บทที่ 3
ทฤษฎีความน่าจะเป็น

3.1 ประวัติของวิชาความน่าจะเป็นโดยสังเขป

การศึกษาเกี่ยวกับวิชาความน่าจะเป็นมีมาตั้งแต่สมัยโบราณ แต่มาเริ่มศึกษากันอย่างจริงจังในศตวรรษที่ 16 ในปี ค.ศ.1520 มีนักคณิตศาสตร์ ชื่อ Gerolamo Cardano ได้เขียนหนังสือชื่อ "Liber de Ludo Aleae" (The Book on Games of Chance) ในราวปี ค.ศ.1630 Galileo ได้ศึกษาอย่างจริงจังเกี่ยวกับเกมลูกเต๋า แต่ก็ยังไม่มีใครให้ความสนใจ จนกระทั่งปี ค.ศ.1654 ได้มีนักคณิตศาสตร์ 2 คน คือ Blaise Pascal และ Pierre de Fermat ทั้งสองคนได้ถกปัญหาเกี่ยวกับแง่คิดมูลฐานของความน่าจะเป็น และสร้างเทคนิคในการหาคำตอบสำหรับปัญหาในการเล่นลูกเต๋า และในเกมอื่น ๆ ที่เกี่ยวกับโอกาส (games of chance) (ปีนี้นับว่าเป็นปีเริ่มต้นของวิชาทฤษฎีความน่าจะเป็น) การริเริ่มนี้เป็นไปอย่างมีระบบ ทำให้นักคณิตศาสตร์อื่น ๆ เริ่มหันมาสนใจวิชานี้ และด้วยเหตุนี้ Pascal และ Fermat จึงได้ชื่อว่าเป็นผู้ริเริ่มวิชาทฤษฎีความน่าจะเป็น

บุคคลสำคัญในวงการคณิตศาสตร์ที่ได้ศึกษาทฤษฎีความน่าจะเป็นต่อจาก Pascal และ Fermat ได้แก่ Huygens, Leibnitz, Bernoulli และ de moivre แต่ยังคงเป็นการศึกษาปัญหาของเกมต่าง ๆ ในบ่อนการพนันอยู่ จนกระทั่งปี ค.ศ.1812 Pierre de Laplace (ค.ศ.1749-1827) ได้เขียนหนังสือชื่อ " Théorie Analytique des Probabilities" หนังสือเล่มนี้ได้ศึกษากว้างขวางออกไปถึงสิ่งอื่น ๆ นอกเหนือจากเดิม ซึ่งมีการศึกษาอย่างแคบ ๆ เฉพาะในเรื่องการพนันเท่านั้น และแสดงให้เห็นว่าทฤษฎีความน่าจะเป็น เป็นแขนง

วิชาที่สำคัญของคณิตศาสตร์ และมีประโยชน์ต่อวิชาวิทยาศาสตร์หลายแขนง โดยเฉพาะพันธุศาสตร์ และวิชาอื่น ๆ เช่น เศรษฐศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น

ในปี ค.ศ.1933 A.M. Kolmogorov ได้เขียนบทความเรื่อง " Foundation of Probability " และให้คำจำกัดความของความน่าจะเป็นอย่างรัดกุม และเป็นที่ยึดถือใช้กันในปัจจุบันนี้

3.2 ความน่าจะเป็น (Probability)

ในการศึกษาเรื่องความน่าจะเป็นที่จะกล่าวต่อไปนี้จะอาศัยความรู้ต่าง ๆ ในเรื่องเซตมาอธิบายคำต่าง ๆ ในเรื่องความน่าจะเป็น ซึ่งความหมายของคำต่าง ๆ ในเรื่องเซตกับความหมายของคำต่าง ๆ ในเรื่องความน่าจะเป็นสามารถเปรียบเทียบกันได้ดังตาราง 3.2.1 ดังนี้

ตารางการเปรียบเทียบความหมายของคำต่าง ๆ ในเรื่องเซตที่มีความหมายตรงกับคำในเรื่องความน่าจะเป็น

เซต	ความน่าจะเป็น
1. เอกภพสัมพัทธ์	แซมเปิลสเปซ
2. สับเซตของเอกภพสัมพัทธ์	เหตุการณ์
3. สมาชิก	จุดตัวอย่าง
4. ยูเนียนของเซต 2 เซต	ยูเนียนของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์
5. อินเตอร์เซคชันของเซต 2 เซต	อินเตอร์เซคชันของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์
6. คอมพลีเมนต์ของเซต	คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์
7. เซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน	เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ตาราง 3.2.1

ก่อนที่จะศึกษาเรื่องความน่าจะเป็น จะขอแนะนำให้ผู้ศึกษารู้จักกับคำบางคำที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นดังนี้

<u>บทนิยาม 3.2.1</u> การทดลองสุ่ม (Random experiment) คือการทดลองซึ่งเราทราบว่าผลที่ได้จะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถทำนายผลที่เกิดขึ้นว่าจะเป็นอะไร ในบรรดาผลที่ได้ที่อาจเป็นได้เหล่านั้น

<u>ตัวอย่าง 3.2.1</u> ทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย สมมุติว่าลูกเต๋าหงายหน้า x x นี้ อาจเป็น 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 ก็ได้ แต่เราไม่สามารถทำนายได้ว่าลูกเต๋าจะหงายหน้าอะไรแน่ใน 6 หน้านี้ การทดลองนี้เป็นการทดลองสุ่ม

<u>บทนิยาม 3.2.2</u> ถ้า $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก) เป็นกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองอย่างหนึ่ง แล้ว $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ เรียกว่า แซมเปิ้ลสเปซ (Sample space) ของการทดลองนั้น และ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เรียกว่า จุดตัวอย่าง (sample point)

<u>ตัวอย่าง 3.2.2</u> จากตัวอย่าง 3.2.1

มีแซมเปิ้ลสเปซเป็น $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

จุดตัวอย่างคือ 1, 2, 3, 4, 5 และ 6

ในการทดลองอย่างหนึ่งนั้นอาจมีแซมเปิ้ลสเปซมากกว่าหนึ่งแซมเปิ้ลสเปซก็ได้ ขึ้นอยู่กับการสนใจของเรา

จากตัวอย่าง 3.2.1 ถ้าเราสนใจว่าจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงายจะเป็นจำนวนคู่ หรือจำนวนคี่ก็จะได้แซมเปิ้ลสเปซเป็น S = { จำนวนคู่, จำนวนคี่ }

ในการทดลองอย่างหนึ่ง แซมเปิ้ลสเปซที่ได้อาจเป็นเซตจำกัด (finite set) หรือเซตอนันต์ (infinite set) ก็ได้

กรณีที่แซมเปิ้ลสเปซเป็นเซตอนันต์ เราให้นิยามได้ดังนี้

<u>บทนิยาม 3.2.3</u> ถ้า $a_1, a_2, \ldots$ เป็นกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองอย่างหนึ่ง แล้ว $S = \{a_1, a_2, \ldots\}$ เรียกว่าแซมเปิ้ลสเปซของการทดลองนั้น และ $a_1, a_2, \ldots$ เรียกว่าจุดตัวอย่าง

<u>ตัวอย่าง 3.2.3</u> ในการทดลองโยนเหรียญหนึ่งอัน จนกระทั่งเหรียญหงายหัวเป็นครั้งแรก

$$S = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots\}$$

จุดตัวอย่างคือ H, TH, TTH, ...

<u>ตัวอย่าง 3.2.4</u> ในการเลือกจำนวนเต็มบวกหนึ่งตัว จากจำนวนเต็มบวกทั้งหมด จะมีแซมเปิ้ลสเปซเป็น $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$

จุดตัวอย่างคือ 1, 2, 3, ...

การศึกษาต่อไปนี้จะศึกษาอย่างละเอียดเฉพาะแซมเปิ้ลสเปซที่มีจำนวนสมาชิกจำกัดเท่านั้น ดังนั้นต่อไปนี้ถ้ากล่าวถึงแซมเปิ้ลสเปซให้หมายถึงแซมเปิ้ลสเปซที่มีจำนวนสมาชิกจำกัดเท่านั้น

<u>บทนิยาม 3.2.4</u> ในการทดลองอย่างหนึ่ง ถ้า S เป็นแซมเปิ้ลสเปซของการทดลอง และ $E \subseteq S$ แล้ว E เรียกว่าเหตุการณ์ (Event)

<u>ตัวอย่าง 3.2.5</u> ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็นจำนวนคี่

ดังนั้น $A = \{1,3,5\}$

ถ้า B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 2 หรือ 6

ดังนั้น $B = \{2,6\}$

จะเห็นว่า $A \subset S$ และ $B \subset S$

<u>บทนิยาม 3.2.5</u> ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิ้ลสเปซ S และ $A \cap B = \emptyset$ แล้ว เรียก A และB ว่าเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive event)

<u>ตัวอย่าง 3.2.6</u> จากตัวอย่าง 3.2.5 เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน เพราะว่า $A \subset S$, $B \subset S$ และ $A \cap B = \emptyset$

<u>บทนิยาม 3.2.6</u> เหตุการณ์เดี่ยว (Simple event) คือเหตุการณ์ที่บรรจุเพียงจุดตัวอย่างเดียวเท่านั้น

<u>ตัวอย่าง 3.2.7</u> ในการโยนเหรียญหนึ่งอัน สังเกตลักษณะหน้าที่เหรียญหงาย

ถ้าให้ H แทน กรณีที่เหรียญหงายหัว

T แทน กรณีที่เหรียญหงายก้อย

$$S = \{H, T\}$$

เหตุการณ์เดี่ยวคือ {H} และ {T}

<u>บทนิยาม 3.2.7</u> ในการทดลองอย่างหนึ่ง มีการกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ในการทดลองนั้น n_A และ n_B เป็นจำนวนครั้งที่เหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้น ตามลำดับ $f_A = \frac{n_A}{n}$ เรียกว่าความถี่สัมพัทธ์ (Relative frequency) ของเหตุการณ์ A

ซึ่ง f_A จะสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

ก. $0 \leq f_A \leq 1$

ข. $f_A = 1$ ก็ต่อเมื่อ A เกิดขึ้นทุก ๆ ครั้งในการทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง

