ภาคผนวก

ในภาคผนวกนี้จะกล่าวถึงการหาสูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ในกรณีที่ $p(z_0) = p'(z_0) = p''(z_0) = \cdots = p^{(k-1)}(z_0) = 0$ แต่ $p^{(k)}(z_0) \neq 0$ และ $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = \cdots = q^{(l-1)}(z_0) = 0$ แต่ $q^{(l)}(z_0) \neq 0$ โดยที่ $l > k$

ผู้อ่านที่ได้ศึกษาการหาสูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน ตามที่ผู้เขียนได้เขียนไว้ในบทที่ 5 นั้น คงจะเกิดความสงสัยว่า ถ้าในกรณีที่ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ และ $p(z_0) = p'(z_0) = p''(z_0) = \cdots = p^{(k-1)}(z_0) = 0$ แต่ $p^{(k)} \neq 0$ จะใช้สูตรการหาเรซิดิว เช่นเดียวกับ (5.7) ได้หรือไม่ ผู้เขียนจะขอกล่าวอย่างคร่าวๆ ดังต่อไปนี้

__ทฤษฎีที่ 1__ ให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ถ้า $p(z)$ มีซีโร่อันดับที่ k และ $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่ l โดยที่ $l > k$ แล้ว $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ จะมีโพลอันดับที่ $l - k$

__พิสูจน์__ เนื่องจาก $p(z)$ และ $q(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ กระจาย $p(z)$ และ $q(z)$ เป็นอนุกรมของเทย์เลอร์ รอบจุด z_0 เมื่อ $p(z)$ มีซีโร่อันดับที่ k ได้ดังนี้

$$p(z) = \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{(k)} + \frac{p^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{(k+1)} + \frac{p^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^{(k+2)} + \cdots$$

และเมื่อ $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่ l ได้ดังนี้

$$q(z) = \frac{q^{(l)}(z_0)}{l!}(z-z_0)^{(l)} + \frac{q^{(l+1)}(z_0)}{(l+1)!}(z-z_0)^{(l+1)} + \frac{q^{(l+2)}(z_0)}{(l+2)!}(z-z_0)^{(l+2)} + \cdots$$

$$\text{จาก} \quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$f(z) = \frac{\frac{p^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k} + \frac{p^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{(k+1)} + \frac{p^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^{(k+2)} + \cdots\cdots}{\frac{q^{(l)}(z_0)}{l!}(z-z_0)^{(l)} + \frac{q^{(l+1)}(z_0)}{(l+1)!}(z-z_0)^{(l+1)} + \frac{q^{(l+2)}(z_0)}{(l+2)!}(z-z_0)^{(l+2)} + \cdots\cdots}$$

$$f(z) = \frac{(z-z_0)^{(k)}\left\{\frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{p^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0) + \frac{p^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^2 + \cdots\cdots\right\}}{(z-z_0)^{(l)}\left\{\frac{q^{(l)}(z_0)}{l!} + \frac{q^{(l+1)}(z_0)}{(l+1)!}(z-z_0) + \frac{q^{(l+2)}(z_0)}{(l+2)!}(z-z_0)^2 + \cdots\cdots\right\}}$$

$$\therefore f(z) = \frac{(z-z_0)^{(k)}\,\tilde{p}(z)}{(z-z_0)^{(l)}\,\tilde{q}(z)}$$

เมื่อ $\tilde{p}(z) = \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{p^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0) + \frac{p^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^2 + \cdots\cdots$

และ $\tilde{q}(z) = \frac{q^{(l)}(z_0)}{l!} + \frac{q^{(l+1)}(z_0)}{(l+1)!}(z-z_0) + \frac{q^{(l+2)}(z_0)}{(l+2)!}(z-z_0)^2 + \cdots\cdots$

โดยที่ $\tilde{p}(z_0) \neq 0$ และ $\tilde{q}(z_0) \neq 0$

ดังนั้นจะได้ว่า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^{l-k}}$ เมื่อ $l > k$

