บทที่ 5

แนวการสอนความน่าจะเป็นเพื่อให้นักเรียนเกิดมโนมติ

วิชาความน่าจะเป็น เป็นวิชาที่เพิ่งบรรจุเข้าในหลักสูตรระดับมัธยมและระดับมัธยมศึกษา จึงนับว่าเป็นวิชาที่ใหม่สำหรับนักเรียนระดับนี้ การเรียนการสอนวิชาความน่าจะเป็นในระดับนี้จึงมักเกิดปัญหาขึ้นบ่อย ๆ ว่านักเรียนไม่เข้าใจความหมายของคำบางคำ เช่น ความหมายของความน่าจะเป็น แซมเปิ้ลสเปซ เป็นต้น ผู้เขียนจึงได้รวบรวมปัญหาที่เกิดขึ้นและที่ผู้เขียนคิดว่าน่าจะเกิดขึ้นในการเรียนการสอน ในแต่ละปัญหาผู้เขียนได้เสนอแนะวิธีแก้ไข โดยเสนอวิธีการสอนที่ผู้เขียนคิดว่าควรจะเป็นในแต่ละปัญหา ซึ่งมีทั้งหมด 8 ปัญหา ดังต่อไปนี้

5.1 <u>ความหมายของการทดลองสุ่ม</u>

<u>จุดมุ่งหมาย</u>

1. เพื่อให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าการทดลองสุ่มหมายความว่าอย่างไร
2. เพื่อให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าการทดลองใดเป็นการทดลองสุ่ม และการทดลองใดไม่เป็นการทดลองสุ่ม

<u>วิธีการ</u>

ครูให้นักเรียนทำการทดลอง และพิจารณาผลที่ได้จากการทดลอง โดยทำตามขั้นตอนดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u>

(ก) แบ่งนักเรียนในชั้นออกเป็น 10 กลุ่ม ครูแจกเหรียญบาท กลุ่มละ 1 อัน ให้นักเรียนทุกคนสังเกตเหรียญบาทที่ได้รับแจกว่ามี 2 หน้า ตกลงกันว่าหน้าที่มีรูปในหลวงเรียกว่าหัว และอีกหน้าหนึ่งเรียกว่าก้อย ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มโยนเหรียญของตน 10 ครั้ง แต่ละครั้งที่เหรียญหยุดให้สังเกตว่าเหรียญหงายหน้าอะไร

บันทึกผลเอาไว้ เช่น สมมุติว่ากลุ่มที่ 1 ได้ผลดังนี้

ครั้งที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
หน้าที่เหรียญหงาย	หัว	หัว	ก้อย	หัว	ก้อย	ก้อย	หัว	ก้อย	ก้อย	ก้อย

ตาราง 5.1.1

เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มทำการทดลองเสร็จ ครูตั้งคำถามถามนักเรียนดังนี้

1. เหรียญจะต้องหงายหัวเสมอใช่หรือไม่
2. เหรียญจะต้องหงายก้อยเสมอใช่หรือไม่
3. เหรียญแต่ละอันมีโอกาสจะหงายหน้าอะไรได้บ้าง

ครูให้นักเรียนทุกกลุ่มโยนเหรียญของตน 1 ครั้ง ให้เหรียญหงายหัว ครูเขียนผลที่ได้บนกระดาน สมมุติว่าได้ผลดังนี้

กลุ่มที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
หน้าที่เหรียญหงาย	ก้อย	ก้อย	หัว	ก้อย	หัว	หัว	หัว	ก้อย	ก้อย	หัว

ตาราง 5.1.2

เมื่อนักเรียนทำการทดลองเสร็จ ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. เหรียญของทุกกลุ่มหงายหัวตามต้องการหรือไม่
2. นักเรียนสามารถทำนายล่วงหน้าก่อนเหรียญจะหยุดว่าเหรียญจะหงายหน้าใดได้หรือไม่

(ข) ใช้นักเรียน 10 กลุ่มเดิม ครูแจกลูกเต๋ากลุ่มละ 1 ลูก ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มโยนลูกเต๋า 20 ครั้ง เมื่อลูกเต๋าหยุดให้นักเรียนสังเกตหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ว่าแต่ละครั้งลูกเต๋าหงายหน้าที่มีกี่แต้ม แล้วบันทึกผลการทดลองที่ได้แต่ละครั้ง เช่น สมมุติว่ากลุ่มที่ 1 ทดลองแล้วได้ผลดังนี้

ครั้งที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
จำนวนแต้ม	5	4	6	1	2	2	3	4	6	5	5	4	1	3	6	2	6	5	1	1

ตาราง 5.1.3

เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มทำการทดลองเสร็จ ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่มี 1 แต้มเสมอ ใช่หรือไม่
2. ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่มี 3 แต้ม หรือ 5 แต้ม เท่านั้นใช่หรือไม่
3. ลูกเต๋าของนักเรียนมีโอกาสหงายหน้าอะไรได้บ้าง
4. ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่มี 7 แต้ม ได้หรือไม่ เพราะเหตุไร

ครูให้นักเรียนทุกกลุ่มโยนลูกเต๋าของตน 1 ครั้ง ให้ได้ลูกเต๋าหงายหน้าที่มี 5 แต้ม เมื่อนักเรียนทุกกลุ่มทำการทดลองแล้ว ครูเขียนผลที่ได้บนกระดาน สมมุติว่าได้ผลดังนี้

กลุ่มที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
จำนวนแต้ม	4	5	5	3	2	1	6	5	2	3

ตาราง 5.1.4

ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. ลูกเต๋าของทุกกลุ่มหงายหน้า 5 ตามที่ต้องการหรือไม่
2. นักเรียนสามารถทำนายล่วงหน้าได้หรือไม่ว่า ลูกเต๋าจะหงายหน้าที่มีกี่แต้ม

(ค) ใช้นักเรียน 10 กลุ่มเดิม ครูแจกกล่องซึ่งภายในบรรจุลูกแก้วสีแดงขนาดเท่ากัน 10 ลูก ให้ทุกกลุ่ม ๆ ละหนึ่งกล่อง ให้แต่ละกลุ่มหลับตาแล้วหยิบลูกแก้วในกล่อง 1 ลูก ได้ลูกแก้วสีอะไรบันทึกไว้ แล้วใส่ลูกแก้วนั้นคืนในกล่อง หลับ-ตาหยิบขึ้นมาใหม่อีก 1 ลูก ได้ลูกแก้วสีอะไรบันทึกไว้ ทำซ้ำ ๆ กันอย่างนี้ 10 ครั้ง แล้วบันทึกผลที่ได้ในตาราง

ครั้งที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
สีของลูกแก้ว	แดง	...	...	...	...	แดง	...	...	...	...

ตาราง 5.1.5

เมื่อนักเรียนทำการทดลองเสร็จ ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. ลูกแก้วที่นักเรียนหยิบได้แต่ละครั้งเป็นสีอะไรบ้าง
2. นักเรียนมีโอกาสหยิบได้ลูกแก้วสีเขียวหรือไม่
3. นักเรียนสามารถทำนายผลก่อนหยิบได้หรือไม่ว่า ครั้งต่อไปนักเรียนจะหยิบได้ลูกแก้วสีอะไร

ขั้นที่ 2 ครูสรุปว่า การทดลองในข้อ ก และ ข เรียกว่าการทดลองสุ่ม ส่วนการทดลองในข้อ ค ไม่ใช่การทดลองสุ่ม เพราะเราทราบผลลัพธ์แน่นอนว่า ไม่ว่าเราจะหยิบครั้งใดก็ต้องได้ลูกแก้วสีแดงแน่ ๆ

ขั้นที่ 3 ครูให้นักเรียนยกตัวอย่างของการทดลองที่เป็นการทดลองสุ่ม และการทดลองที่ไม่เป็นการทดลองสุ่มอย่างละ 5 ตัวอย่าง

การทดลองที่เป็นการทดลองสุ่มมี

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....
5. ....