ค. $f_A = 0$ ก็ต่อเมื่อ A ไม่เกิดขึ้นเลยในการทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง

ง. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน และถ้า $f_{A \cup B}$ เป็นความถี่สัมพัทธ์ของ $A \cup B$ แล้ว $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

จ. f_A ที่ได้จากการทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง เมื่อ n มีค่ามาก ๆ f_A จะเข้าใกล้ค่าคงที่ตัวหนึ่ง ค่าคงที่นี้คือ ค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(A)

<u>บทนิยาม 3.2.8</u> ในการทดลองอย่างหนึ่ง ให้ S เป็นแซมเปิ้ลสเปซที่ได้จากการทดลองนี้ แต่ละเหตุการณ์ A จะเกี่ยวข้องกับจำนวนจริงตัวหนึ่ง กำหนดโดย P(A) และเรียกว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A

เนื่องจากค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A กำหนดจากค่าความถี่สัมพัทธ์ ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A จึงมีคุณสมบัติตามคุณสมบัติของความถี่สัมพัทธ์ ดังนี้

ก. $0 \leq P(A) \leq 1$

ข. $P(A) = 1$ ถ้าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแน่ ๆ

ค. $P(A) = 0$ ถ้าเหตุการณ์ A ไม่สามารถเกิดขึ้นได้

ง. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้ว

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

<u>บทนิยาม 3.2.9</u> ทุก ๆ เหตุการณ์เดี่ยวในแซมเปิ้ลสเปซหนึ่ง มีค่าความน่าจะเป็นเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จุดตัวอย่างในแซมเปิ้ลสเปซนั้นมีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน (equally likely) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เดี่ยวนี้เรียกว่าความน่าจะเป็นเบื้องต้น (Elementary Probability)

<u>ตัวอย่าง 3.2.8</u> โยนลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ทุกจุดตัวอย่างใน S มีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน ดังนั้น

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

<u>ตัวอย่าง 3.2.9</u> ในการโยนเหรียญ 2 อัน 1 ครั้ง สังเกตลักษณะหน้าที่เหรียญหงาย

ถ้าให้ HT แทน กรณีที่เหรียญอันที่หนึ่งหงายหัว และเหรียญอันที่สองหงายก้อย

ดังนั้น $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ทุก ๆ จุดตัวอย่าง ใน S มีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน

ดังนั้น $P(\{HH\}) = P(\{HT\}) = P(\{TH\}) = P(\{TT\}) = \frac{1}{4}$

บทนิยาม 3.2.10 ถ้า S เป็นแซมเปิ้ลสเปซของการทดลองอย่างหนึ่ง ซึ่งแต่ละจุดตัวอย่าง ใน S มีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน และ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ใน S แล้ว $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

เมื่อ $n(A)$ และ $n(S)$ เป็นจำนวนสมาชิกใน A และ S ตามลำดับ

ตัวอย่าง 3.2.10 ในถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 20 ลูก เป็นสีแดง 12 ลูก สีเขียว 8 ลูก หยิบลูกแก้วจากถุงขึ้นมา 1 ลูกอย่างเดาสุ่ม ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีแดง จงหา P(A)

ลูกแก้วทุกลูกมีโอกาสถูกหยิบเท่ากัน

ดังนั้น $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6$

ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิ้ลสเปซ S จะให้คำนิยามต่าง ๆ ดังนี้

บทนิยาม 3.2.11 $A \cup B$ (อ่านว่า " A ยูเนียน B ") เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วย จุดตัวอย่างที่อยู่ใน A หรือ B

$A \cup B$ เรียกว่ายูเนียนของเหตุการณ์ A และ B

บทนิยาม 3.2.12 $A \cap B$ (อ่านว่า " A อินเตอร์เซคชันกับ B ") เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยจุดตัวอย่างทั้งหมดที่อยู่ใน A และ B

$A \cap B$ เรียกว่า อินเตอร์เซคชันของเหตุการณ์ A และ B

บทนิยาม 3.2.13 $\bar{A}$ (อ่านว่า "คอมพลีเมนต์ของ A ") เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยจุดตัวอย่างทั้งหมดที่อยู่ใน S แต่ไม่อยู่ใน A

$\bar{A}$ อ่านว่า คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ A

$\bar{A}$ เกิดขึ้นเมื่อใดก็ตามที่ A ไม่เกิดขึ้น

<u>ตัวอย่าง 3.2.11</u> ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มน้อยกว่า 5 ,

$A = \{1,2,3,4\}$

B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มอยู่ระหว่าง 2 และ 6,

$B = \{3,4,5\}$

$\therefore$ $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มน้อยกว่า 6,

$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

$A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มี 3 แต้ม หรือ 4 แต้ม,

$A \cap B = \{3,4\}$

$\bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มมากกว่า 4,

$\bar{A} = \{5,6\}$

<u>ทฤษฎี 3.2.1</u> ถ้า ϕ เป็นเซตว่าง แล้ว $P(\emptyset) = 0$

<u>พิสูจน์</u>

<u>วิธีที่ 1</u> เพราะว่า ϕ เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิก ฉะนั้น $n(\emptyset) = 0$

ให้ S เป็นแซมเปิ้ลสเปซ ฉะนั้น $n(S) > 0$

เพราะฉะนั้น $P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = 0$

<u>วิธีที่ 2</u> พิสูจน์โดยใช้คุณสมบัติของเซต

อาจเขียนแต่ละเหตุการณ์ A เป็น $A = A \cup \emptyset$

เนื่องจาก A และ ϕ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน
จากนิยาม 3.2.8 ข้อ ง. จะได้

$$P(A) = P(A \cup \emptyset) = P(A) + P(\emptyset)$$

เพราะฉะนั้น $P(\emptyset) = 0$

<u>ตัวอย่าง 3.2.12</u> ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มี 7 แต้ม จงหา P(A)

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

เหตุการณ์ A ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลย เพราะลูกเต๋าไม่มีหน้าที่มี 7 แต้ม

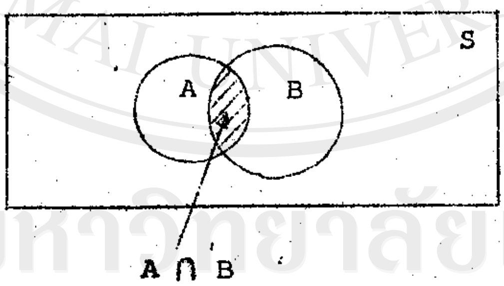
$$A = \emptyset$$

โดยทฤษฎี 3.2.1 จะได้ $P(A) = 0$

<u>ทฤษฎี 3.2.2</u> ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในแซมเปิ้ลสเปซ S แล้ว

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

<u>พิสูจน์</u>
<u>วิธีที่ 1</u>



<u>รูปที่ 3.2.1</u>

เมื่อ A และ B เป็นเหตุการณ์

จากบทนิยาม 3.2.10 จะได้ $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(S)}$

แต่เราทราบว่า

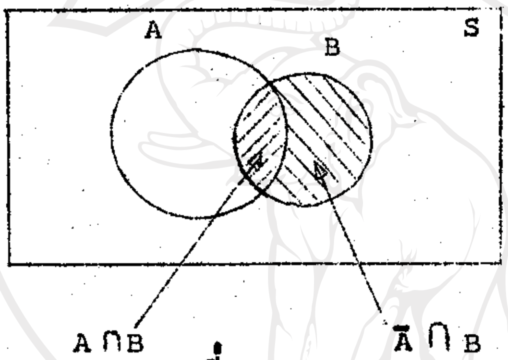
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

เอา $n(S) > 0$ หารตลอด

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>วิธีที่ 2</u> พิสูจน์โดยใช้คุณสมบัติของเซต



<u>รูปที่ 3.2.2</u>

เพราะว่า $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$

และ $B = (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \bar{A})$ ...(1) โดยบทนิยาม 3.2.8 ข้อ ง

$P(B) = P(A \cap B) + P(B \cap \bar{A})$ ..(2) โดยบทนิยาม 3.2.8 ข้อ ง

(1) - (2);

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>หมายเหตุ</u> ทฤษฎีที่ 3.2.2 นี้เป็นการขยาย บทนิยาม 3.2.8 ข้อ ง. นั่นเอง

ถ้า $A \cap B = \emptyset$ เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

โดยทฤษฎี 3.2.1

จะได้ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ซึ่งก็คือบทนิยาม 3.2.8 ข้อ ง. นั่นเอง

<u>ตัวอย่าง 3.2.13</u> โยนลูกเต๋า 2 ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองจะหงายหน้าที่ได้จำนวนแต้มรวมกันเป็น 6 B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าลูกแรกหงายหน้าที่มีหนึ่งแต้ม จงหา

ก. $P(A)$

ข. $P(B)$

ค. $P(A \cap B)$

ง. $P(A \cup B)$

<u>วิธีทำ</u> S มีสมาชิก $= 6 \times 6 = 36$ แบบ คือ

$S = \{(1,1);\ (1,2), \ldots, (6,6)\}$

$A = \{(2,4), (4,2), (3,3), (1,5), (5,1)\}$

$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)\}$

$A \cap B = \{(1,5)\}$

$n(S) = 36,\ n(A) = 5,\ n(B) = 6,\ n(A \cap B) = 1$

ก. $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{5}{36}$

ข. $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

ค. $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{1}{36}$

ง. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ โดยทฤษฎี 3.2.2

$$= \frac{5}{36} + \frac{6}{36} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

<u>ทฤษฎี 3.2.3</u> ถ้า A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในแซมเปิ้ลสเปซ S แล้ว $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$

$$- P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

<u>พิสูจน์</u>

เพราะว่า $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$

จากทฤษฎี 3.2.2 จะได้ว่า

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C)$$

$$- \left[P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)\right]$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C)$$

$$- P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

เพราะฉะนั้น

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C)$$

$$- P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

<u>บทแทรก 3.2.1</u> ถ้า A, B และ C เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ดังนั้น $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C = \emptyset$ และ $P(\emptyset) = 0$

