 ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

ทั้ง 4 วิธีในหลักที่ 2 ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

....

ทั้ง 4 วิธีในหลักที่ 6 ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ต่างกันทั้งหมดจะมี 6 วิธีเท่านั้นคือ กขคง, กขงค, กงขค, กงคข , กคขง และ กคงข.

จากตัวอย่าง 2.3.6

มีวิธีคิดหาจำนวนวิธีที่ต่างกันดังนี้

ถ้าถือว่าทุกวิธีที่จัดได้ต่างกันทั้งหมด จะจัดได้ $= 4!$ วิธี

ถ้าถือว่าการเปลี่ยนตำแหน่งไปทั้งชุด โดยไม่สลับกันถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน สมมุติว่าจัดได้จำนวนวิธีที่ต่างกัน $= x$ วิธี

แต่ละวิธีที่ต่างกันใน x วิธีนี้ สามารถเปลี่ยนตำแหน่งไปทั้งชุดได้เป็น 4 วิธี

ดังนั้น วิธีที่จะจัดได้ทั้งหมด $= 4x$ วิธี

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
4x &= 4! \\
x &= \frac{4!}{4} \\
&= 3! \\
&= (4-1)!
\end{aligned}
$$

จากตัวอย่างที่กล่าวมานี้สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

<u>ทฤษฎี 2.3.5</u> มีสิ่งของ n สิ่งต่าง ๆ กัน นำมาจัดเรียงล้อมเป็นวงกลม จะมีวิธีจัดลำดับเป็นวิธีต่าง ๆ ได้ $(n-1)!$ วิธี

<u>พิสูจน์</u>

ถ้าถือว่าทุกวิธีที่จัดได้ต่างกันทั้งหมด จะจัดได้ $= n!$ วิธี

ถ้าถือว่าการเปลี่ยนตำแหน่งไปทั้งชุด โดยไม่สลับกันถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน

สมมุติว่าจัดได้จำนวนวิธีที่ต่างกัน $= x$ วิธี

แต่ละวิธีที่ต่างกันใน x วิธีนี้ สามารถเปลี่ยนตำแหน่งไปทั้งชุดได้เป็น n วิธี

ดังนั้น วิธีที่จะจัดได้ทั้งหมด $= nx$ วิธี

เพราะฉะนั้น $nx = n!$

$$x = \frac{n!}{n}$$

$$= \frac{(n-1)!\,n}{n}$$

$$= (n-1)!$$

นั่นคือ ถ้านำของ n สิ่งต่าง ๆ กัน มาจัดเรียงล้อมเป็นวงกลม จะมีวิธีจัดลำดับเป็นวิธีต่าง ๆ ได้ $(n-1)!$ วิธี