การทดลองที่ไม่เป็นการทดลองสุ่มมี

1. ....

2. ....

3. ....

4. ....

5. ....

ขั้นที่ 4 ครูให้นักเรียนช่วยกันสรุปความหมายของการทดลองสุ่ม และเขียนเป็นนิยาม

บทนิยาม ....

5.2 ความหมายของแซมเปิ้ลสเปซ

จุดมุ่งหมาย

1. เพื่อให้นักเรียนทราบว่าแซมเปิ้ลสเปซคืออะไร และจุดตัวอย่างคืออะไร

2. เมื่อมีการทดลองอย่างหนึ่งเกิดขึ้น ให้นักเรียนสามารถเขียนเซตของแซมเปิ้ลสเปซ และบอกได้ว่าอะไรคือจุดตัวอย่างของการทดลองนั้นได้

3. เพื่อให้นักเรียนทราบว่าในการทดลองอย่างหนึ่งนั้น อาจมีแซมเปิ้ลสเปซมากกว่าหนึ่งเซตก็ได้ ขึ้นอยู่กับว่าเราสนใจอะไร

วิธีการ

ให้นักเรียนทำการทดลองเป็นลำดับขั้นดังนี้

ขั้นที่ 1 (ก) ครูให้นักเรียนแต่ละคนโยนเหรียญบาท 1 อัน คนละ 10 ครั้ง แล้วบันทึกผลว่าแต่ละครั้งเมื่อเหรียญหยุดแล้วเหรียญหงายหัวหรือหงายก้อย เช่นสมมุติว่า คนที่ 1 ทดลองแล้วได้ผลดังนี้

ครั้งที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
หน้าที่เหรียญหงาย	ก้อย	หัว	ก้อย	ก้อย	หัว	หัว	หัว	ก้อย	หัว	หัว

ตาราง 5.2.1

เมื่อนักเรียนทุกคนทำการทดลองและบันทึกผลของการทดลองเรียบร้อยแล้ว ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. ในการทดลองนี้เหรียญของนักเรียนหงายหน้าอะไรบ้าง
2. ถ้า H แทน กรณีที่เหรียญหงายหัว
   T แทน กรณีที่เหรียญหงายก้อย

   จงเขียนเซตของกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

   ....

ให้นักเรียนแต่ละคนโยนเหรียญบาทของตนอีกคนละ 10 ครั้ง เมื่อเหรียญหยุดให้สังเกตดูว่าเหรียญหงายหัวจำนวนกี่อัน ถ้าเหรียญไม่หงายหัวเลย ให้ถือว่าเหรียญหงายหัว 0 อัน แล้วบันทึกผลในตารางดังนี้

ครั้งที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
จำนวนหัวที่เหรียญหงาย	0	1	0	0	---	---	---	---	---	---

ตาราง 5.2.2

เมื่อนักเรียนแต่ละคนทำการทดลอง และบันทึกผลเรียบร้อยแล้ว ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. จำนวนหัวที่เหรียญหงายเป็นเท่าไรได้บ้าง
2. จำนวนหัวที่เหรียญหงายเป็น 2 ได้หรือไม่? เพราะอะไร?
3. จงเขียนเซตของจำนวนหัวที่เหรียญหงายที่เป็นไปได้ทั้งหมด

   ....

(ข) ครูให้นักเรียนแต่ละคนโยนเหรียญบาท 1 อัน และเหรียญสลึง 1 อัน พร้อมกัน 20 ครั้ง แต่ละครั้งที่เหรียญทั้งสองหยุด ให้นักเรียนสังเกตลักษณะหน้าที่เหรียญหงาย แล้วบันทึกผลที่ได้แต่ละครั้งว่าเหรียญบาทหงายหน้าใด เหรียญสลึงหงายหน้าใดในตารางดังนี้

ครั้งที่	1	2	3	4	....	20
หน้าที่เหรียญบาทหงาย	หัว	ก้อย	...	...	....	หัว
หน้าที่เหรียญสลึงหงาย	ก้อย	ก้อย	...	...	....	หัว

ตาราง 5.2.3

เมื่อนักเรียนทำการทดลองและบันทึกผลเสร็จแล้ว ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

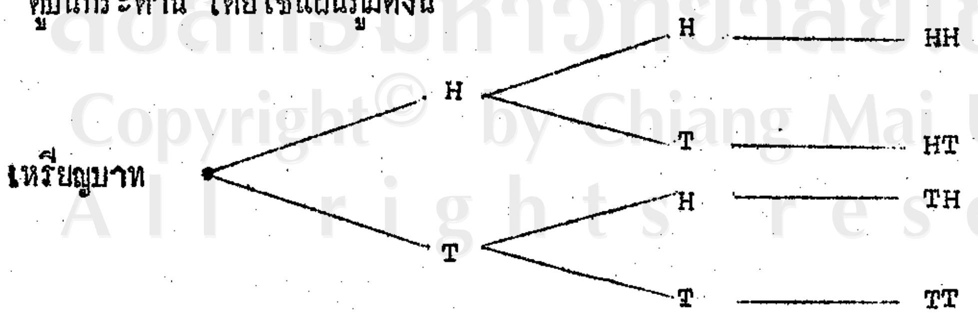
1. กรณีที่เหรียญบาทหงายหัวและเหรียญสลึงหงายก้อย กับกรณีที่เหรียญสลึงหงายก้อยและเหรียญบาทหงายหัว เป็นกรณีเดียวกันหรือไม่

2. มีกรณีต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นต่างกันทั้งหมดกี่กรณี อะไรบ้าง

3. ถ้าให้ HT แทน กรณีที่เหรียญบาทหงายหัวและเหรียญสลึงหงายก้อย จงเขียนเซตของกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองนี้

....

เพื่อให้ดูง่ายขึ้น ครูเขียนแสดงกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดให้นักเรียนดูบนกระดาน โดยใช้แผนภูมิดังนี้



รูปที่ 5.2.1

ให้นักเรียนทำการทดลองโยนเหรียญบาท 1 อัน และเหรียญสลึง 1 อัน พร้อมกันอีกคนละ 20 ครั้ง แต่คราวนี้พอเหรียญทั้งสองหยุด ให้สังเกตว่าเหรียญหงายหัวกี่อัน ถ้าไม่มีเหรียญใดหงายหัวเลย ให้ถือว่าจำนวนเหรียญที่หงายหัวเป็น 0 อัน แล้วบันทึกผลที่ได้จากการทดลองในตารางดังนี้

ครั้งที่	1	2	3	4	....	20
จำนวนหัวที่เหรียญหงาย	1	2	0	2	....	0

<u>ตาราง 5.2.4</u>

เมื่อนักเรียนทำการทดลองและบันทึกผลเรียบร้อยแล้ว ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. จำนวนหัวที่เหรียญหงายเป็นจำนวนเท่าไรได้บ้าง
2. จำนวนหัวที่เหรียญหงายเป็น 3 ได้หรือไม่? เพราะเหตุไร?

   จงเขียนเซตของจำนวนหัวที่เหรียญหงายที่เป็นไปได้ทั้งหมด

   ....

3. จากการทดลองนี้นักเรียนจะเห็นว่า กรณี HH ตรงกับ 2 ดังนั้นกรณีต่าง ๆ ต่อไปนี้ตรงกับจำนวนใด

   HT ตรงกับ ....

   TH ตรงกับ ....

   TT ตรงกับ ....