จะได้ $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

<u>หมายเหตุ</u> ทฤษฎี 3.2.3 นี้สามารถขยายออกไปได้อีก

โดยให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ n เหตุการณ์ใด ๆ แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j=2}^{n} P(A_i \cap A_j)$$

$$+ \sum_{i<j<r=3}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_r) + \ldots$$

$$+ (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

<u>บทแทรก 3.2.2</u> ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

แล้ว $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

<u>ตัวอย่าง 3.2.14</u> โยนลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 1 ลูก ลงบนพื้น สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มมากกว่า 2 B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มหารด้วย 3 ลงตัว และ C เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็นเลขคู่ จงหา

ก. $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$

ข. $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$, $P(A \cap C)$

ค. $P(A \cap B \cap C)$ และหา $P(A \cup B \cup C)$ โดยใช้สูตรในทฤษฎี 3.2.3

<u>วิธีทำ</u>

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A = \{3,4,5,6\}, \quad B = \{3,6\}, \quad C = \{2,4,6\}$$

$$A \cap B = \{3,6\}, \quad B \cap C = \{6\}, \quad A \cap C = \{4,6\}$$

$$A \cap B \cap C = \{6\}, \quad A \cup B \cup C = \{2,3,4,5,6\}$$

จากนิยามที่ 3.2.10 จะได้

ก. $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.67$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$

$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

ข. $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$, $P(B \cap C) = \frac{1}{6} = 0.17$

$P(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.33$

ค. $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{6} = 0.17$

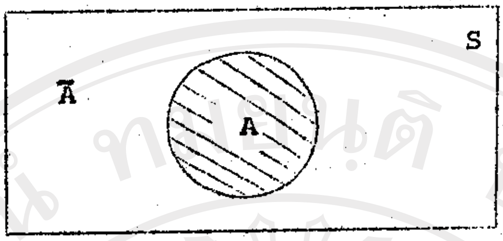
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} - \frac{1}{6} - \frac{2}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

<u>ทฤษฎี 3.2.4</u> ถ้า $\bar{A}$ เป็นคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ A แล้ว

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



<u>รูปที่ 3.2.3</u>

<u>พิสูจน์</u>

เมื่อ S เป็นเอกภพสัมพัทธ์

$\bar{A}$ เป็นคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ A

เพราะฉะนั้น $A \cup \bar{A} = S$ และ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

ดังนั้น A และ $\bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

จะได้ว่า $P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$

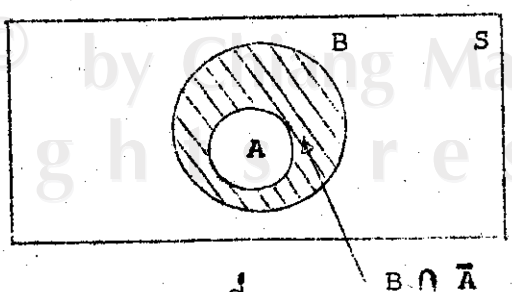
แต่ $P(S) = 1$

ดังนั้น $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

นั่นคือ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

<u>ทฤษฎี 3.2.5</u> ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $P(A) \leq P(B)$

<u>พิสูจน์</u>



<u>รูปที่ 3.2.4</u>

วิธีที่ 1

เนื่องจาก $A \subseteq B$ ดังนั้น $n(A) \leq n(B)$

$$\frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \; ; \; n(S) > 0$$

$$P(A) \leq P(B)$$

วิธีที่ 2

เพราะว่า $B = A \cup (B \cap \bar{A})$

แต่ A และ $B \cap \bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ดังนั้น $P(B) = P(A) + P(B \cap \bar{A}) \geq P(A)$

เนื่องจาก $P(B \cap \bar{A}) \geq 0$

นั่นคือ $P(A) \leq P(B)$

ตัวอย่าง 3.2.15 จากโจทย์ในตัวอย่าง 3.2.14

$A = \{3,4,5,6\}$, $B = \{3,6\}$

จะเห็นว่า $B \subset A$

และ $P(B) = \frac{2}{6}$, $P(A) = \frac{4}{6}$

แต่ $\frac{2}{6} < \frac{4}{6}$ ดังนั้น $P(B) < P(A)$

<u>ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข</u> (Conditional Probability)

พิจารณาความแตกต่างของการหยิบสิ่งของทีละสิ่ง จากสิ่งของกลุ่มใหญ่โดยใส่คืน กับการหยิบโดยไม่ใส่คืน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.2.16</u> กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟเล็ก ๆ อยู่ 100 ดวง เป็นหลอดเสีย 20 ดวง หลอดดี 80 ดวง สมมุติว่าเราหยิบหลอดไฟจากกล่องนี้ทีละดวง ถ้าให้

A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้หลอดเสียจากการหยิบครั้งที่หนึ่ง

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้หลอดเสียจากการหยิบครั้งที่สอง

พิจารณาปัญหาในการหยิบจะหยิบได้ 2 แบบดังนี้

1. ถ้าหยิบแล้วใส่คืน ค่าความน่าจะเป็น P(A) และ P(B) จะเท่ากัน และมีค่าเท่ากับ $\frac{20}{100}$

2. ถ้าหยิบแล้วไม่ใส่คืน จะได้ $P(A) = \frac{20}{100}$ แต่ $P(B) = ?$

จะเห็นว่าค่า P(B) นั้นขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ A กล่าวคือถ้าครั้งแรกหยิบได้หลอดดี คือเหตุการณ์ A ไม่เกิดขึ้น จะได้ $P(B) = \frac{20}{99}$ ถ้าครั้งแรกหยิบได้หลอดเสีย คือเหตุการณ์ A เกิดขึ้น ดังนั้น $P(B) = \frac{19}{99}$

เหตุการณ์ A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกันนี้ เรียกว่าเหตุการณ์ที่ไม่อิสระ (dependent events)

เมื่อ A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่อิสระ ค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว ใช้สัญลักษณ์ $P(B \setminus A)$ อ่านว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว

$P(B \setminus A)$ เป็นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข คือเป็นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ที่มีเงื่อนไขว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว ฉะนั้นจากตัวอย่างที่ยกมานี้ จะได้ว่า $P(B \setminus A) = \frac{19}{99}$

ตัวอย่าง 3.2.17 สมมุติว่านักเรียนห้องหนึ่งเป็นชาย 30 คน หญิง 10 คน นักเรียนชายสอบได้ 25 คน สอบตก 5 คน นักเรียนหญิงสอบได้ 8 คน สอบตก 2 คน ซึ่งเขียนเป็นตารางแสดงได้ดังนี้

	สอบได้	สอบตก	รวม
นักเรียนชาย	25	5	30
นักเรียนหญิง	8	2	10
รวม	33	7	40

ตาราง 3.2.2

เมื่อสุ่มรายชื่อนักเรียนห้องนี้มา 1 คน ถ้าให้

A เป็นเหตุการณ์ที่เป็นนักเรียนชาย

B เป็นเหตุการณ์ที่เป็นผู้สอบได้

จะเห็นว่า $P(A) = \frac{30}{40}$ และ $P(B) = \frac{33}{40}$

ถ้าหากทราบว่าเป็นนักเรียนชาย ความน่าจะเป็นที่เขาจะเป็นผู้สอบได้ ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $P(B \setminus A)$ ก็จะเท่ากับ $\frac{25}{30}$ กล่าวคือเมื่อทราบว่าเขาเป็นผู้ชาย ฉะนั้นเซตที่จะพิจารณาทั้งหมด ก็จะเป็นเซตของนักเรียนชาย ซึ่งมีจำนวน 30 คน ในจำนวนนี้มีผู้สอบได้ 25 คน ฉะนั้น $P(B \setminus A) = \frac{25}{30}$ เซตของนักเรียนชายที่สอบได้ก็คือ $A \cap B$ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 25

จะเห็นว่า $P(B \setminus A) = \frac{25}{30} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

นั่นคือ $P(B \setminus A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

เอา $n(S) > 0$ หารทั้งเศษและส่วน จะได้

$$P(B \setminus A) = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(A)/n(S)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ดังนั้นจึงให้นิยามความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขดังนี้

<u>บทนิยาม 3.2.14</u> ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(B \setminus A)$ กำหนดดังนี้

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{เมื่อ } P(A) > 0$$

<u>ตัวอย่าง 3.2.18</u> หยิบไพ่ 2 ใบจากสำรับ โดยหยิบทีละใบไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ King ทั้งสองใบ

<u>วิธีทำ</u>

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ King ในการหยิบครั้งแรก

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ King ในการหยิบครั้งที่สอง

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ King ทั้งสองใบ คือ $P(A \cap B)$

จาก $P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \setminus A)$

$$= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

$$= \frac{1}{221}$$

<u>ทฤษฎี 3.2.6</u> ถ้า A, B_1 และ B_2 เป็นเหตุการณ์ที่ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ และ $P(A) > 0$ แล้ว $P(B_1 \cup B_2 \setminus A) = P(B_1 \setminus A) + P(B_2 \setminus A)$

<u>พิสูจน์</u>

$$P(B_1 \cup B_2 \setminus A) = \frac{P\left[(B_1 \cup B_2) \cap A\right]}{P(A)} = \frac{P\left[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A)\right]}{P(A)}$$

แต่ $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ดังนั้น $(B_1 \cap A) \cap (B_2 \cap A) = \emptyset$

เพราะฉะนั้น $$P(B_1 \cup B_2 \setminus A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(B_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= P(B_1 \setminus A) + P(B_2 \setminus A)$$

<u>ทฤษฎี 3.2.7</u> ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นโดยที่ A_1 เกิดก่อน A_2 และ A_2 เกิดก่อน A_3 ไปเรื่อย ๆ จนถึง A_{n-1} เกิดก่อน A_n แล้ว

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \cdot P(A_3 \setminus A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \setminus A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ T แทนข้อความว่า $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \ldots P(A_n \setminus A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

1. ถ้า $n = 1$ จะได้ $P(A_1) = P(A_1)$ เป็นจริง

   ถ้า $n=2$ จะได้ $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1)$

   เป็นจริงตามบทนิยาม 3.2.14

2. สมมุติว่า $n = k$ เป็นจริง ดังนั้น

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \; P(A_3 \setminus A_1 \cap A_2)$$

$$\ldots P(A_k \setminus A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

พิจารณา $n = k + 1$

เพราะว่า

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap A_{k+1} = (A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1}$$