เมื่อ $\psi(z) = \frac{\tilde{p}(z)}{\tilde{q}(z)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$

เพราะว่า $\tilde{p}(z_0) \neq 0$, $\tilde{q}(z_0) \neq 0$ จึงทำให้ $\tilde{q}(z) \neq 0$ ด้วย

ดังนั้น $\quad (z-z_0)^{1-k} f(z) = \psi(z)$

และ $\quad \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0)^{1-k} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} \psi(z) = \dfrac{\tilde{p}(z_0)}{\tilde{q}(z_0)} \neq 0$

แสดงว่า $(z-z_0)^{1-k} f(z) = \psi(z)$ มีภาวะเอกฐานที่ขจัดได้ที่จุด z_0

และจากทฤษฎีที่ 3 บทที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่ $1-k$ ที่จุด $z = z_0$

<u>ทฤษฎีที่ 2</u> ให้ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่ง $p(z)$ มีซีโร่อันดับที่ k ที่จุด $z = z_0$ และ $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่ $k+1$ ที่จุด $z = z_0$ แล้ว $f(z)$ จะมีโพลเชิงเดี่ยว และมีค่าเรซิดิวดังนี้

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = (k+1)\frac{p^{(k)}(z_0)}{q^{(k+1)}(z_0)}$$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ มีซีโร่อันดับที่ k ที่จุด $z = z_0$ และ $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่ $k+1$ ที่จุด $z = z_0$

จากทฤษฎีที่ 1 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่ $k+1-k = 1$

กระจาย $p(z)$, $q(z)$ เป็นอนุกรมของเทย์เลอร์ รอบจุด z_0 จะได้

$$f(z) = \frac{\dfrac{p^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{(k)} + \dfrac{p^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{(k+1)} + \dfrac{p^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^{(k+2)} + \cdots}{\dfrac{q^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{(k+1)} + \dfrac{q^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^{(k+2)} + \dfrac{q^{(k+3)}(z_0)}{(k+3)!}(z-z_0)^{(k+3)} + \cdots}$$

กระจาย $f(z)$ เป็นอนุกรมโลรองต์ เมื่อ $f(z)$ มีโพลเชิงเดียว ได้ดังนี้

$$f(z) = \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\cdots$$

$$\text{จาก} \quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$p(z) = q(z)f(z)$$

$$\frac{p^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{(k)} + \frac{p^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{(k+1)} + \frac{p^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^{(k+2)} + \cdots\cdots$$

$$= \left[\frac{q^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{(k+1)} + \frac{q^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!}(z-z_0)^{(k+2)} + \frac{q^{(k+3)}(z_0)}{(k+3)!}(z-z_0)^{(k+3)} + \cdots\cdots\cdots\right]$$

$$\left[\frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

$$= b_{-1}\frac{q^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{(k+1)} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$b_{-1}\frac{q^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} = \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$$b_{-1} = \frac{(k+1)!}{k!}\frac{p^{(k)}(z_0)}{q^{(k+1)}(z_0)}$$

$$b_{-1} = (k+1)\frac{p^{(k)}(z_0)}{q^{(k+1)}(z_0)}$$

นั่นคือ $\quad \mathrm{Res}(f(z),z_0) = (k+1)\dfrac{p^{(k)}(z_0)}{q^{(k+1)}(z_0)}$

<u>ตัวอย่าง 1</u> จงหาค่าเรซิดิวของ $\quad f(z) = \dfrac{z}{1-\cos z}$ ที่จุด $z = 0$