(ค) ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละประมาณ 5 คน และแจกไพ่ให้แต่ละกลุ่ม ๆ ละ 1 สำรับ ซึ่งแต่ละสำรับจะมีไพ่ 52 ใบ เป็นไพ่ดอกจิก 13 ใบ ไพ่ข้าวหลามตัด 13 ใบ ไพ่โพแดง 13 ใบ และไพ่โพดำ 13 ใบ ครูชี้แจงให้นักเรียนรู้จักไพ่ชนิดต่าง ๆ แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำการทดลองดังนี้

ให้นักเรียนสับไพ่แล้วหยิบไพ่จากกองขึ้นมา 1 ใบ ดูว่าได้ไพ่ชนิดใดใน 4 ชนิดนี้ แล้วบันทึกผลเอาไว้ ใส่ไพ่ใบนั้นคืนไปในกองแล้วสับไพ่ใหม่ หยิบไพ่จากกองขึ้นมาอีก 1 ใบ ดูว่าได้ไพ่ชนิดใดบันทึกเอาไว้ ทำอย่างนี้ซ้ำ ๆ กัน 20 ครั้ง แล้วบันทึกผลในตารางทุกครั้งดังนี้

ครั้งที่	1	2	3	4	....	20
ชนิดของไพ่ที่หยิบได้	โพแดง	ดอกจิก	...	...	....	โพดำ

ตาราง 5.2.5

เมื่อนักเรียนทำการทดลองเสร็จ ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. ไพ่ที่นักเรียนหยิบได้ในแต่ละครั้ง อาจเป็นไพ่ชนิดใดได้บ้าง
2. ไพ่ที่นักเรียนหยิบได้ในแต่ละครั้ง จะเป็นไพ่ชนิดอื่นนอกจาก 4 ชนิดนี้ได้หรือไม่
3. จงเขียนเซตของกรณีต่าง ๆที่เป็นไปได้ทั้งหมด

....

ขั้นที่ 2 ครูเขียนเซตของกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของแต่ละการทดลองบนกระดานดังนี้

จากข้อ ก. {H, T} และ {1,0}

จากข้อ ข. {HH, HT, TH, TT} และ {2,1,0}

จากข้อ ค. {ดอกจิก, โพแดง, โพดำ, ข้าวหลามตัด }

และสรุปว่า {H,T} และ {1,0} เรียกว่าแซมเปิ้ลสเปซของการทดลองโยนเหรียญ 1 อัน

เรียก H และ T ว่าจุดตัวอย่าง

เรียก 1 และ 0 ว่าจุดตัวอย่าง

เรียก {HH, HT, TH, TT} ว่าแซมเปิ้ลสเปซของการโยนเหรียญ 2 อัน

เรียก HH, HT, TH, TT ว่า จุดตัวอย่าง

ทำนองเดียวกัน

เรียก {2,1,0} ว่าแซมเปิ้ลสเปซของการโยนเหรียญ 2 อัน

เรียก 2,1 และ 0 ว่า จุดตัวอย่าง

เรียก {ดอกจิก, โพแดง, โพดำ, ข้าวหลามตัด } ว่าแซมเปิ้ลสเปซของการหยิบไพ่ 1 ใบจากสำรับ เมื่อเราสนใจเฉพาะดอกของไพ่

เรียก ดอกจิก, โพแดง, โพดำ, ข้าวหลามตัด ว่า จุดตัวอย่าง

แซมเปิ้ลสเปซ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S

<u>ขั้นที่ 3</u> ครูตั้งคำถามให้นักเรียนตอบดังนี้

1. ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ถ้าให้ S เป็น แซมเปิ้ลสเปซ จงเขียนเซต S และจุดตัวอย่าง

S = ...

จุดตัวอย่างคือ ....

2. ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก สังเกตว่าลูกเต๋าหงายหน้าที่มีแต้มเป็นจำนวนคี่หรือจำนวนคู่ ถ้าให้ S เป็นแซมเปิ้ลสเปซ จงเขียนเซต S และจุดตัวอย่าง

S = ...

จุดตัวอย่างคือ........................

3. กล่องใบหนึ่งมีอักษรอยู่ 4 ตัว คือ a,b,c และ d หยิบอักษรจากกล่องนี้มา 1 ตัว จงเขียนแซมเปิ้ลสเปซ S และจุดตัวอย่าง

4. ในการทดลองอย่างหนึ่ง แซมเปิ้ลสเปซจะมีมากกว่าหนึ่งเซตได้หรือไม่

ขั้นที่ 4 ครูให้นักเรียนช่วยกันให้ความหมายของแซมเปิ้ลสเปซ และจุดตัวอย่าง แล้วสรุปเป็นนิยาม

บทนิยาม ....

5.3 ความหมายของความน่าจะเป็น

จุดมุ่งหมาย

1. เพื่อให้นักเรียนทราบว่าความน่าจะเป็นหมายความว่าอย่างไร

2. เพื่อให้นักเรียนบอกได้ว่าค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ จะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1

วิธีการ

ขั้นที่ 1 ครูแบ่งนักเรียนในชั้นออกเป็นกลุ่ม ๆ ละ ประมาณ 5 คน แต่ละกลุ่มครูแจกกล่องหนึ่งใบซึ่งบรรจุลูกแก้วสีดำที่มีขนาดเท่ากันจำนวนหนึ่ง (ถ้าไม่มีลูกแก้วอาจใช้เม็ดมะขาม หรือเม็ดน้อยหน่าแทนก็ได้) ให้แต่ละกลุ่มทำการทดลองดังนี้ หยิบลูกแก้วในกล่องขึ้นมา 50 ลูก และเอาสีแดงแต้มลูกแก้วทั้ง 50 ลูกนี้ พอสีแห้งดีแล้วใส่ลูกแก้วทั้งหมดนี้ลงไปในกล่องใบเดิมเขย่ากล่องจนลูกแก้วทั้งหมดผสมกันดีแล้วก็หลับตาหยิบลูกแก้วในกล่องขึ้นมาอีก 100 ลูก นับดูว่าเป็นลูกแก้วที่แต้มสีแดงกี่ลูก เช่นสมมุติว่า กลุ่มที่ 1 นับลูกแก้วที่หยิบขึ้นมาครั้งหลังนี้ได้ลูกแก้วที่แต้มสีแดง 20 ลูก ครูเขียนผลที่ได้ของแต่ละกลุ่มบนกระดานดังนี้

กลุ่มที่	1	2	3	4	....
จำนวนลูกแก้วที่แต้มสีแดง	20	25	...	...	....

ตาราง 5.3.1

ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. ในการหยิบครั้งที่ 2 กลุ่มที่ 1 หยิบได้ลูกแก้วสีแดงเป็นเศษส่วนเท่าไรของลูกแก้วที่เขาหยิบมาทั้งหมด

2. แต่ในกล่องนี้มีลูกแก้วที่แต้มสีแดงไว้เพียง 50 ลูก ดังนั้นลูกแก้ว 50 ลูกนี้ มีค่าประมาณเศษส่วนเท่าไรของลูกแก้วทั้งหมด

3. จากข้อมูลและการประมาณค่าในข้อ 1 และข้อ 2 นักเรียนทราบไหมว่าลูกแก้วในกล่องของกลุ่มที่ 1 มีทั้งหมดประมาณเท่าไร

4. ทำนองเดียวกัน จากข้อมูลในตาราง 5.3.1 นักเรียนจงหาดูว่าจำนวนลูกแก้วในแต่ละกล่องมีประมาณเท่าไร

ในการหยิบครั้งที่ 2 กลุ่มที่ 1 หยิบลูกแก้วขึ้นมา 100 ลูก ปรากฏว่าเป็นลูกแก้วที่แต้มสีแดง 20 ลูก ดังนั้นกลุ่มที่ 1 หยิบได้ลูกแก้วที่แต้มสีแดงเป็น $\frac{1}{5}$ ของลูกแก้วที่หยิบขึ้นมาทั้งหมด