จากบทนิยาม 3.2.14

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ดังนั้น $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \setminus A)$

เพราะฉะนั้น

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1})$$

$$= P((A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cap A_{k+1})$$

$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \cdot P(A_{k+1} \setminus A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \cdot P(A_3 \setminus A_1 \cap A_2) \ldots P(A_k \setminus A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k-1})$$

$$\cdot P(A_{k+1} \setminus A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

ดังนั้น T เป็นจริง เมื่อ $n = k + 1$

จากข้อ 1 และข้อ 2 โดย Principle Mathematical Induction สรุปได้ว่า T เป็นจริงสำหรับทุก ๆ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

<u>ตัวอย่าง 3.2.19</u> อุดมหยิบไพ่ขึ้นมา 3 ใบจากสำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะหยิบได้ไพ่ดอกจิกในการหยิบครั้งที่หนึ่ง โพแดงในการหยิบครั้งที่สอง และโพดำในการหยิบครั้งที่สาม

<u>วิธีทำ</u>

ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ดอกจิกในการหยิบครั้งที่หนึ่ง

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพแดงในการหยิบครั้งที่สอง

A_3 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพดำในการหยิบครั้งที่สาม

ต้องการหา $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

จากทฤษฎี 3.2.7

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 \setminus A_1) \; P(A_3 \setminus A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{13}{50}$$

$$= \frac{169}{10200} \simeq 0.016$$

<u>บทนิยาม 3.2.15</u> เหตุการณ์ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เรียกว่าเป็นพาร์ทิชัน (Partition) ของแซมเปิ้ลสเปซ S ถ้า

ก. $P(B_i) > 0$ สำหรับทุก ๆ i

ข. $B_i \cap B_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

ค. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

<u>ตัวอย่าง 3.2.20</u> ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ได้ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ถ้า B_1, B_2, B_3 เป็นเหตุการณ์ ซึ่ง

$B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3\}$, $B_3 = \{4,5,6\}$

จะเห็นว่า B_1, B_2, B_3 เป็นพาร์ทิชันของแซมเปิ้ลสเปซ S

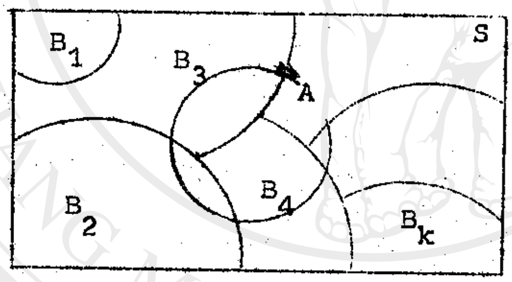
แต่ถ้า C_1 และ C_2 เป็นเหตุการณ์ ซึ่ง $C_1 = \{1,2,3,4\}$ และ $C_2 = \{4,5,6\}$

C_1 และ C_2 ไม่เป็นพาร์ทิชันของแซมเปิ้ลสเปซ S

<u>ทฤษฎี 3.2.8</u> ถ้า A เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิ้ลสเปซ S และ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เป็นพาร์ทิชันของ S แล้ว

$$P(A) = P(B_1)\cdot P(A \setminus B_1) + P(B_2)\cdot P(A \setminus B_2) + \ldots + P(B_k)\cdot P(A \setminus B_k)$$

<u>พิสูจน์</u>



<u>รูปที่ 3.2.5</u>

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_k \cap A)$$

เพราะว่า $B_i \cap B_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$

เพราะฉะนั้น $B_1 \cap A$, $B_2 \cap A$, $\ldots$, $B_k \cap A$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ดังนั้น $P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_k \cap A)$

แต่ $P(B_1 \cap A) = P(B_1) \cdot P(A \setminus B_1)$

$P(B_2 \cap A) = P(B_2) \cdot P(A \setminus B_2)$

$\vdots$

$P(B_k \cap A) = P(B_k) \cdot P(A \setminus B_k)$

เพราะฉะนั้น

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \setminus B_1) + P(B_2) \cdot P(A \setminus B_2) + \dots + P(B_k) \cdot P(A \setminus B_k)$$

ตัวอย่าง 3.2.21 กล่องใบหนึ่งมีเหรียญทอง 20 อัน และเหรียญเงิน 80 อัน เหรียญทุกอันมีขนาดเท่ากัน และลักษณะเหมือนกัน หยิบเหรียญจากกล่องมา 2 อัน โดยหยิบทีละอันไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้เหรียญทองในการหยิบครั้งที่สอง

วิธีทำ

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้เหรียญทองในการหยิบครั้งแรก

$\bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้เหรียญเงินในการหยิบครั้งแรก

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้เหรียญทองในการหยิบครั้งที่สอง

ต้องการหา $P(B)$

$$P(B) = P(A) \cdot P(B \setminus A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \setminus \bar{A})$$

$$= \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} + \frac{80}{100} \cdot \frac{20}{99}$$

$$= \frac{1}{5}$$

<u>ทฤษฎี 3.2.9</u> " Baye's Formula"

ถ้า $B_1, B_2, \ldots, B_n$ เป็นพาร์ทิชันของแซมเปิ้ลสเปซ S ซึ่ง $P(B_i) \neq 0$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ A เป็นเหตุการณ์ใน S ซึ่ง $P(A) \neq 0$ จะได้ว่า

$$P(B_k \backslash A) = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,n$$

หรือเขียนใหม่ได้ว่า

$$P(B_k \backslash A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A \backslash B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \, P(A \backslash B_i)} \quad , \quad k = 1,2,\ldots,n$$

<u>พิสูจน์</u> เมื่อ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ เป็นพาร์ทิชันของ S

เพราะฉะนั้น $B_i \cap B_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

แสดงว่า $(B_1 \cap A), (B_2 \cap A), \ldots, (B_n \cap A)$

เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_n \cap A)$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_n \cap A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)$$

จากนิยาม 3.2.14, $P(B_k \backslash A) = \dfrac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$

เพราะฉะนั้น $P(B_k \backslash A) = \dfrac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)} \quad , \quad k = 1,2,\ldots, n$

แต่ $P(B_i \cap A) = P(B_i) \cdot P(A \setminus B_i)$

ดังนั้น $$P(B_k \setminus A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A \setminus B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \setminus B_i)}, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

<u>ตัวอย่าง 3.2.22</u> ในการเลือกตั้งนายกรัฐมนตรีของประเทศไทย มีผู้สมัครเข้าแข่งขัน 3 คน คือ ก ข และ ค ถ้าความน่าจะเป็นที่ ก ข และ ค จะได้รับเลือกเป็นนายกรัฐมนตรีมีค่า .50, .60 และ .40 ตามลำดับ และถ้า ก หรือ ข หรือ ค ได้รับเลือกเป็นนายกรัฐมนตรีแล้ว ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการปฏิวัติเท่ากับ .70 , .20 และ .30 ตามลำดับ ภายหลังการเลือกตั้งแล้ว เกิดการปฏิวัติ จงหาความน่าจะเป็นที่ ก จะเป็นนายกรัฐมนตรีขณะที่เขาปฏิวัติ

<u>วิธีทำ</u>

ให้ B_1 เป็นเหตุการณ์ที่ ก ได้เป็นนายกรัฐมนตรี

B_2 เป็นเหตุการณ์ที่ ข ได้เป็นนายกรัฐมนตรี

B_3 เป็นเหตุการณ์ที่ ค ได้เป็นนายกรัฐมนตรี

A เป็นเหตุการณ์ที่เกิดการปฏิบัติ

ต้องการหา $P(B_1 \setminus A)$

ใช้ Baye's Formula

จาก $$P(B_1 \setminus A) = \frac{P(B_1) \cdot P(A \setminus B_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(A \setminus B_i)}$$

$$= \frac{.5 \times .7}{(.5 \times .7)+(.6 \times .2)+(.4 \times .3)}$$

$$P(B_1 \setminus A) = \frac{.35}{.35 + .12 + .12}$$

$$= \frac{35}{59} \simeq .5932$$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่ ก จะเป็นนายกรัฐมนตรีขณะที่เขาปฏิวัติเท่ากับ .5932

<u>เหตุการณ์อิสระ</u> (Independent events)

ถ้าเหตุการณ์ A และ B มีความเกี่ยวข้องกัน ดังที่ได้เคยพิจารณามาแล้ว คือเหตุการณ์หนึ่งขึ้นอยู่กับอีกเหตุการณ์หนึ่ง เช่น เหตุการณ์ A ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ B

จะได้ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \setminus A)$

แต่ถ้าเหตุการณ์ A และ B ไม่มีความเกี่ยวข้องกัน คือเหตุการณ์ A ไม่ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ B เช่น การโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง และโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้งพร้อมกัน

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 5

B เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายหัว

จะเห็นว่าเหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นหรือไม่ก็ตาม ไม่มีผลต่อการเกิดเหตุการณ์ B เรียก A และ B ว่า เหตุการณ์อิสระ

ดังนั้นจะได้ $P(B \setminus A) = P(B)$

นั่นคือ $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

จากที่ยกตัวอย่างมานี้ จะให้นิยามของเหตุการณ์อิสระได้ดังนี้

<u>บทนิยาม 3.2.16</u> A และ B จะเรียกว่าเหตุการณ์อิสระ ก็ต่อเมื่อ

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

<u>ตัวอย่าง 3.2.23</u> ในการสอบคัดเลือกเข้ามหาวิทยาลัย โสภีกับนิดดา เป็นเพื่อนรักกัน ทั้งสองจึงไปสมัครสอบเข้ามหาวิทยาลัยด้วยกัน ความน่าจะเป็นที่โสภีจะสอบเข้าได้เท่ากับ 0.7 และความน่าจะเป็นที่นิดดาจะสอบเข้าได้เป็น 0.8 จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. เขาจะสอบเข้าได้ทั้งสองคน

ข. เขาจะสอบตกทั้งสองคน

<u>วิธีทำ</u>

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่โสภีจะสอบเข้าได้

B เป็นเหตุการณ์ที่นิดดาจะสอบเข้าได้

จะได้ $P(A) = 0.7$ และ $P(B) = 0.8$

ดังนั้น $A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่เขาจะสอบเข้าได้ทั้งสองคน