<u>วิธีทำ</u> จาก $\quad f(z) = \dfrac{z}{1-\cos z}$

จะได้ $p(z) = z \;,\; p(0) = 0$

$p'(z) = 1 \;,\; p'(0) = 1 \neq 0$

ดังนั้น $p(z)$ มีซีโร่ เชิงเดียว

และ $q(z) = 1 - \cos z$, $q(0) = 1 - 1 = 0$

$q'(z) = \sin z$, $q'(0) = 0$

$q''(z) = \cos z$, $q''(0) = 1 \neq 0$

ดังนั้น $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่สอง

จากทฤษฎีที่ 1 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลเชิงเดียว

และจากทฤษฎีที่ 2 $\quad \text{Res}(f(z),z_0) = (k+1)\dfrac{p^{(k)}(z_0)}{q^{(k+1)}(z_0)}$

$$\text{Res}(f(z),0) = (1+1)\times\frac{1}{1} = 2$$

<u>ทฤษฎีที่ 3</u> ให้ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ และ $p(z)$,$q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $p(z_0) = 0$, $p'(z_0) \neq 0$ และ $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = 0$ แต่ $q'''(z_0) \neq 0$ แล้ว $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่สอง และ เรซิดิวของ $f(z)$ จะมีค่าดังนี้

$$\text{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \dfrac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \dfrac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \dfrac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

<u>พิสูจน์</u> จากกำหนดให้ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ และ $p(z_0) = 0$ แต่ $p'(z_0) \neq 0$

และ $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = 0$ แต่ $q'''(z_0) \neq 0$

จากทฤษฎีที่ 1 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สอง

กระจาย $p(z)$, $q(z)$ เป็นอนุกรมของเทย์เลอร์ รอบจุด z_0 จะได้

$$f(z) = \frac{p^{\prime}(z_0)(z-z_0) + \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\cdots}{\frac{q^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{q^{\text{IV}}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \frac{q^{\text{V}}(z_0)}{5!}(z-z_0)^5 + \cdots\cdots}$$

กระจาย $f(z)$ เป็นอนุกรมของโลรองต์ เมื่อ $f(z)$ มีโพลอันดับที่สองได้ดังนี้

$$f(z) = \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\cdots$$

จาก $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$

$$p(z) = q(z)f(z)$$

$$p^{\prime}(z_0)(z-z_0) + \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\cdots$$

$$= \left[\frac{q^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{q^{\text{IV}}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \frac{q^{\text{V}}(z_0)}{5!}(z-z_0)^5 + \cdots\cdots\right]$$

$$\left[\frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\cdots\right]$$

$$= b_{-2}\frac{q^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!}(z-z_0) + \left[b_{-2}\frac{q^{\text{IV}}(z_0)}{4!} + b_{-1}\frac{q^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!}\right](z-z_0)^2 + \cdots\cdots$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า

$$b_{-2}\frac{q^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!} = p^{\prime}(z_0)$$

$$b_{-2} = \frac{3!}{q^{\prime\prime\prime}(z_0)}p^{\prime}(z_0)$$

และ $b_{-2}\dfrac{q^{\text{IV}}(z_0)}{4!} + b_{-1}\dfrac{q^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!} = \dfrac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!}$

$$b_{-1}\frac{q'''(z_0)}{3!} = \frac{p''(z_0)}{2!} - b_{-2}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}$$

$$= \frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{3!}{q'''(z_0)} \times \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} \times p'(z_0)$$

$$b_{-1} = \frac{3!}{q'''(z_0)} \times \frac{p''(z_0)}{2!} - \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} \times p'(z_0)$$

$$b_{-1} = \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \dfrac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \dfrac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \dfrac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{3}{q'''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \dfrac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \dfrac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \dfrac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 2</u> จงหาค่าเรซิดิวของ $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{\sin^3 z}$ ที่จุด $z_0 = 0$

<u>วิธีทำ</u> จาก $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{e^z - 1}{\sin^3 z}$

จะได้ $p(z) = e^z - 1$, $p(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$p'(z) = e^z$, $p'(0) = e^0 = 1 \neq 0$