$\frac{1}{5}$ นี้ เรียกว่าความถี่สัมพัทธ์ของลูกแก้วที่แต้มสีแดง

หรือสมมุติว่า ทำการทดลองโยนเหรียญ 1 อัน 20 ครั้ง เหรียญหงายหัว 12 ครั้ง ดังนั้นเหรียญหงายหัวเป็น $\frac{12}{20}$ หรือ $\frac{3}{5}$ ของจำนวนครั้งทั้งหมดที่โยน

เรียก $\frac{3}{5}$ ว่า ความถี่สัมพัทธ์ของจำนวนเหรียญที่หงายหัว ซึ่งเขียนเป็นนิยามได้ดังนี้

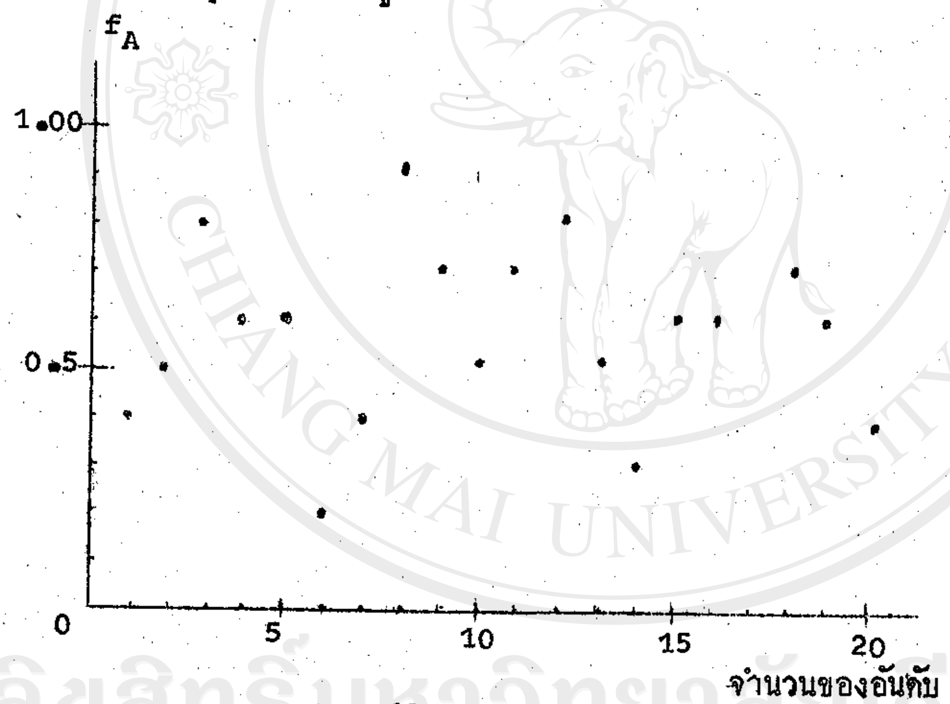
<u>บทนิยาม 5.3.1</u> ในการทดลองอย่างหนึ่ง มีการกระทำซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง ถ้า A เป็นเหตุการณ์ในการทดลองนั้น n_A เป็นจำนวนครั้งที่เหตุการณ์ A เกิดขึ้น

เรียก $f_A = \frac{n_A}{n}$ ว่าความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ A

<u>ขั้นที่ 2</u> ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม ๆ ละประมาณ 5 คน ครูแจกเหรียญที่เที่ยงตรงกลุ่มละ 1 อัน และให้แต่ละกลุ่มทำการทดลองดังนี้

<u>การทดลอง</u> โยนเหรียญ 1 อัน 10 ครั้ง ทำการทดลองนี้ซ้ำกัน 20 ครั้ง ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายหัว แต่ละครั้งที่ทำการทดลองหา $f_A = \frac{n_A}{n}$ เช่น ครั้งที่ 1 โยนเหรียญ 10 ครั้ง สมมุติว่าเหรียญหงายหัว 8 ครั้ง เพราะฉะนั้น $f_A = \frac{n_A}{n} = \frac{8}{10} = 0.8$ เป็นต้น

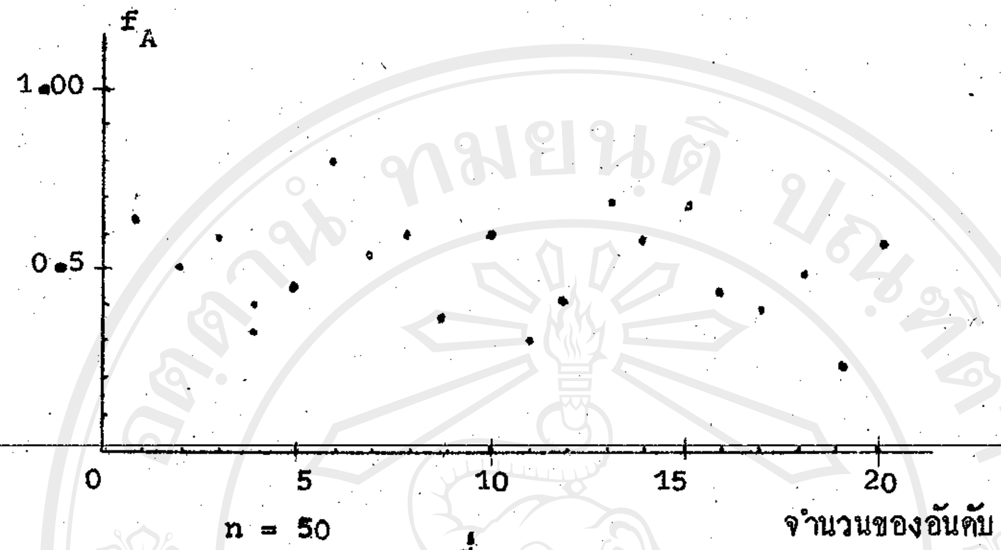
ค่าของ f_A จะมีทั้งหมด 20 อันดับ นำจำนวนของอันดับ และค่า f_A มาเขียนกราฟ สมมุติว่าได้ผลดังรูปที่ 5.3.1 (a)



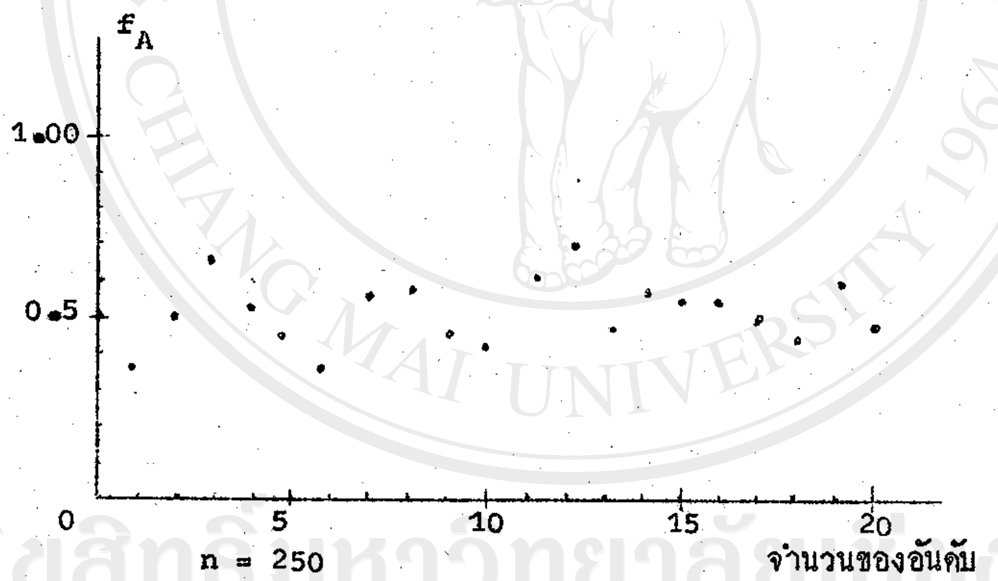
$n = 10$

<u>รูปที่ 5.3.1</u> (a)

การทดลองเดิม แต่ให้ $n = 50$ และ $n = 250$ สมมุติว่าได้ผลดังรูปที่ 5.3.1 (b) และ 5.3.1 (c)



รูปที่ 5.3.1 (b)



รูปที่ 5.3.1 (c)

จากรูปที่ 5.3.1 (a), (b) และ (c) ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

1. ถ้า f_A ของนักเรียนมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 หรือไม่? $f_A = 0$ หรือ 1 ได้หรือไม่?