จะเห็นว่า A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ

ก. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \times 0.8 = 0.56$

ข. $\bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ที่โสภีสอบตก

$\bar{B}$ เป็นเหตุการณ์ที่นิดดาสอบตก

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$

$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.8 = 0.2$

ดังนั้น $\bar{A} \cap \bar{B}$ เป็นเหตุการณ์ที่เขาจะสอบตกทั้งสองคน

จะเห็นว่า $\bar{A}$ และ $\bar{B}$ เป็นเหตุการณ์อิสระ

ดังนั้น
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0.3 \times 0.2 = 0.06$$

<u>หมายเหตุ</u> ในกรณีที่มีเหตุการณ์ 3 เหตุการณ์ คือ A, B และ C

ถ้า $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$

$P(C \cap A) = P(C) \cdot P(A)$

จะสรุปได้แต่เพียงว่า A กับ B , B กับ C , C กับ A เป็นเหตุการณ์อิสระเป็นคู่ ๆ (pairwise independent) ซึ่งยังไม่ทราบว่า $P(A \cap B \cap C)$ จะเท่ากับ $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ หรือไม่

ถ้า A, B, C เป็นเหตุการณ์อิสระเป็นคู่ ๆ และ $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$ แล้ว เรียก A, B และ C ว่า mutually independent

<u>Finite stochastic process</u>

อันดับจำกัดอันหนึ่งของการทดลองในแต่ละการทดลองที่มีจุดตัวอย่างจำนวนจำกัด กับความน่าจะเป็นที่กำหนดให้ เรียกว่า a finite stochastic process

<u>ตัวอย่าง 3.2.24</u> มีกล่อง 3 ใบ

ใบที่ 1 บรรจุหลอดไฟ 10 หลอด เป็นหลอดเสีย 4 หลอด

ใบที่ 2 บรรจุหลอดไฟ 6 หลอด เป็นหลอดเสีย 1 หลอด

ใบที่ 3 บรรจุหลอดไฟ 8 หลอด เป็นหลอดเสีย 3 หลอด

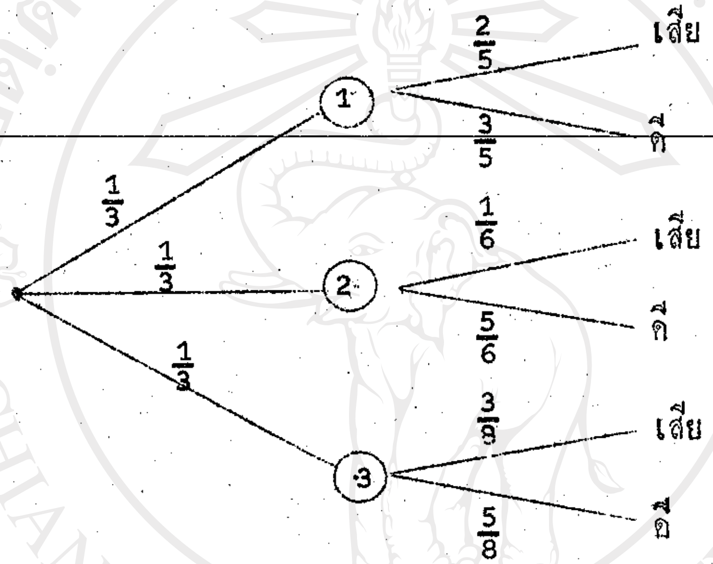
เลือกกล่องมาใบหนึ่งอย่างเดาสุ่ม แล้วหยิบหลอดไฟจากกล่องที่เลือกมานี้ 1 หลอดอย่างเดาสุ่ม จงหาความน่าจะเป็น p ที่จะหยิบได้หลอดไฟเสีย

วิธีทำ

อันดับนี้ประกอบด้วย 2 การทดลองคือ

1. เลือกกล่องใบหนึ่งจากกล่องทั้งหมด 3 ใบ
2. เลือกหลอดไฟหลอดหนึ่งซึ่งอาจเป็นหลอดเสียหรือหลอดดี อย่างใดอย่างหนึ่ง

สามารถอธิบายขบวนการนี้ และความน่าจะเป็นของแต่ละขั้นตอนโดยแผนภาพดังนี้



รูปที่ 3.2.6

ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่จะหยิบได้กล่องใบที่ 1

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่จะหยิบได้กล่องใบที่ 2

A_3 เป็นเหตุการณ์ที่จะหยิบได้กล่องใบที่ 3

B เป็นเหตุการณ์ที่จะหยิบได้หลอดไฟอันเสีย

เพราะฉะนั้น

$$p = P\left[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)\right]$$

$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$$

$$= P(A_1) \cdot P(B \setminus A_1) + P(A_2) \cdot P(B \setminus A_2) + P(A_3) \cdot P(B \setminus A_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$$

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้หลอดไฟเสียเท่ากับ $\frac{113}{360}$

3.3 ตัวแปรสุ่ม (Random variable)

ในการทดลองอย่างหนึ่ง เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอาจมีลักษณะเป็นตัวเลข หรือไม่เป็นตัวเลขก็ได้ เช่น ถ้าโยนลูกเต๋า 1 ลูก และให้ S เป็นเซตของจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ฉะนั้นจะได้

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

กรณีนี้แซมเปิ้ลสเปซเป็นค่าตัวเลข
ถ้าโยนเหรียญ 2 อันพร้อมกัน จะได้ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$
กรณีนี้แซมเปิ้ลสเปซไม่เป็นค่าตัวเลข ในบางครั้งเพื่อความสะดวกในการนำไปคำนวณต่อ ๆ ไป จึงกำหนดตัวเลขเพื่อใช้แทนสมาชิกในแซมเปิ้ลสเปซ ตัวเลขเหล่านี้เรียกว่า "ตัวแปรสุ่ม" เช่น ถ้าให้ X เป็นจำนวนเหรียญที่หงายหัว ในการโยนเหรียญ 2 อัน ดังกล่าวแล้ว จะเห็นว่า X จะมีค่าต่าง ๆ เท่าที่เป็นไปได้คือ 2, 1 และ 0 ค่า 2 แทน HH ค่า 1 แทน HT และ TH ค่า 0 แทน TT ลักษณะแบบนี้เป็นการจับคู่กันระหว่างสมาชิกในแซมเปิ้ลสเปซกับค่าตัวเลข หรือกล่าวเป็นภาษาคณิตศาสตร์ว่า เป็นฟังก์ชันจากแซมเปิ้ลสเปซไปยังจำนวนจริง (real number)

<u>ความหมาย</u>

ถ้า s เป็นจุดตัวอย่าง , $s \in S$ และ X เป็นฟังก์ชันจากแซมเปิ้ลสเปซ S ไปยังจำนวนจริง ค่าของฟังก์ชันเขียนว่า X(s) หรือ x = X(s) เมื่อ x เป็นเลขจำนวนจริง

ดังนั้นจะให้นิยามความหมายของตัวแปรสุ่มดังนี้

<u>บทนิยาม 3.3.1</u> ถ้า S เป็นแซมเปิ้ลสเปซของการทดลองอย่างหนึ่ง ฟังก์ชัน X จากสมาชิก $s \in S$ ไปยังจำนวนจริง , X(s) เรียกว่าตัวแปรสุ่ม

หรือกล่าวอย่างง่าย ๆ ว่า ตัวแปรสุ่มเป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมน (domain) เป็นแซมเปิ้ลสเปซ และมีเรนจ์ (range) เป็นเซตของเลขจำนวนจริงที่กำหนดมาจากสมาชิกในแซมเปิ้ลสเปซ เซตของค่าต่าง ๆ ที่เป็นเรนจ์นี้เรียกว่าเรนจ์สเปซ (range space) เขียนแทนด้วย R_X

บางทีแซมเปิ้ลสเปซเป็นค่าตัวเลขอยู่แล้ว กำหนดให้ X(s) = s สำหรับทุก ๆ $s \in S$ เช่นโยนลูกเต๋า 1 ลูก S = { 1,2,3,4,5,6 } กำหนดให้ X เป็นจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ฉะนั้น
R_X = { 1,2,3,4,5,6 } จะเห็นว่า $S = R_X$

<u>ตัวอย่าง 3.3.1</u> โยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง ถ้ากำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X เท่ากับจำนวนเหรียญที่หงายหัว จงเขียนตารางแสดงแซมเปิ้ลสเปซ และค่าของ X

<u>วิธีทำ</u>

แซมเปิ้ลสเปซ	R_X
HHH	3
HHT , HTH , THH	2
HTT , THT , TTH	1
TTT	0

<u>ตาราง 3.3.1</u>

แบบของตัวแปรสุ่ม

บทนิยาม 3.3.2 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ถ้าค่าที่เป็นไปได้ของ X (นั่นคือ R_X เป็นเรนจ์สเปซ) มีจำนวนนับได้ทั้งจำกัดหรือไม่จำกัด (finite or countable infinite) เรียก X ว่าเป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete random variable) นั่นคือ ค่าที่เป็นไปได้ของ X อาจแสดงเป็นค่าตัวเลข $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ เป็นค่าที่ไม่ต่อเนื่องกัน

ตัวอย่าง 3.3.2 จากตัวอย่าง 3.3.1

X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

บทนิยาม 3.3.3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ถ้าค่าที่เป็นไปได้ของ X (นั่นคือ R_X เป็นเรนจ์สเปซ) มีจำนวนสมาชิกที่นับไม่ได้ เรียก X ว่าเป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (continuous random variable) นั่นคือค่าที่เป็นไปได้ของ X คือค่าที่เป็นช่วง เช่น ช่วงเวลา อุณหภูมิ เป็นต้น

การศึกษาต่อไปนี้จะศึกษาอย่างละเอียดเฉพาะตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องเท่านั้น ฉะนั้นต่อไปนี้ถ้ากล่าวถึงตัวแปรสุ่ม ให้หมายถึงตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

พิจารณาการทดลองโยนเหรียญ 3 อัน 1 ครั้ง

มีแซมเปิ้ลสเปซ $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$

และให้ $A = \{HHT, HTH, THH\}$ เป็นเหตุการณ์ใน S

และให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งกำหนดจากแซมเปิ้ลสเปซ S ไปยังจำนวนจริง

