บทที่ 2

ฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function)

ก่อนจะศึกษาถึงเรื่องฟังก์ชันวิเคราะห์นั้น จะกล่าวถึงนิยามต่างๆ ของจำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้นเสียก่อน จากนี้จะต้องศึกษาเกี่ยวกับฟังก์ชันของตัวแปรจริง 2 ตัวแปร และความรู้พื้นฐานวิชาแคลคูลัสเกี่ยวกับเอปไซลอน (epsilon ε) และเดลตา (delta δ) ซึ่งจะนำไปใช้พิสูจน์ทฤษฎีลิมิตของฟังก์ชัน และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน แล้วจึงจะนำเอาความรู้พื้นฐานเหล่านี้ไปให้คำนิยามของฟังก์ชันวิเคราะห์

2.1 จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers)

นิยาม 1 ระบบจำนวนเชิงซ้อนคือ เซตของคู่ลำดับจำนวนจริง (a,b) ทั้งหมด ที่มีโอเปอเรชัน บวก และ คูณ ดังนี้

$$(a,b) + (c,d) = (a+c\ ,\ b+d)$$

$$(a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

และ $(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ถ้าเขียนแทนการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1 correspondence) ระหว่างจำนวนเชิงซ้อน $(a,0)$ กับจำนวนจริง a ด้วย $(a,0) \longleftrightarrow a$ แล้วจากนิยาม 1 จะได้

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,\ 0) \longleftrightarrow a + b$$

และ

$$(a,0).(b,0) = (ab,0) \longleftrightarrow ab$$

จะเห็นว่าผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนยังมีการสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับผลบวกและผลคูณของจำนวนจริงเช่นกัน จึงกล่าวได้ว่าเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซต (Subset) ของเซตของจำนวนเชิงซ้อน หรือ จำนวนจริง a ใดๆ คือจำนวนเชิงซ้อน (a,b) เมื่อ $b = 0$

นั่นคือถ้ากล่าวถึง a ใดๆ จะมีความหมายได้ 2 อย่างคือ

1. หมายถึงจำนวนจริง a

2. หมายถึงจำนวนเชิงซ้อน $(a,0)$

เช่น 1 , −1 และ 0 หมายถึงจำนวนจริง 1 , −1 และ 0 ตามลำดับ หรือ หมายถึงจำนวนเชิงซ้อน (1,0) , (−1,0) และ (0,0) ตามลำดับ

<u>นิยาม 2</u> หน่วยจินตภาพ (Imaginary Unit) เขียนแทนด้วย i หมายถึงจำนวนเชิงซ้อน (0,1)

จากนิยาม 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} i^2 &= i.i \\ &= (0,1).(0,1) \\ &= (-1,0) \\ i^2 &= -1 \\ i &= \pm\sqrt{-1} \end{aligned}$$

โดยทั่วไปแล้วใช้ $i = \sqrt{-1}$

จำนวนเชิงซ้อน (a,b) สามารถเขียนได้อีกแบบหนึ่งคือ $a + ib$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} a + ib &= (a,0) + (0,1)(b,0) \\ &= (a,0) + (0,b) \\ a + ib &= (a,b) \end{aligned}$$

ให้ $z = a + ib$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ จำนวนจริง a เรียกว่าส่วนจริง (Real part) เขียนแทนด้วย $Re(z)$ จำนวนจริง b เรียกว่าส่วนจินตภาพ (Imaginary part) เขียนแทนด้วย $Im(z)$, ib เรียกว่าจำนวนจินตภาพบริสุทธิ์ (Pure imaginary number)

ดังนั้นเมื่อเขียนจำนวนเชิงซ้อน $a + ib$ แทน (a,b) แล้ว การบวก , ลบ , คูณและหาร จำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนใดๆ จะเป็นดังนี้

ให้ $z_1 = a + ib$ และ $z_2 = c + id$ จะได้

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$$

$$z_1 z_2 = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

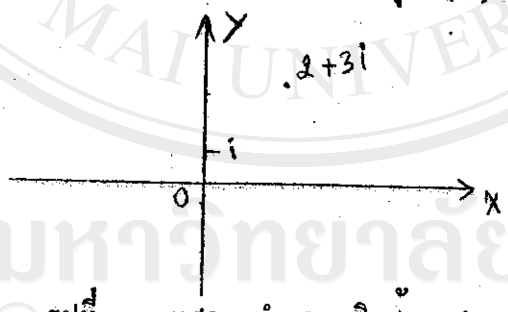
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\,\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

<u>นิยาม 3</u> จำนวนเชิงซ้อน $z_1 = a + ib$ และ $z_2 = c + id$ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$ นั่นคือจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนจะเท่ากันก็ต่อเมื่อส่วนจริงต้องเท่ากัน และ ส่วนจินตภาพต้องเท่ากัน

<u>นิยาม 4</u> คอนจูเกตเชิงซ้อน (Complex conjugate) ของ $z = x + iy$ คือ $x - iy$ เขียนแทนด้วย $\bar{z}$ เช่น คอนจูเกตของ $-1 + 2i$ คือ $-1 - 2i$