2. จากรูปที่ 5.3.1 (a) ความถี่สัมพัทธ์ของนักเรียนมีค่าสูงสุดเท่าไร ค่าต่ำสุดเท่าไร ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดต่างกันเท่าไร

3. จากรูป 5.3.1 (b) ความถี่สัมพัทธ์ของนักเรียนมีค่าสูงสุดเท่าไร ค่าต่ำสุดเท่าไร ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดต่างกันเท่าไร

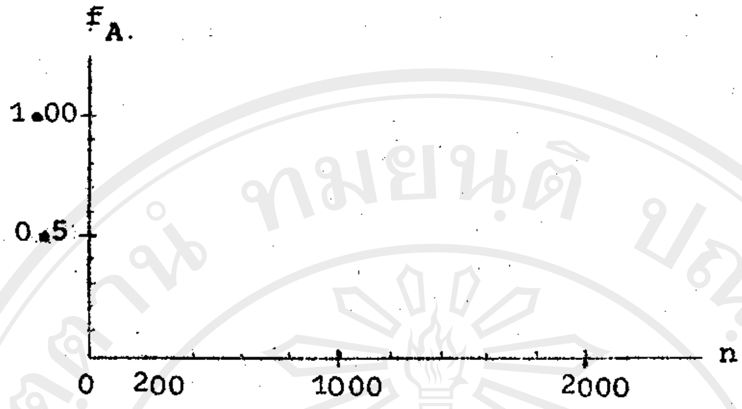
4. จากรูป 5.3.1 (c) ความถี่สัมพัทธ์ของนักเรียนมีค่าสูงสุดเท่าไร ค่าต่ำสุดเท่าไร ค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดต่างกันเท่าไร

<u>ขั้นที่ 3</u> ให้นักเรียนชุดเดิมทำการทดลองอย่างเดิม โดยให้ n มีค่าต่าง ๆ กัน โดยเพิ่มค่า n ขึ้นเรื่อย ๆ และหา f_A แล้วเขียนกราฟ แสดงความสัมพัทธ์ระหว่างจำนวนที่เพิ่มขึ้นของการทดลองซ้ำ กับความถี่สัมพัทธ์ของจำนวนครั้งที่เหรียญหงายหัว ผลที่ได้จากการทดลองให้นักเรียนเติมในตารางดังนี้

ครั้งที่	จำนวนครั้งที่โยนเพิ่ม	n	จำนวนครั้งที่เหรียญหงายหัวเพิ่ม	n_A	$f_A = \frac{n_A}{n}$
1	10	10	7	7	0.7
2	40	50	19	26	0.52
3	50	100	...	...	...
4	100	200	...	...	...
5	200	400	...	...	...
6	200	600	...	...	...
7	200	800	...	...	...
8	200	1000	...	...	...
9	200	1200	...	...	...
10	200	1400	...	...	...
11	200	1600	...	...	...
12	200	1800	...	...	...
13	200	2000	...	...	...

<u>ตาราง 5.3.2</u>

ผลจากตารางนี้ให้นักเรียนเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง n และ f_A ดังนี้



รูปที่ 5.3.2

ครูตั้งคำถาม ถามนักเรียนดังนี้

ถาม เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น f_A ของนักเรียนมีความโน้มเอียงเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าใด โดยดูจากกราฟ (แต่ละกลุ่มอาจจะตอบค่าต่างกันบ้าง แต่ก็จะได้ค่าที่ใกล้เคียงกัน)

ขั้นที่ 4 ครูสรุปว่า เมื่อ n มีค่าเพิ่มขึ้น f_A จะมีความโน้มเอียงเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่ง เรียกค่านี้ว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A กำหนดโดย P(A)

จากนั้นครูให้นักเรียนสรุปความหมายของความน่าจะเป็นแล้วเขียนเป็นนิยาม

บทนิยาม ....

....

5.4 <u>แนวทางการใช้สูตร $P(A) = 1 - P(\bar{A})$</u>

<u>จุดมุ่งหมาย</u> เพื่อให้นักเรียนทราบว่านักเรียนจะใช้สูตรนี้เมื่อไร และจะใช้อย่างไร

<u>วิธีการ</u>

<u>ขั้นที่ 1</u> ครูอธิบายโดยยกตัวอย่างดังนี้

<u>ตัวอย่าง 5.4.1</u> โยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าทั้งสองหงายอย่างน้อย 4 แต้ม จงหา P(A)

<u>วิธีที่ 1</u>

ตารางแสดงการโยนลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

<u>ตาราง 5.4.1</u>

จากตาราง 5.4.1 ถ้าให้ (3,5) แทน กรณีที่ลูกเต๋าลูกแรกหงายหน้าที่มี 3 แต้ม และลูกเต๋าลูกที่สองหงายหน้าที่มี 5 แต้ม

ดังนั้นแซมเปิ้ลสเปซ S คือ {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

A = {(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}

จำนวนสมาชิกของ A = 33

จำนวนสมาชิกของ S = 36

$$\text{ดังนั้น} \quad P(A) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } A}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

นักเรียนจะเห็นว่าสำหรับโจทย์ข้อนี้ การหา P(A) โดยตรงทำให้ยุ่งยากและเสียเวลา ซึ่งสามารถทำให้ง่ายขึ้น โดยหา $P(\bar{A})$ ก่อน แล้วจึงใช้สูตร $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ ก็จะได้ P(A) ตามต้องการ ดังวิธีที่ 2 ที่จะแสดงต่อไปนี้

<u>วิธีที่ 2</u>

เนื่องจาก A เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงายอย่างน้อย 4 แต้ม

ดังนั้น $\bar{A}$ เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงายน้อยกว่า 4 แต้ม

ดังนั้น $\bar{A}$ = {(1,1), (1,2), (2,1) }

จำนวนสมาชิกของ $\bar{A}$ = 3

จำนวนสมาชิกของ S = 6 x 6 = 36

ดังนั้น $P(\bar{A}) = \frac{\text{จำนวนสมาชิกของ } \bar{A}}{\text{จำนวนสมาชิกของ } S} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

เพราะฉะนั้น $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

ขั้นที่ 2 ครูสรุปแนวทางการใช้สูตรนี้ว่า สูตรนี้จะช่วยในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ได้ง่ายขึ้น ในกรณีที่ ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่ต้องการ ฉะนั้น $\bar{A}$ ก็จะเป็นเหตุการณ์ที่ไม่ต้องการ ลองมาคิดดูว่า P(A) หรือ $P(\bar{A})$ อันไหนหาค่าได้ง่ายกว่ากัน ถ้าหาค่า P(A) ได้ง่ายกว่า ก็หา P(A) เลยจะได้ความน่าจะเป็นที่ต้องการ ถ้า $P(\bar{A})$ หาง่ายกว่า ก็หา $P(\bar{A})$ เสียก่อนแล้วจึงหาค่า P(A) โดยใช้สูตรนี้