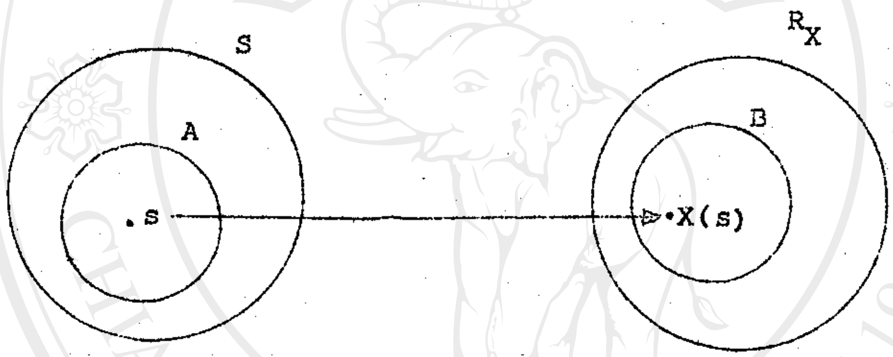
โดยให้ $X = 2$ หมายถึงกรณีที่เหรียญหงายหัว 2 อัน

เรียกเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ $\{2\}$ ว่าเหตุการณ์ที่เทียบเท่ากัน (equivalent event) ซึ่งกำหนดเป็นนิยามได้ดังนี้

<u>บทนิยาม 3.3.4</u> ในการทดลองอย่างหนึ่ง ถ้า S เป็นแซมเปิ้ลสเปซ และ X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมี R_X เป็นเรนจ์สเปซ B เป็นเหตุการณ์ใน R_X ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใน S ซึ่งกำหนดค่าตัวเลขเป็นเหตุการณ์ B คือ

$$A = \{s \in S \ / \ X(s) \in B\}$$

เรียก A กับ B ว่าเหตุการณ์ที่เทียบเท่ากัน ดังรูปที่ 3.3.1



<u>รูปที่ 3.3.1</u>

<u>ตัวอย่าง 3.3.3</u> ในการโยนเหรียญ 3 อัน พร้อมกัน 1 ครั้ง

ถ้า $A = \{TTT, HTT, THT, TTH\}$ และ

$B = \{X \leq 1\} = \{0,1\}$ เมื่อ X คือจำนวนหัวที่เหรียญหงาย

จะเห็นว่า A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่เทียบเท่ากัน

<u>บทนิยาม 3.3.5</u> ถ้า B เป็นเหตุการณ์ในเรนจ์สเปซ R_X จะกำหนดความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ได้ว่า $P(B) = P(A)$ เมื่อ A เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิ้ลสเปซ ซึ่งเทียบเท่ากันกับเหตุการณ์ B

<u>ตัวอย่าง 3.3.4</u> ในการโยนเหรียญ 3 อันพร้อมกัน ถ้า X = จำนวนหัวที่เหรียญหงาย จงหาค่าของ $P(X = 0)$ และ $P(X \leq 1)$

<u>วิธีทำ</u>

1. $P(X = 0)$ = ความน่าจะเป็นที่เหรียญไม่หงายหัวเลย

= $P(\{TTT\}) = \frac{1}{8}$

2. $P(X \leq 1)$ = $P(A)$ เมื่อ

$A = \{TTT, TTH, THT, HTT\}$

เพราะฉะนั้น $P(X \leq 1) = P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

<u>การแจกแจงความน่าจะเป็น</u> (Probability distribution)

<u>บทนิยาม 3.3.6</u> ตารางหรือสูตรที่แสดงทุก ๆ ค่าที่เป็นไปได้ของตัวแปรสุ่ม และความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม เรียกว่าการแจกแจงความน่าจะเป็น

<u>การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง</u>

<u>บทนิยาม 3.3.7</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีค่าเป็น $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ฟังก์ชัน f ซึ่งกำหนดโดย $f(x_i) = P(X = x_i)$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots$ จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันของความน่าจะเป็น (Probability function) ในเมื่อ $f(x_i)$ มีคุณสมบัติ 2 ข้อ คือ

ก. $f(x_i) \geq 0$ สำหรับทุก ๆ i

ข. $\sum_i f(x_i) = 1$

คู่ลำดับ $(x_i, f(x_i))$ ซึ่งอาจเขียนแสดงเป็นสูตรหรือตาราง เรียกว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง

ฟังก์ชัน f บางทีเรียกว่าฟังก์ชันจุด (point function) และบางที เขียน $f(x) = P(X = x)$ เมื่อ x เป็นตัวแปร แทนที่จะเขียน $f(x_i)$ เมื่อ i เป็นตัวแปร

ตัวอย่าง 3.3.5 จงแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนหัวที่เหรียญหงาย ในการโยนเหรียญ 3 อันพร้อมกัน

วิธีทำ

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่ง X = จำนวนหัวที่เหรียญหงาย ดังนั้น X มีค่าเป็น 0, 1, 2 และ 3 ซึ่งเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง

แสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยตารางได้ดังนี้

x	0	1	2	3	รวม
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

ตาราง 3.3.2

ค่าความคาดหวังของตัวแปรสุ่ม

บทนิยาม 3.3.8 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมี $f(x_i) = P(X = x_i)$ เป็นค่าฟังก์ชันของความน่าจะเป็น ค่าความคาดหวัง (expectation) ของ X เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ E(X) กำหนดดังนี้

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i)$$

ค่าความคาดหวังนี้จะเป็นค่าตัวกลาง (mean) ของ X บางทีเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ μ หรือ μ_X

หรืออาจเขียน $E(X) = \sum_x x f(x)$ ก็ได้

<u>ตัวอย่าง 3.3.6</u> จากตารางแสดงการแจกแจงในตัวอย่าง 3.3.5

$$E(X) = \sum_{x=0}^{3} x\, f(x)$$

$$= 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8}$$

$$= \frac{12}{8}$$

$$= \frac{3}{2} = 1.5$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม และถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นค่าที่ได้จากการทดลอง n ครั้ง ค่าเฉลี่ยของตัวเลขเหล่านี้เรียกว่าตัวกลางเลขคณิต (Arithematic mean) เขียนแทนด้วยสัญญลักษณ์ $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i} x_i\, g(x_i); \quad \text{เมื่อ } g(x_i) \text{ คือความถี่ของ } x_i$$

<u>ความสัมพันธ์ระหว่าง $\bar{x}$ และ E(X)</u> แบ่งเป็น 2 กรณีคือ

1. กรณีที่เซตของ n เป็นเซตจำกัด จะได้ $\bar{x} = E(X)$

   เช่น จากตารางแสดงการแจกแจงในตัวอย่าง 3.3.5

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i} x_i\, g(x_i)$$

$$= \frac{1}{4}(0 + 1 + 2 + 3)$$

$$= \frac{6}{4} = 1.5$$

   จากตัวอย่าง 3.3.6 ; $E(X) = 1.5$

   เพราะฉะนั้น $\bar{x} = E(X)$

2. กรณีที่เซตของ n เป็นเซตอนันต์ ถ้า n มีค่ามาก ๆ แล้ว $\bar{x}$ จะมีค่าเข้าสู่ E(X)

เพราะว่า $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i \, g(x_i)$

$$= \sum_i x_i \frac{g(x_i)}{n}$$

และ $E(X) = \sum_i x_i \, f(x_i)$

แต่ $\frac{g(x_i)}{n}$ คือค่าความถี่สัมพัทธ์ เมื่อ n มีค่ามาก $\frac{g(x_i)}{n}$ จะมีค่าเข้าสู่ f(x) ตามบทนิยาม 3.2.7 ข้อ จ.

ดังนั้น เมื่อ n มีค่ามาก ๆ แล้ว $\bar{x}$ จะมีค่าใกล้เคียงกับ E(X)

ค่าความคาดหวังเป็นค่าเฉลี่ย (ตัวกลาง) ในทางทฤษฎีบางทีเรียกว่า ความคาดหวังทางคณิตศาสตร์ (Mathematical expectation)

ตามนิยามจะหมายความคลุมไปด้วยว่าอนุกรม $\sum_i x_i \, f(x_i)$ ต้องเป็นการลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ (Absolute convergence) คือ $\sum_i |x_i| \, f(x_i)$ ต้องมีค่าเกิดขึ้น (exist) หากไม่เป็นดังนี้ กล่าวว่าการแจกแจงไม่มี E(X)

ความคาดหวังของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม

ทฤษฎี 3.3.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และ $Y = H(X)$

ซึ่ง $f(x_i) = P(X = x_i)$ จะได้

$$E(Y) = E(H(X)) = \sum_i H(x_i)\, f(x_i)$$

พิสูจน์

พิจารณา $\sum_{i=1}^{\infty} H(x_i)\, f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_i H(x_i)\, f(x_i))$

เมื่อ $H(x_i) = y_i$

สำหรับ y_i บางตัว

ดังนั้น เทอม $H(x_i)$ ทั้งหมด เป็นค่าคงที่ใน inner sum

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = \sum_i P\left[x_i / H(x_i) = y_i\right] = g(y_i)$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{\infty} H(x_i)\, f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i g(y_i)$

ตัวอย่าง 3.3.7 ก กับ ข เล่นพนันอย่างหนึ่ง โดยใช้เหรียญบาท 2 อัน ก เป็นเจ้ามือ ข เป็นคนแทง มีกติกาว่าถ้าแทงหัว (เหรียญหงายหัว 2 อัน)ถูก เจ้ามือจ่าย 2 เท่า ถ้าแทงก้อย (เหรียญหงายก้อย 2 อัน)ถูก เจ้ามือจ่าย 2 เท่าเช่นเดียวกัน และถ้าแทงกลาง (เหรียญหงายหัว 1 อัน ก้อย 1 อัน) ถูก เจ้ามือจ่าย 1 เท่า ถ้าแทงไม่ถูก เจ้ามือริบเงิน เมื่อ ก โยนเหรียญ และ ข แทงหัว 1 บาท จงหาความคาดหวังเงินกำไรที่ ข จะได้จาก ก