<u>เรขาคณิตของจำนวนเชิงซ้อน</u> (Geometric representation of Complex number)

ในระบบพิกัดฉาก (Cartesian coordinate system) เราแทนคู่ลำดับของจำนวนจริงด้วยจุดๆ หนึ่งในระนาบ XY เช่น คู่ลำดับ (2,3) แทนด้วยจุดซึ่งมีพิกัด X เท่ากับ 2 และพิกัด Y เท่ากับ 3 ดังนั้น เมื่อจำนวนเชิงซ้อนถูกนิยามให้เป็นคู่ลำดับของจำนวนจริง (a,b) จึงแทนด้วยจุดในระนาบ XY ได้เช่นเดียวกัน เช่น จุด (2,3) แทนจำนวนเชิงซ้อน $2 + 3i$ จุด (0,1) แทนจำนวนเชิงซ้อน i เป็นต้น



<u>รูปที่ 1</u> แสดงจำนวนเชิงซ้อน (2,3) และ (0,1)

การแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดในระนาบ XY นี้ เรียกแกน X ว่าแกนจริง (Real axis) เรียกแกน Y ว่า แกนจินตภาพ (Imaginary axis) จุด 0 เป็นจุดกำเนิด (origin) และเรียกระนาบนี้ว่าระนาบเชิงซ้อน (Complex plane)

หรือ ระนาบ Z (z - plane)

<u>ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน</u> (Absolute value of a Complex number)

<u>นิยาม 5</u> ค่าสัมบูรณ์ หรือ โมดูลัส (Modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ คือ จำนวนจริง $\sqrt{x^2 + y^2}$ เขียนแทนด้วย $|z|$

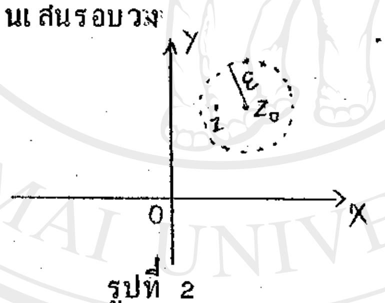
ดังนั้นค่าสัมบูรณ์ของ z ก็คือ ระยะทางระหว่างจุดกำเนิด กับจุด z ใน ระนาบเชิงซ้อน นั่นเอง เช่น $|0| = 0$, $\left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$, $|3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

<u>เซตของจุด</u> (Point Sets)

จุดที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ เป็นจุดในระนาบเชิงซ้อน นิยามเกี่ยวกับเซตของจุดที่สำคัญๆ มีดังนี้

<u>นิยาม 6</u> ย่านจุด (Neighborhood) ของจุด z_0 คือเซตของจุด z ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z - z_0| < \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

หรือ ย่านจุด z_0 คือ เซตของจุด z ทั้งหมดภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง z_0 รัศมี ε แต่ไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง



<u>รูปที่ 2</u>

เช่น เซตของจุดที่สอดคล้องกับอสมการ $|z| < 2$ และ $|z - i| < 3$ คือ ย่านจุด 0 และ i ตามลำดับ

<u>นิยาม 7</u> เซต S เรียกว่าเซตเปิด (Open set) ถ้าจุด z ทุกๆ จุดใน S มีย่านจุดบางอันอยู่ใน S

เช่น เซตของจุด z ทุกๆ จุดในระนาบ $Re(z) > 0$, $Re(z) < 0$ $Im(z) > 0$, $Im(z) < 0$ เซตของจุดภายในวงกลมซึ่งไม่รวมเส้นรอบวง

<u>นิยาม 8</u> จุด z_0 เรียกว่าจุดลิมิต (limit point) ของเซต S ถ้าย่านจุดทุกๆ อันของ z ประกอบด้วยจุดในเซต S อย่างน้อยหนึ่งจุดที่ไม่ใช่จุด z_0

จุด z_0 อาจอยู่ใน S หรือไม่ก็ได้ เช่น เซตของจุด z ทั้งหมด ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z| < 1$ จะมีจุดที่อยู่ภายในวงกลม $|z| < 1$ ทุกๆ จุดเป็นจุดลิมิตที่อยู่ในเซต และมีจุดที่อยู่บนวงกลม $|z| = 1$ เป็นจุดลิมิตที่ไม่อยู่ใน S

<u>นิยาม 9</u> เซต S เรียกว่าเซตปิด (Closed set) ถ้าจุดลิมิตทุกๆ จุดของ S อยู่ใน S เช่น เซตของ $|z| = 1$, $|z| \leq 2$

<u>นิยาม 10</u> ถ้าย่านจุดทุกๆ อันของ z_0 ประกอบด้วยจุดอย่างน้อยที่สุดหนึ่งจุดใน S และ อย่างน้อยที่สุดอีก 1 จุดที่ไม่อยู่ใน S แล้ว z_0 เรียกว่าจุดขอบเขต (boundary point) ของเซต S