5.5 ความหมายของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

จุดมุ่งหมาย

1. เพื่อให้นักเรียนทราบว่าความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขหมายความว่าอย่างไร และสามารถให้นิยามได้

2. เพื่อให้นักเรียนสามารถหาค่าความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขได้

วิธีการ

ขั้นที่ 1 แบ่งนักเรียนในห้องเป็นกลุ่ม ๆ ละประมาณ 5 คน แต่ละกลุ่มครูแจกกล่องหนึ่งใบ ซึ่งภายในกล่องบรรจุลูกแก้ว 10 ลูก เป็นสีแดง 4 ลูก สีขาว 6 ลูก

การทดลองที่ 1 ให้แต่ละกลุ่มหยิบลูกแก้วในกล่องขึ้นมา 1 ลูก แล้วบันทึกผลว่าได้ลูกแก้วสีอะไร เสร็จแล้วใส่ลูกแก้วนั้นคืนในกล่อง แล้วหยิบลูกแก้วในกล่องขึ้นมาใหม่ 1 ลูก บันทึกผลว่าได้สีอะไร ซึ่งผลอาจเป็นอย่างใดอย่างหนึ่งใน 4 อย่างนี้คือ

กรณีที่	หยิบครั้งที่ 1	ความน่าจะเป็น	หยิบครั้งที่ 2	ความน่าจะเป็น
1	สีแดง	$P(A) = \frac{4}{10}$	สีแดง	$P(B) = \ldots\ldots$
2	สีแดง	$P(A) = \ldots$	สีขาว	$P(\bar{B}) = \ldots\ldots$
3	สีขาว	$P(\bar{A}) = \frac{6}{10}$	สีแดง	$P(B) = \frac{4}{10}$
4	สีขาว	$P(\bar{A}) = \ldots$	สีขาว	$P(\bar{B}) = \ldots$

ตาราง 5.5.1

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วสีแดง ในการหยิบครั้งที่ 1
B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วสีแดง ในการหยิบครั้งที่ 2

ถาม

1. $P(A)$ เท่ากับเท่าไร
2. $P(B)$ เท่ากับเท่าไร
3. $P(B)$ ในกรณีที่ 1 และ $P(B)$ ในกรณีที่ 3 เท่ากันหรือไม่
4. ค่า $P(B)$ ในการทดลองที่ 1 นี้ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ A หรือไม่

การทดลองที่ 2 ให้แต่ละกลุ่มหยิบลูกแก้วในกล่องขึ้นมา 1 ลูก แล้วบันทึกผลว่าได้ลูกแก้วสีอะไร โดยไม่มีการใส่คืน ให้หยิบลูกแก้วในกล่องขึ้นมาอีก 1 ลูก แล้วบันทึกผลว่าได้ลูกแก้วสีอะไร ซึ่งผลอาจเป็นอย่างใดอย่างหนึ่งใน 4 อย่างนี้

กรณีที่	หยิบครั้งที่ 1	ความน่าจะเป็น	หยิบครั้งที่ 2	ความน่าจะเป็น
1	สีแดง	$P(A) = \ldots$	สีแดง	$P(B) = \ldots$
2	สีแดง	$P(A) = \frac{4}{10}$	สีขาว	$P(\bar{B}) = \ldots$
3	สีขาว	$P(\bar{A}) = \ldots$	สีแดง	$P(B) = \frac{4}{9}$
4	สีขาว	$P(\bar{A}) = \ldots$	สีขาว	$P(\bar{B}) = \ldots$

ตาราง 5.5.2

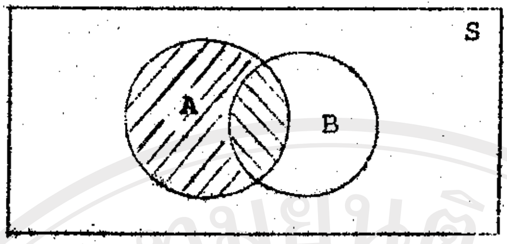
ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วสีแดงในการหยิบครั้งที่ 1
B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกแก้วสีแดงในการหยิบครั้งที่ 2

ถาม

1. P(A) เท่ากับเท่าไร
2. P(B) เท่ากับเท่าไร
3. P(B) ในกรณีที่ 1 และ P(B) ในกรณีที่ 3 มีค่าเท่ากันหรือไม่
4. ค่า P(B) ในการทดลองที่ 2 นี้ ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ A หรือไม่
5. การทดลองทั้ง 2 การทดลองนี้ ให้ผลต่างกันอย่างไร

....

จะเห็นว่าเหตุการณ์ A และ B ในการทดลองที่ 2 เป็นเหตุการณ์ที่เกี่ยวข้องกัน เพราะจากกรณีที่ 1 ครั้งแรกหยิบได้ลูกแก้วสีแดง $P(A) = \frac{4}{10}$ ดังนั้น $P(B) = \frac{3}{9}$ หรือ จากกรณีที่ 3 ครั้งแรกหยิบได้ลูกแก้วสีขาว คือเหตุการณ์ A ไม่เกิดขึ้น ดังนั้น $P(B) = \frac{4}{9}$ ซึ่งสามารถเขียนแสดงความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ A และ B ได้ดังรูปที่ 5.5.1



รูปที่ 5.5.1

เหตุการณ์ A และ B ที่เกี่ยวข้องกันนี้ เรียก A กับ B ว่า เหตุการณ์ไม่อิสระ เมื่อ A กับ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่อิสระ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว ใช้สัญลักษณ์ $P(B \setminus A)$ อ่านว่า ความน่าจะเป็นของ B เมื่อกำหนด A มาให้

$P(B \setminus A)$ เป็นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข คือเป็นค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ที่มีเงื่อนไขว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว ฉะนั้น จากที่นักเรียนทดลองในการทดลองที่สองนี้ จะได้ $P(B\setminus A) = \frac{3}{9}$

อีกตัวอย่างหนึ่ง โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนชาย 100 คน นักเรียนหญิง 50 คน สำรวจจำนวนผู้ที่เลือกเรียนคณิตศาสตร์ ปรากฏว่ามีนักเรียนชายเลือกเรียนคณิตศาสตร์ 75 คน นักเรียนหญิงเลือกเรียนคณิตศาสตร์ 10 คน สุ่มนักเรียนของโรงเรียนนี้มา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เลือกเรียนคณิตศาสตร์จะเป็นนักเรียนชาย

<u>วิธีทำ</u> เพื่อให้ดูง่าย เขียนเป็นตารางได้ดังนี้

	เลือกเรียนคณิตศาสตร์	ไม่เลือกเรียนคณิตศาสตร์	รวม
ชาย	75	25	100
หญิง	10	40	50
รวม	85	65	150

ตาราง 5.5.3

เมื่อสุ่มนักเรียนของโรงเรียนนี้มา 1 คน ถ้าให้

A เป็นเหตุการณ์ที่ได้นักเรียนชาย

B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผู้ที่เลือกเรียนคณิตศาสตร์

จากตาราง 5.5.3 จะได้ $P(A) = \frac{100}{150}$ และ $P(B) = \frac{85}{150}$

ถ้าหากทราบว่าเป็นนักเรียนชาย ความน่าจะเป็นที่เขาจะเลือกเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $P(B \setminus A)$ จะเท่ากับ $\frac{75}{100}$ กล่าวคือ เมื่อทราบว่าเขาเป็นนักเรียนชาย ฉะนั้นเซตที่จะพิจารณาทั้งหมดก็เป็นเซตของนักเรียนชาย ซึ่งมีจำนวน 100 คน ในจำนวนนี้มีผู้เลือกเรียนคณิตศาสตร์ 75 คน ฉะนั้น

$$P(B \setminus A) = \frac{75}{100}$$

เซตของนักเรียนชายที่เลือกเรียนคณิตศาสตร์ก็คือ $A \cap B$ ซึ่งมีจำนวนสมาชิก 75 จะเห็นว่า $P(B \setminus A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

เมื่อ $n(A \cap B)$ และ $n(A)$ คือจำนวนสมาชิกในเซต $A \cap B$ และ A ตามลำดับ

จาก $P(B \setminus A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

ให้ S เป็นแซมเปิ้ลสเปซ

เอา $n(S) > 0$ หารทั้งเศษและส่วน

$$P(B \setminus A) = \frac{n(A \cap B)/n(S)}{n(A)/n(S)}$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ขั้นที่ 2 นักเรียนจงให้นิยามของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดว่าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว

บทนิยาม ....