วิธีทำ

การที่ ข แทงหัว แสดงว่า ข กำหนดตัวเลขดังนี้คือ หงายหัวเป็นตัวเลข +2 หงายกลางเป็นตัวเลข -1 และหงายก้อยเป็นตัวเลข -1 ตัวเลขที่กำหนดนี้ก็คือค่าของฟังก์ชันนั่นเอง ถ้า x เป็นจำนวนเหรียญที่หงายหัว ค่า y ตามที่กำหนดไว้ก็จะเป็นเงินที่ ข จะได้จาก ก ซึ่งขึ้นอยู่กับค่า x

เขียนตารางแสดงได้ดังนี้

x	f(x)	y = H(x)
0	$\frac{1}{4}$	-1
1	$\frac{1}{2}$	-1
2	$\frac{1}{4}$	2

ตาราง 3.3.3

จะหาความคาดหวังที่ ข จะได้เงินจาก ก ก็คือหา E(Y)

จากทฤษฎี 3.3.1

$$E(Y) = E(H(X)) = \sum_{\text{ทุก ๆ } x} H(x)\, f(x)$$

แต่ x = 0,1,2 ดังนั้นจะได้

$$E(H(X)) = (-1)(\tfrac{1}{4}) + (-1)(\tfrac{1}{2}) + (2)(\tfrac{1}{4})$$

$$= -\frac{1}{4}$$

แสดงว่าโดยเฉลี่ยแล้ว ข จะขาดทุน $\frac{1}{4}$ บาท ต่อ 1 ครั้ง

<u>คุณสมบัติของค่าความคาดหวัง</u>

<u>ทฤษฎี 3.3.2</u> ถ้า c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า E(C) = C

<u>พิสูจน์</u>

$$E(C) = \sum_i C\, f(x_i)$$

$$= C \sum_i f(x_i)$$

$$= C \qquad \text{เพราะว่า } \sum_i f(x_i) = 1$$

ทฤษฎี 3.3.3 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และ a เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

$$E(aX) = aE(X)$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} E(aX) &= \sum_i ax_i\, f(x_i) \\ &= a\sum_i x_i\, f(x_i) \\ &= aE(X) \end{aligned}$$

ทฤษฎี 3.3.4 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องและ H_1, H_2 เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม X ดังนั้น $E(H_1(X)+H_2(X)) = E(H_1(X))+E(H_2(X))$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} E(H_1(X)+H_2(X)) &= \sum_i (H_1(x_i) + H_2(x_i))f(x_i) \\ &= \sum_i (H_1(x_i)f(x_i) + H_2(x_i)f(x_i)) \\ &= \sum_i H_1(x_i)f(x_i) + \sum_i H_2(x_i)f(x_i) \\ &= E(H_1(X)) + E(H_2(X)) \end{aligned}$$

บทแทรก 3.3.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และ a,b เป็นค่าคงที่ จะได้

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_i (ax_i + b)f(x_i) \\ &= \sum_i (ax_i\, f(x_i) + b\, f(x_i)) \\ &= \sum_i ax_i\, f(x_i) + \sum_i b\, f(x_i) \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

<u>ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม</u>

<u>บทนิยาม 3.3.9</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม ความแปรปรวน (Variance) ของ X (หรือของการแจกแจงของ X) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ V(X) หรือ δ_X^2 กำหนดดังสมการ

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

ค่ารากที่สองที่เป็นบวกของ V(X) เรียกว่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation) ของ X และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ δ_X

ถ้าใช้ μ แทน E(X) สำหรับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ค่า V(X) จะแสดงได้เป็น $V(X) = \sum_i (x_i - \mu)^2 f(x_i)$

จะเห็นว่า ถ้า x_i มีค่าใกล้ค่า μ แล้ว V(X) จะมีค่าน้อย ถ้า x_i มีค่าห่างจาก μ มาก V(X) จะมีค่ามาก ดังนั้นค่า V(X) จึงเป็นตัวบอกลักษณะของการแจกแจงได้ว่า x_i กระจายอยู่ใกล้หรือห่างจาก μ มากน้อยเพียงใด

<u>ทฤษฎี 3.3.5</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

<u>พิสูจน์</u> จากบทนิยาม 3.3.9

$$\begin{aligned} V(X) &= E\left[(X - E(X))^2\right] \\ &= E\left[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2\right] \\ &= E(X^2) - E(2XE(X)) + E\left[(E(X))^2\right] \end{aligned}$$

แต่ E(X) เป็นค่าคงที่

ดังนั้น $V(X) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + (E(X))^2$

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

<u>ตัวอย่าง 3.3.8</u> บริษัทขายเครื่องอะไหล่วิทยุได้สำรวจอายุการใช้งานของวิทยุแบบหนึ่ง ปรากฏผลตามตารางดังนี้

อายุการใช้งาน	จำนวนเปอร์เซนต์
ต่ำกว่า 3 ปี	5
3 - 6 ปี	28
6 - 9 ปี	63
9 - 12 ปี	3
สูงกว่า 12 ปี	1

<u>ตาราง 3.3.4</u>

จงคำนวณหาความแปรปรวน

<u>วิธีทำ</u>

ให้ x เป็นคะแนนกึ่งกลางของช่วงที่กำหนด ดังนั้นจะเขียนเป็นตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นได้ดังนี้

x	f(x)
1.5	.05
4.5	.28
7.5	.63
10.5	.03
ประมาณ 13.5	.01

<u>ตาราง 3.3.5</u>

จากทฤษฎี 3.3.5

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

หา $E(X) = \sum_x x\, f(x)$

$$= (1.5)(.05) + (4.5)(.28) + (7.5)(.63) + (10.5)(.03) + (13.5)(.01)$$

$$= 6.51$$

$$E(X^2) = \sum_x x^2 f(x)$$

$$= (1.5)^2(.05) + (4.5)^2(.28) + (7.5)^2(.63) + (10.5)^2(.03) + (13.5)^2(.01)$$

$$= 45.45$$

ดังนั้น $V(X) = 45.45 - (6.51)^2$

$$= 3.0699$$

<u>คุณสมบัติของความแปรปรวน</u>

<u>ทฤษฎี 3.3.6</u> ถ้า c เป็นค่าคงที่ แล้ว $V(C) = 0$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม 3.3.9

$$V(C) = E\left[(C - E(C))^2\right]$$

$$= E\left[(C - C)^2\right]$$

$$= E(0)$$

$$= 0$$

<u>ทฤษฎี 3.3.7</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และ a เป็นค่าคงที่ แล้ว
$V(aX) = a^2V(X)$

<u>พิสูจน์</u>

$$
\begin{aligned}
V(aX) &= E\left[(aX - E(aX))^2\right] \\
&= E\left[(aX - aE(X))^2\right] \\
&= E\left[a^2(X - E(X))^2\right] \\
&= a^2E\left[(X - E(X))^2\right] \\
&= a^2V(X)
\end{aligned}
$$

<u>ทฤษฎี 3.3.8</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และ a,b เป็นค่าคงที่ แล้ว $V(aX + b) = a^2V(X)$

<u>พิสูจน์</u>

$$
\begin{aligned}
V(aX + b) &= E\left[((aX + b) - E(aX + b))^2\right] \\
&= E\left[(aX + b - aE(X) - b)^2\right] \\
&= E\left[(aX - aE(X))^2\right] \\
&= E\left[a^2(X - E(X))^2\right] \\
&= a^2E\left[(X - E(X))^2\right] \\
&= a^2V(X)
\end{aligned}
$$

3.4 <u>การทดลองแบบทวินาม</u>

ในการทดลองแต่ละครั้ง ถ้าทราบค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่จะเกิดขึ้น โดยการทำการทดลองซ้ำ ๆ กันหลายครั้ง เหตุการณ์ต่าง ๆ นั้นอาจเกิดขึ้นหลายครั้งหรือไม่เกิดขึ้นเลยก็ได้ ซึ่งสามารถหาค่าความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์นั้น ๆ จะเกิดขึ้นกี่ครั้งได้

การกระทำซ้ำ ๆ กันดังที่กล่าวมานี้ ถ้าการกระทำแต่ละครั้งเกิดเหตุการณ์ขึ้น 2 อย่าง คือเหตุการณ์ที่ต้องการและเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ ถ้าความน่าจะเป็นที่ได้เหตุการณ์ที่ต้องการในการกระทำแต่ละครั้งมีค่า p เท่ากันตลอดทุก ๆ ครั้ง เรียกการกระทำซ้ำ ๆ กันแบบนี้ว่า "การทดลองแบบทวินาม" และเรียกการกระทำในแต่ละครั้งที่เกิดเหตุการณ์ 2 อย่างแบบนี้ว่า "การทดลองเบอร์นอลลี (Bernoulli trials)

<u>ทฤษฎี 3.4.1</u> ในการทดลองแบบทวินาม ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ ที่ต้องการในการทดลองแต่ละครั้งมีค่า p ทำการทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง ถ้า X เป็นจำนวนครั้งที่ได้เหตุการณ์ที่ต้องการ ความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ที่ต้องการ k ครั้ง $P(X = k)$ จะมีค่าดังสมการ

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k} , \quad k = 0,1,2,\ldots,n$$

<u>พิสูจน์</u>

ให้ T เป็นเหตุการณ์ที่ต้องการในการทดลองแต่ละครั้ง

F เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการในการทดลองแต่ละครั้ง

ได้เหตุการณ์ที่ต้องการ k ครั้ง ในกรณีหนึ่งก็คือ $\underbrace{TTT\ldots T}_{k}\underbrace{FFF\ldots F}_{n-k}$

ซึ่ง $P(\underbrace{TTT\ldots T}_{k}\ \underbrace{FFF\ldots F}_{n-k}) = \underbrace{ppp\ldots p}_{k}\underbrace{(1 - p)\ldots(1 - p)}_{n-k}$

$= p^k (1 - p)^{n-k}$

แต่ $\underbrace{TTT\ldots T}_{k}\ \underbrace{FFF\ldots F}_{n-k}$ สลับที่กันได้ $\dfrac{n!}{k!(n - k)!} = \binom{n}{k}$ วิธี

