บทที่ 2

ทฤษฎี

การแจกแจงความถี่ของช่วงเวลาระหว่างรังสีสองตัวที่มาต่อเนื่องกัน จะมีรูปแบบเป็น exponential ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของการกระจายแบบปัวซอง กละการกระจายแบบปัวซองก็มีพื้นฐานมาจากการกระจายแบบทวินามซึ่งครอบคลุมขบวนการต่าง ๆ ที่เป็นขบวนการแบบสุ่ม (Evans, 1967)

2.1 การแจกแจงความถี่แบบทวินาม (Binomial Distribution)

การแจกแจงความถี่แบบทวินามเสนอขึ้นมาโดยเบอร์นูลี (Bernoulli) ในตอนต้นศตวรรษที่สิบแปด (Evans, 1967) การแจกแจงแบบนี้ใช้หาค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ขึ้น x ครั้ง ในจำนวนการทดลองสุ่ม (random experiment) ทั้งหมด z ครั้ง โดยในการทดลองแต่ละครั้ง ให้โอกาสมีเหตุการณ์จะเกิดขึ้นเป็น p และโอกาสที่เหตุการณ์จะไม่เกิดขึ้นเป็น q ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1-p ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะมีเหตุการณ์เกิดขึ้น x ครั้ง ในการทดลองสุ่มทั้งหมด z ครั้ง จะมีค่าเท่ากับ(Evans , 1967)

$$P_x = \frac{z!}{(z-x)!x!} p^x(1-p)^{z-x} \qquad (2.1)$$

เมื่อ P_x = ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ x ครั้งจากการทดลองสุ่มทั้งหมด z ครั้ง

p = ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์จะเกิดขึ้นในการทดลองแต่ละครั้ง

2.2 การแจกแจงความถี่แบบปัวซอง (Poisson Distribution)

การแจกแจงความถี่แบบปัวซองสามารถอนุมาน (deduced) มาจากการแจกแจงแบบทวินาม (Evans , 1967) ในกรณีของขบวนการแบบสุ่มซึ่งมีโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์น้อย ๆ $P \ll 1$ ในขณะที่จำนวนครั้งของการทดลองสุ่ม z มีค่ามาก ๆ และค่าเฉลี่ยของการเกิดเหตุการณ์มีค่าคงที่ m = pz เมื่อ m เป็นค่าเฉลี่ยของการเกิดเหตุการณ์ในการทดลองสุ่ม z ครั้ง จากเงื่อนไขเหล่านี้สมการ(2.1) จะเขียนใหม่เป็น (Evans , 1967)

$$P_x = \frac{z^x p^x}{x!} e^{-pz} \qquad (2.2)$$

ในขบวนการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีที่จำนวนเหตุการณ์เฉลี่ยต่อหน่วยเวลามีค่าคงที่ให้เท่ากับ a ดังนั้น ในช่วงเวลา t จะมีจำนวนเหตุการณ์เฉลี่ยเท่ากับ at กล่าวคือ

$$m = at$$

สมการ(2.2) จะเขียนใหม่ได้เป็น

$$P_x = \frac{at^x}{x!}e^{-at} \qquad (2.3)$$

เมื่อ P_x = ความน่าจะเป็นที่จะมีเหตุการณ์เกิดขึ้น x ครั้งในช่วงเวลา t

a = จำนวนเหตุการณ์เฉลี่ยต่อหน่วยเวลา

t = ช่วงเวลาหนึ่ง ๆ

x = จำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา t

ถ้ากำหนดให้ t เป็นช่วงเวลาระหว่างรังสีสองตัวที่ถูกสลายตัวติดตามกันออกมา ในระหว่างช่วงเวลา t นี้จะไม่มีเหตุการณ์เกิดขึ้น ดังนั้น X = 0 สมการ(2.3) จะเขียนใหม่ได้ว่า

$$P_o = e^{-at}$$

ถ้ากำหนดให้ adt เป็นความน่าจะเป็นที่จะมีเหตุการณ์เกิดขึ้นหนึ่งเหตุการณ์ ระหว่าง t และ t+dt แล้ว ความน่าจะเป็นมีจะไม่มีเหตุการณ์เกิดขึ้นในช่วงเวลา t และมีเหตุการณ์หนึ่งเหตุการณ์เกิดขึ้นในช่วงเวลา dt จะมีค่า

$$dP_t = ae^{-at}dt \qquad (2.4)$$

จากสมการ(2.4) จะพิจารณาเห็นว่าเหตุการณ์ที่มีช่วงเวลาสั้น ๆ จะมีโอกาสเกิดขึ้นมากกว่าเหตุการณ์พวกมีช่วงเวลายาว ๆ ดังนั้น ในการทดลองจำนวน interval ของพวกช่วงเวลาสั้น ๆ ควรมีจำนวนมากกว่าพวกจำนวน interval ที่มีช่วงเวลายาว ๆ

ถ้า N เป็นจำนวนช่วงเวลาทั้งหมด และ P_t เป็นโอกาสที่ช่วงเวลาจะมีค่าเท่ากับ t จำนวนช่วงเวลา (counts) ที่มีช่วงเวลา t จะมีค่า

$$n = NP_t$$

แทนค่า P_t จากสมการ(2.4) และอินติเกรดหาจำนวนช่วงเวลา n(t) สำหรับช่วงเวลาหนึ่งเวลาใดจะได้ว่า

$$n(t) = N\int_{t_1}^{t_2} ae^{-at}dt$$

$$n(t) = N(e^{-at_1} - e^{-at_2}) \qquad (2.5)$$

ในการทดลอง ถ้าเราทราบค่าคงที่ a และจำนวนข้อมูลทั้งหมด N เราสามารถหาจำนวนช่วงเวลาที่มีช่วงเวลาอยู่ระหว่าง t_1 ถึง t_2 ได้จากสมการ(2.5) จะเห็นว่าความสัมพันธ์ระหว่าง n(t) กับ t จะเป็นแบบexponential functionซึ่งเป็นแบบหนึ่งของการกระจายแบบปัวซอง

ความสัมพันธ์ระหว่าง n(t) กับ t ที่เป็นฟังชั่นแบบ exponentail นี้อาจเขียนความสัมพันธ์เป็น

$$n(t) = N_o e^{-at} \qquad (2.6)$$

เมื่อ n(t) = จำนวนช่วงเวลา (count) ที่มีช่วงเวลาเท่ากับ t

N_o = จำนวนช่วงเวลา (count) ที่มีช่วงเวลาเท่ากับศูนย์

t = ช่วงเวลาใด ๆ

จากผลการทดลองเมื่อนำมาเขียนกราฟความสัมพันธ์และ fit แล้ว เราจะได้ค่า a และ N_o ในสมการ(2.6) เมื่อต้องการหาค่าจำนวนช่วงเวลาทั้งหมด N เราก็ทำได้โดยการ integrate สมการ(2.6) ผลของการ integrate จะได้ค่า N ซึ่งควรมีค่าเท่ากับจำนวนช่วงเวลาหรือจำนวนข้อมูลทั้งหมดของการทดลอง

ดังนั้น ในการทดลองแบบสุ่มของการกระจายช่วงเวลาสมการ (2.5) และสมการ (2.6) จะเป็นสมการที่บอกถึงความสัมพันธ์แบบปัวซอง ระหว่างจำนวน interval กับช่วงเวลา t ข้อมูลผลการทดลองใดที่มีความสอดคล้องกับสมการทั้งสองดังกล่าวข้างต้น ก็จะกล่าวได้ว่าปรากฏการณ์นั้นมีการแจกแจงความถี่แบบปัวซอง