หมายเหตุ จากบทนิยามนี้ $P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ถ้าหากเปลี่ยนตัวอักษรจาก A เป็น B และ B เป็น A จะได้ $P(A \setminus B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$

ซึ่งเขียนได้ในรูป $P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A \setminus B)$

แต่ $A \cap B = B \cap A$

ดังนั้น $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \setminus A) = P(B) \cdot P(A \setminus B)$

5.6 ความหมายของเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

จุดมุ่งหมาย

1. เพื่อให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ใด เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน และสามารถให้นิยามได้

2. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ ในการทดลองอย่างหนึ่ง นักเรียนสามารถบอกได้ว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันหรือไม่

วิธีการ

ขั้นที่ 1 ครูอธิบายความหมายของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกันโดยยกตัวอย่างดังนี้

ตัวอย่าง 5.6.1 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ดังนั้นแซมเปิ้ลสเปซ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็นจำนวนคู่ จะได้

$A = \{2,4,6\}$

ถ้า B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็นจำนวนคี่ จะได้

$B = \{1,3,5\}$

ถ้า C เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 4 จะได้

$C = \{4\}$

จะเห็นว่า $A,B,C \subset S$ ดังนั้น A,B,C เป็นเหตุการณ์ใน S
พิจารณาเหตุการณ์ A และ B , B และ C จะเห็นว่า

$A \cap B = \emptyset$ และ $B \cap C = \emptyset$

เหตุการณ์ A และ B เรียกว่าเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน
เช่นเดียวกัน เหตุการณ์ B และ C เรียกว่าเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

<u>ตัวอย่าง 5.6.2</u> ในกล่องใบหนึ่งมีลูกบอลล์สีแดง 10 ลูก เขียว 5 ลูก และดำ 3 ลูก หยิบลูกบอลล์ในกล่องขึ้นมา 1 ลูกอย่างเดาสุ่ม ถ้าสนใจว่าจะได้ลูกบอลล์สีอะไร ดังนั้น S = { แดง, เขียว, ดำ }

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่จะหยิบได้ลูกบอลล์สีแดง
ดังนั้น A = { แดง }
ถ้า B เป็นเหตุการณ์ที่จะหยิบได้ลูกบอลล์สีแดงหรือสีเขียว
ดังนั้น B = { แดง, เขียว }
ถ้า C เป็นเหตุการณ์ที่จะหยิบได้ลูกบอลล์สีดำ
ดังนั้น C = { ดำ }

จะเห็นว่า $A,B,C \subset S$

$A \cap C = \emptyset$ และ $B \cap C = \emptyset$

เหตุการณ์ A และ C เรียกว่าเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน
และ เหตุการณ์ B และ C เรียกว่าเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ตัวอย่างที่ 5.6.3 ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ เป็นไพ่ดอกจิก 13 ใบ ไพ่โพดำ 13 ใบ ไพ่โพแดง 13 ใบ และไพ่ข้าวหลามตัด 13 ใบ ถ้าหยิบไพ่อย่างเดาสุ่มขึ้นมา 1 ใบ และสนใจว่าจะเป็นไพ่ชนิดใดใน 4 ชนิดนี้

ดังนั้น S = { ดอกจิก, โพดำ, โพแดง, ข้าวหลามตัด }

ถาม

1. เหตุการณ์ใน S มีทั้งหมดกี่เหตุการณ์ อะไรบ้าง

....

2. มีเหตุการณ์ใดบ้างในข้อ 1 เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

....

ขั้นที่ 2 ครูให้นักเรียนให้นิยามของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

บทนิยาม ....

5.7 ความหมายของเหตุการณ์อิสระ

จุดมุ่งหมาย

1. เพื่อให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ใดเป็นเหตุการณ์อิสระ

2. เพื่อให้นักเรียนทราบว่า ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระแล้ว $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

3. เพื่อให้นักเรียนสามารถให้นิยามของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ ที่เป็นอิสระแก่กันได้

วิธีการ

ขั้นที่ 1 ครูอธิบายความหมายของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่เป็นอิสระแก่กันโดยเริ่มจากการทดลองดังนี้

<u>การทดลองที่ 1</u> แบ่งนักเรียนเป็นกลุ่ม ๆ ละประมาณ 5 คน แต่ละกลุ่มครูแจกเหรียญบาท 1 อัน และลูกเต๋า 1 ลูก ให้แต่ละกลุ่มโยนเหรียญบาทและลูกเต๋าพร้อมกัน กระทำแบบนี้ซ้ำ ๆ กัน 5 ครั้ง แต่ละครั้งบันทึกผลการทดลองว่าเหรียญบาทหงายหน้าใด และลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเท่าใด

ครั้งที่	เหรียญบาท	ลูกเต๋า
1	หัว	3
2	...	...
3	...	...
4	...	...
5	...	...

<u>ตาราง 5.7.1</u>

<u>ถาม</u>

1. ในการโยนครั้งที่ 1 เหรียญบาทหงายหัวและลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 3 ดังนั้นในการโยนครั้งต่อ ๆ ไป ถ้าเหรียญบาทหงายหัวแล้วลูกเต๋าจะต้องหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 3 เสมอใช่หรือไม่

2. ในการโยนแต่ละครั้ง ถ้าปรากฏว่าเหรียญบาทหงายก้อย แล้วลูกเต๋าจะต้องหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 5 เสมอใช่หรือไม่

3. ในการโยนแต่ละครั้ง ถ้าเหรียญบาทหงายหัว ขณะเดียวกันลูกเต๋าอาจหงายหน้าใดได้บ้าง

4. ในการทดลอง ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญบาทหงายหัว และ B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 3 เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นหรือไม่ก็ตาม มีผลต่อการเกิดเหตุการณ์ B หรือไม่

การทดลองที่ 2 ใช้นักเรียนชุดเดิม แต่ละกลุ่มครูแจกเหรียญบาท 1 อัน เหรียญสลึง 1 อัน ให้แต่ละกลุ่มโยนเหรียญ 2 อันนี้พร้อมกัน เมื่อเหรียญหยุดให้สังเกตดูว่าเหรียญแต่ละอันหงายหน้าอะไร แล้วบันทึกผลในตาราง 5.7.2 กระทำแบบนี้ซ้ำ ๆ กัน 5 ครั้ง

ครั้งที่	เหรียญบาท	เหรียญสลึง
1	ก้อย	หัว
2	...	...
3	...	...
4	...	...
5	...	...