ดังนั้น $P(X = k)$ = จำนวนกรณี $\times$ ความน่าจะเป็นในแต่ละกรณี

$$= \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

ตัวอย่าง 3.4.1 ในถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วสีขาว 3 ลูก สีแดง 4 ลูก หยิบทีละลูกแล้วใส่คืนได้ลูกแก้วสีอะไรบันทึกไว้ ถ้าหยิบ 6 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีขาว 4 ครั้ง

วิธีทำ

การหยิบลูกแก้วทีละลูกแล้วใส่คืน ในการหยิบแต่ละครั้งความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีขาวมีค่า $\frac{3}{7}$ เท่ากันทุกครั้ง

ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีขาวในการหยิบแต่ละครั้ง , $p = \frac{3}{7}$

ทำการทดลองซ้ำ ๆ กัน 6 ครั้ง , $n = 6$

ถ้า X เป็นจำนวนครั้งที่ได้ลูกแก้วสีขาว

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีขาว 4 ครั้ง จะเท่ากับ

$$P(X = 4) = \binom{6}{4}\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(1 - \frac{3}{7}\right)^{6-4}$$

$$= \frac{6!}{4!\,2!}\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)^2$$

$$= .1652$$

การแจกแจงทวินาม

บทนิยาม 3.4.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันแสดงการแจกแจงดังสมการ $f(x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$, $x = 0, 1, \ldots, n$ เรียก X ว่ามีการแจกแจงทวินาม เมื่อ n, p เป็นค่าคงที่ เรียกว่าพารามิเตอร์ (parameter), n เป็นเลขจำนวนเต็มบวก , $0 < p < 1$

ตัวอย่าง 3.4.2 โยนเหรียญที่เที่ยงตรง 5 อัน จงเขียนสูตรและตารางแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนเหรียญที่หงายหัว

วิธีทำ

ความน่าจะเป็นที่เหรียญแต่ละอันจะหงายหัว , $p = \frac{1}{2}$

การโยนเหรียญ 5 อัน เป็นการทดลองแบบทวินาม ซึ่งถ้า X เป็นจำนวนเหรียญที่หงายหัว จะหาค่าความน่าจะเป็นได้ดังนี้

$$f(x) = P(X = x) = \binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} \quad , \quad x = 0, 1, \ldots, 5$$

เมื่อกำหนดค่า x ที่เป็นไปได้ ก็จะหาความน่าจะเป็นได้ ดังแสดงเป็นตารางดังนี้

x	f(x) = P(X = x)
0	$\frac{1}{32}$
1	$\frac{5}{32}$
2	$\frac{10}{32}$
3	$\frac{10}{32}$
4	$\frac{5}{32}$
5	$\frac{1}{32}$

ตาราง 3.4.1

ค่าความคาดหวังและความแปรปรวนของการแจกแจงทวินาม

ทฤษฎี 3.4.2 ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และมีการแจกแจงแบบทวินาม ซึ่งมี n และ p เป็นพารามิเตอร์ แล้ว

ก. $E(X) = np$

ข. $V(X) = np(1-p)$

พิสูจน์ ก.

จากบทนิยาม 3.3.8,

$$E(X) = \sum_{x} x\, f(x)$$

ดังนั้น

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x\binom{n}{x} p^{x}(1-p)^{n-x}$$

ให้ $q = 1-p$ และกระจาย $\binom{n}{x}$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!} p^{x} q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x \cdot \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!} \cdot p \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} \cdot p^{x-1} \cdot q^{n-x}$$

ให้ $m = n-1$, $y = x-1$ แทนในสมการ เมื่อ x มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง n, y มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง n-1 (0 ถึง m) ดังนั้น

$$E(X) = np \sum_{y=0}^{m} \frac{m!}{y!\,(y-m)!} p^{y} \cdot q^{m-y}$$

$$= np \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^{y} \cdot q^{m-y}$$

ถ้าพิจน์ $\sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^{y} q^{m-y}$ คือค่าของ $(p+q)^{m}$ ซึ่งเท่ากับ $\left[p+(1-p)\right]^{m} = 1$

ดังนั้น $E(X) = np \cdot 1 = np$

<u>พิสูจน์</u> ข.

จากทฤษฎี 3.3.5,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x} \quad , \quad q = 1-p$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^{x} q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} x^2 \cdot \frac{n!}{x!\,(n-x)!} \cdot p^{x} \cdot q^{n-x}$$

ให้ $m = n-1$, $y = x-1$ แทนในสมการ จะได้

$$E(X^2) = np \sum_{y=0}^{m} (y+1) \cdot \frac{m!}{y!\,(m-y)!} \cdot p^{y} \cdot q^{m-y}$$

$$= np \left[\sum_{y=0}^{m} y \binom{n}{y} p^{y} q^{m-y} + \sum_{y=0}^{m} \binom{m}{y} p^{y} q^{m-y}\right]$$

$$= np \left[\sum_{y=0}^{m} y\, f(y) + \sum_{y=0}^{m} f(y)\right]$$

$$= np\,(E(Y) + 1)$$

$$= np\,(mp + 1)$$

$$= np \left[(n-1)p + 1\right]$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np$$

ดังนั้น $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - (np)^2$$

$$= np - np^2 = np(1-p) \text{ หรือ } npq$$

3.5 <u>การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องแบบอื่นที่สำคัญมีดังนี้</u>

1. <u>การแจกแจงปัวซอง</u> (Poisson distribution)

<u>บทนิยาม 3.5.1</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีค่า 0,1,...,n,... และถ้าฟังก์ชันของความน่าจะเป็นแสดงได้ดังสมการ

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!} \quad , \quad x = 0, 1, \ldots, n, \ldots$$

เรียก X ว่ามีการแจกแจงปัวซอง มีพารามิเตอร์ $m > 0$

$$E(X) = m$$

$$V(X) = m$$

ใช้การแจกแจงปัวซองในการประมาณค่าของการแจกแจงทวินามในเมื่อ n มีค่ามาก p มีค่าน้อย และค่าความคาดหวัง $np = m$ เป็นค่าคงที่ ปัญหาการหาค่าความน่าจะเป็นที่เป็นการแจกแจงปัวซองนี้ อาจเป็นปัญหาเกี่ยวกับเหตุการณ์ ซึ่งเกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่ง เช่น ความน่าจะเป็นที่จะมีโทรศัพท์เรียกมา หรือเป็นปัญหาที่ทราบค่าเฉลี่ยต่อหน่วย และแบ่งหน่วยเป็นหน่วยย่อยได้

<u>ตัวอย่าง 3.5.1</u> ถ้าชายคนหนึ่งซื้อสลากกินแบ่งงวดละหนึ่งฉบับเป็นจำนวน 120 งวด ติดต่อกัน จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะถูกรางวัลเลขท้าย 2 ตัว

ก. 1 ครั้ง

ข. ไม่ต่ำกว่า 1 ครั้ง

<u>วิธีทำ</u>

ความน่าจะเป็นที่สลากแต่ละฉบับ จะถูกรางวัลเลขท้าย 2 ตัว ; $p = .01$

เขาซื้อ 120 งวด ดังนั้น $n = 120$

ถ้า X เป็นจำนวนครั้งที่เขาถูกรางวัล จะหา ก. $P(X = 1)$

ข. $P(X \geq 1)$

ก. ใช้การแจกแจงปัวซอง $m = np = 120 \times .01 = 1.2$

จะได้ $P(X = 1) = \dfrac{e^{-1.2}(1.2)^1}{1!} = .3614$

ข. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

แต่ $P(X = 0) = \dfrac{e^{-1.2}(1.2)^0}{0!} = .3012$

ดังนั้น $P(X \geq 1) = 1 - .3012 = .6988$

2. <u>การแจกแจงทวินามนิเสธ</u> (Negative Binomial Distribution)

<u>บทนิยาม 3.5.2</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีฟังก์ชันแสดงการแจกแจงดังสมการ

$$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r} \quad , \quad x = r, r+1, \ldots$$

เรียก X ว่าการแจกแจงทวินามนิเสธ มี r และ p เป็นพารามิเตอร์

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$V(X) = \frac{rq}{p^2}$$

<u>หมายเหตุ</u> การแจกแจงนี้มีอีกชื่อหนึ่งว่าการแจกแจงปาซคาล (Pascal distribution)

ตัวอย่าง 3.5.2 โยนเหรียญ 1 อันไปเรื่อย ๆ จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะหงายหัวเป็นครั้งที่ 4 จากการโยนครั้งที่ 7 และจงหาความคาดหวังว่าเหรียญจะหงายหัวเป็นครั้งที่ 4 ในการโยนครั้งที่เท่าไร (ในแง่ของค่าเฉลี่ย)

วิธีทำ

1. ถ้า X เป็นจำนวนครั้งที่ทดลอง จะหา $P(X = 7)$

$$p = \frac{1}{2}, \quad r = 4$$

ดังนั้น $$P(X = 7) = \binom{7-1}{4-1} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{5}{32}$$

2. $$E(X) = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 4 \times 2 = 8$$

3. การแจกแจงจีโอเมตริค (Geometric distribution)

เป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงทวินามนิเสธ เมื่อ $r = 1$ คือเป็นค่าความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ที่ต้องการเป็นครั้งแรกในการกระทำครั้งที่ x สมการของการแจกแจงจะเป็น

$$f(x) = pq^{x-1}, \quad x = 1,2,3,...$$

มี p เป็นพารามิเตอร์

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

<u>ตัวอย่าง 3.5.3</u> ความน่าจะเป็นที่สิรีจะสอบไปเรียนต่อต่างประเทศ ในการสอบแข่งขันแต่ละครั้งมีค่า .70 จงหาความน่าจะเป็นที่สิรีจะสอบได้ในการสอบครั้งที่ 5 (4 ครั้งแรกสิรีสอบตก)

<u>วิธีทำ</u>

ลักษณะปัญหาเป็นแบบการแจกแจงทวินามนิเสธ เมื่อ $r = 1$ (นั่นคือเป็นการแจกแจงจีโอเมตริค) ดังนั้น ถ้าให้ X เป็นจำนวนครั้งที่สอบ

$$P(X = 5) = (.70)(.30)^4 = .0057$$

ความน่าจะเป็นที่สิรีจะสอบได้เป็นครั้งแรกในการสอบครั้งที่ 5 มีค่า .0057