$p''(z) = e^z$, $p''(0) = e^0 = 1$

และ $q(z) = \sin^3 z$, $q(0) = \sin^3 0 = 0$

$q'(z) = 3\sin^2 z \cos z$, $q'(0) = 0$

$q''(z) = 6\sin z\cos^2 z - 3\sin^3 z$, $q''(0) = 0$

$q'''(z) = 6\cos^3 z - 21\sin^2 z\cos z$, $q'''(0) = 6 \neq 0$

$q^{IV}(z) = 21 \sin^3 z - 60 \sin z \cos^2 z \quad , \quad q^{IV}(0) = 0$

จากทฤษฎีที่ 1 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สอง

และจากทฤษฎีที่ 2 จะได้ว่า

$$\operatorname{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \left[\frac{3!}{6}\right]^2 \begin{vmatrix} \frac{6}{3!} & 1 \\ \frac{0}{4!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

$$= 1\left(1 \times \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \frac{1}{2}$$

<u>ทฤษฎีที่ 4</u> ให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $p(z_0) = p'(z_0) = p''(z_0)$, $p'''(z_0) = \ldots\ldots\ldots = p^{(k-1)}(z_0) = 0$ แต่ $p^{(k)}(z_0) \neq 0$ และ $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = \ldots\ldots\ldots = q^{(l-1)}(z_0) = 0$ แต่ $q^{(l)}(z_0) \neq 0$ โดยที่ $l > k$ แล้ว $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่ $l - k$ และเรซิดิวจะมีค่าดังนี้

$$\operatorname{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{l!}{q^{(l)}(z_0)}\right]^{l-k} \times$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{q^{(l)}(z_0)}{l!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!} \\
\frac{q^{(l+1)}(z_0)}{(l+1)!} & \frac{q^{(l)}(z_0)}{l!} & 0 & \cdots & 0 & \frac{p^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} \\
\frac{q^{(l+2)}(z_0)}{(l+2)!} & \frac{q^{(l+1)}(z_0)}{(l+1)!} & \frac{q^{(l)}(z_0)}{l!} & \cdots & 0 & \frac{p^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} \\
\frac{q^{(l+3)}(z_0)}{(l+3)!} & \frac{q^{(l+2)}(z_0)}{(l+2)!} & \frac{q^{(l+1)}(z_0)}{(l+1)!} & \cdots & 0 & \frac{p^{(k+3)}(z_0)}{(k+3)!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\frac{q^{(2l-k-2)}(z_0)}{(2l-k-2)!} & \frac{q^{(2l-k-3)}(z_0)}{(2l-k-3)!} & \frac{q^{(2l-k-4)}(z_0)}{(2l-k-4)!} & \cdots & \frac{q^{(l)}(z_0)}{l!} & \frac{p^{(l-2)}(z_0)}{(l-2)!} \\
\frac{q^{(2l-k-1)}(z_0)}{(2l-k-1)!} & \frac{q^{(2l-k-2)}(z_0)}{(2l-k-2)!} & \frac{q^{(2l-k-3)}(z_0)}{(2l-k-3)!} & \cdots & \frac{q^{(l+1)}(z_0)}{(l+1)!} & \frac{p^{(l-1)}(z_0)}{(l-1)!}
\end{vmatrix}$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ ถ้าผู้อ่านสนใจก็สามารถจะพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบทที่ 5.7 ในที่นี้ผู้เขียนจะไม่แสดงวิธีพิสูจน์ไว้ เพราะจะซ้ำกัน

การใช้ทฤษฎีบทนี้นั้น ถ้าสามารถหาได้ว่า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ที่กำหนดมาให้นั้น $p(z)$, $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่เท่าไร ก็จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่เท่าไรแล้ว จึงแทนค่าอันดับที่ของซีโร่ของ $p(z)$, $q(z)$ ลงไปในสูตรนี้ก็จะสามารถหาค่าเรซิดิวได้ตามต้องการ