ตาราง 5.7.2

ถาม

1. ในการโยนครั้งที่ 1 ปรากฏว่าเหรียญบาทหงายก้อย และเหรียญสลึงหงายหัว ดังนั้นในการโยนครั้งต่อ ๆ ไป ถ้าเหรียญบาทหงายก้อย แล้วเหรียญสลึงจะต้องหงายหัวเสมอใช่หรือไม่

2. ในการโยนแต่ละครั้ง ถ้าเหรียญบาทหงายก้อย ขณะเดียวกันเหรียญสลึงอาจหงายหน้าใดได้บ้าง

3. ในการทดลอง ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญบาทหงายหัว และ B เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญสลึงหงายหัว เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นหรือไม่ก็ตามมีผลต่อการเกิดเหตุการณ์ B หรือไม่

ขั้นที่ 2

ครูสรุปว่า เหตุการณ์ A และ B ในการทดลองที่ 1 เรียกว่าเหตุการณ์อิสระทำนองเดียวกัน เหตุการณ์ A และ B ในการทดลองที่ 2 เรียกว่าเหตุการณ์อิสระ

ขั้นที่ 3

นักเรียนได้เคยศึกษาเรื่องความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขมาแล้ว และเคยพิจารณาเมื่อเหตุการณ์ A และ B มีความเกี่ยวข้องกัน คือเหตุการณ์หนึ่งขึ้นอยู่กับอีกเหตุการณ์หนึ่ง เช่น เหตุการณ์ B ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ A จะได้

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \setminus A)$$

เมื่อ $P(B \setminus A)$ คือ ความน่าจะเป็นของ B เมื่อ A เกิดขึ้นแล้ว แต่ถ้าเหตุการณ์ B ไม่ขึ้นอยู่กับเหตุการณ์ A เรียกว่า A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ คือไม่ว่า A จะเกิดหรือไม่เกิดก็ตาม ไม่มีผลต่อการเกิดเหตุการณ์ B แต่อย่างใด เมื่อเป็นดังนี้จะได้ $P(B \setminus A) = P(B)$

เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

ตัวอย่าง 5.7.1 โยนเหรียญที่เที่ยงตรง 1 อัน และลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 1 ลูกพร้อมกัน ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายหัว และ B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 4 จะเห็นว่า A กับ B ไม่ขึ้นอยู่แก่กันเลย เหรียญจะขึ้นหัวหรือไม่ก็ตาม ไม่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงในการที่ลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 4 แต่อย่างใด ฉะนั้นจะหาความน่าจะเป็นที่เหรียญหงายหัว และลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 4 ได้จากสูตร

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

ถาม จากตัวอย่าง 5.7.1 ให้นักเรียนเขียนตารางแสดงจุดตัวอย่างทั้งหมดของแซมเปิ้ลสเปซ ดังนี้โดยให้ H และ T แทนกรณีที่เหรียญหงายหัวและก้อยตามลำดับ

ลูกเต๋า / เหรียญ	1	2	3	4	5	6
H	(H, 1)	...	...	...	...	...
T	...	...	...	...	...	...

ตาราง 5.7.3

จากนั้นให้นักเรียนหาค่าความน่าจะเป็นที่เหรียญหงายหัวและลูกเต๋าหงายหน้าที่มีจำนวนแต้มเป็น 4 โดยวิธีนับจำนวนสมาชิกในแซมเปิ้ลสเปซ แล้วเปรียบเทียบคำตอบที่ได้ว่าเท่ากันกับการใช้สูตร $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ นี้หรือไม่

<u>ขั้นที่ 4</u> นักเรียนจงให้นิยามของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ที่เป็นอิสระแก่กันในแง่ของความน่าจะเป็น

<u>บทนิยาม</u> ....

5.8 <u>ความหมายของตัวแปรสุ่ม</u>

<u>จุดมุ่งหมาย</u>

เพื่อให้นักเรียนทราบว่าตัวแปรสุ่มหมายความว่าอย่างไร

<u>วิธีการ</u>

<u>ขั้นที่ 1</u> ครูอธิบายความหมายของตัวแปรสุ่มโดยเริ่มดังนี้

ในการทดลองอย่างหนึ่ง เหตุการณ์ที่เกิดขึ้นอาจมีลักษณะเป็นตัวเลขหรือไม่เป็นก็ได้ เช่น ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าให้ S เป็นเซตของจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย จะได้ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ กรณีนี้แซมเปิ้ลสเปซเป็นค่าตัวเลข ถ้าโยนเหรียญ 2 อันพร้อมกัน สังเกตลักษณะหน้าที่เหรียญหงาย จะได้ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ กรณีนี้แซมเปิ้ลสเปซไม่เป็นตัวเลข เราจึงกำหนดตัวเลขเพื่อใช้แทนจำนวนสมาชิกในแซมเปิ้ลสเปซ ดังตัวอย่าง 5.8.1

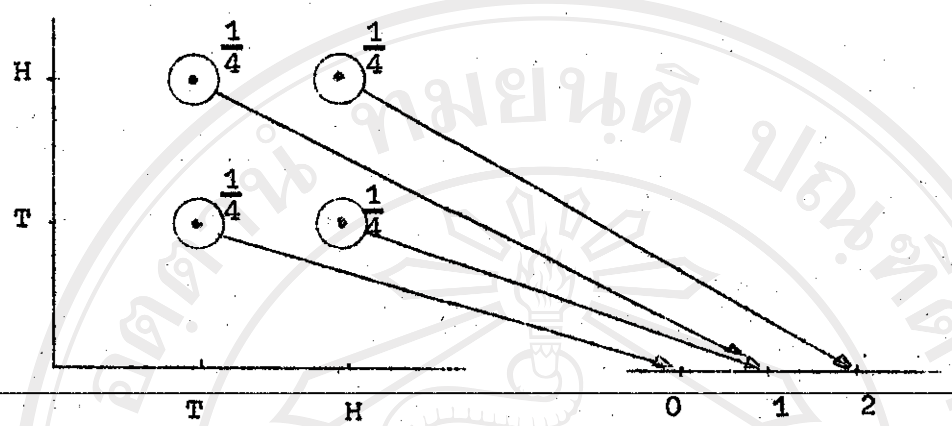
<u>ตัวอย่าง 5.8.1</u> ในการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 2 อัน 1 ครั้ง จะได้ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ ถ้ากำหนดตัวเลขแทนกรณีต่าง ๆ ใน S ดังนี้

ให้ 2 แทน กรณีที่เหรียญหงายหัว 2 อัน คือ HH

1 แทน กรณีที่เหรียญหงายหัว 1 อัน คือ HT และ TH

0 แทน กรณีที่เหรียญไม่หงายหัวเลย คือ TT

การทำอย่างนี้ก็คือ การจับคู่กันของสมาชิกในแซมเปิ้ลสเปซกับตัวเลขนั้นเอง ดังแสดงในรูป 5.8.1



รูปที่ 5.8.1

นักเรียนจะเห็นว่าการจับคู่นี้เป็นฟังก์ชัน ให้ชื่อว่าฟังก์ชัน f ซึ่งมีโดเมนเป็นแซมเปิ้ลสเปซ และมีเรนจ์ เป็น { 2,1,0 } หรือกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันจากแซมเปิ้ลสเปซไปยังเซตของจำนวนจริง เรียก f ว่าตัวแปรสุ่ม

$f(\{HH\})$ หรือเขียนสั้น ๆ ว่า $f(HH) = 2$

$f(HT) = f(TH) = 1$

$f(TT) = 0$

ให้ $\hat{P}(0)$ แทน ความน่าจะเป็นของฟังก์ชัน f ที่ 0

ดังนั้น $\hat{P}(0) = P(A) = \frac{1}{4}$ เมื่อ $A = \{TT\}$

$\hat{P}(1) = P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ เมื่อ $B = \{HT, TH\}$

$\hat{P}(2) = P(C) = \frac{1}{4}$ เมื่อ $C = \{HH\}$

$\hat{P}(0,1) = \hat{P}(0) + \hat{P}(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

ความน่าจะเป็นอื่น ๆ ก็หาได้ทำนองเดียวกัน จากค่าความน่าจะเป็นเบื้องต้น ซึ่งเราทราบ.