จุดขอบเขตของเซตปิดจะอยู่ในเซต แต่จุดขอบเขตของเซตเปิดไม่อยู่ในเซต เช่น จุดบนวงกลม $|z| = 1$ เป็นจุดขอบเขตของเซต $|z| < 1$ และเป็นจุดขอบเขตของเซต $|z| \leq 1$ ด้วย

<u>นิยาม 11</u> เซต S เรียกว่ามีขอบเขต (bounded) ถ้าจุด z ทุกๆ จุดใน S สามารถหาค่าคงที่ M ซึ่ง $|z| < M$ ได้

เช่น เซตของจุด $0 < |z| < 1$, เซตของจุด $|z| \leq 1$ ส่วนเซตของจุด $x > 0$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต (unbounded)

<u>นิยาม 12</u> จุด z_0 เรียกว่าจุดภายใน (interior point) ของเซต S ถ้ามีย่านของจุด z_0 อย่างน้อย 1 อันซึ่งมีสมาชิกทุกๆ ตัวอยู่ใน S

เช่น เซตของจุด $|z| < 1$ เป็นจุดภายในของเซต $|z| = 1$

2.2 <u>ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน</u>

<u>นิยาม 13</u> ถ้า D เป็นเซตที่ไม่ว่าง (Non- empty set) ซึ่งเลือกได้ตามใจชอบในระนาบเชิงซ้อน (Complex - plane) และ $z \in D$ แล้วเรียก z ว่าเป็น

ตัวแปรเชิงซ้อน (Complex variable)

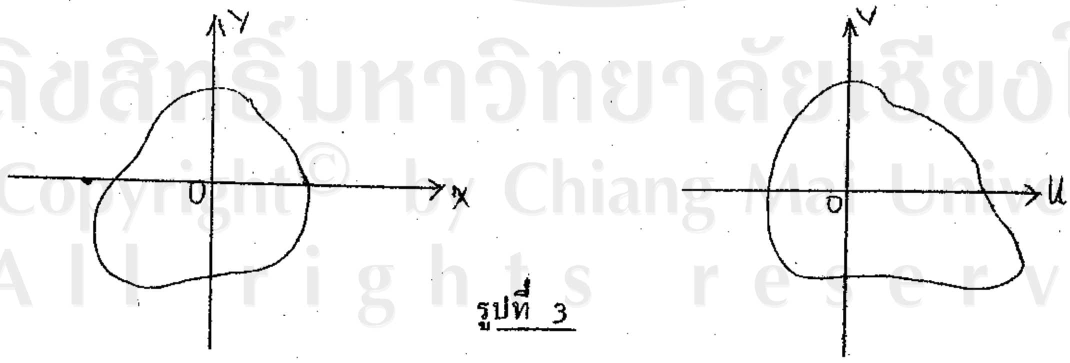
<u>นิยาม 14</u> ให้ D และ R เป็นเซตสองเซตที่มีตัวแปร z และ w ตามลำดับ ถ้าแต่ละค่าของ z ใน D สมนัย (correspondence) กับค่าของ w , 1 ค่าใน R และแต่ละค่าของ w ใน R สมนัยกับค่าของ z อย่างน้อยที่สุด 1 ค่าใน D เราจะเรียก $w = f(z)$ ว่าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน z บนเซต D

ถ้าแต่ละค่าของ z ใน D สมนัยกับค่าของ w ใน R เพียง 1 ค่าใน D แล้วเราเรียก $w = f(z)$ ว่า<u>ฟังก์ชันค่าเชิงเดียว</u>(single - value function) เช่น $w = z + 2$, $w = z^2$, $w = z^3$, $w = \frac{z-1}{z+1}$ เป็นต้น

โดยทั่วๆ ไปแล้ว เซต D จะเป็นโดเมน(Domain) ของฟังก์ชัน w และเซต R เรียกว่าเรนจ์ (Range) ของฟังก์ชัน w

<u>นิยาม 14</u> สำหรับความสัมพันธ์ (Relation) ซึ่งแต่ละค่าของ z ใน D สมนัยกับค่าของ w ใน R ได้มากกว่า 1 ค่า เรียกว่า<u>ฟังก์ชันหลายค่า</u> (multiple - value function) เช่น $w = z^{1/2}$, $w^2 = (z+1)(z-1)$ $w = \ln z$, $w^m = z$ เป็นต้น

เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แทนด้วยจุดบนระนาบได้ ดังนั้น z ใดๆ ที่เป็นสมาชิกในโดเมน D จะถูกแทนลงบนระนาบ เรียกว่าระนาบ z มีพิกัด (x,y) และ w ใดๆ ที่เป็นสมาชิกในเรนจ์ R จะถูกแทนลงบนระนาบ เรียกว่าระนาบ w มีพิกัด (u,v) ดังรูปที่ 3



<u>รูปที่ 3</u>

ถ้า $z = x + iy$ จะได้ว่า $w = f(z)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน $u + iv$ จำนวนหนึ่งเมื่อ u และ v เป็นฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง x และ y ดังตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1 ให้ $f(z) = z^2 + 3z + 4$ จงหา $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ถ้า $f(z) = u + iv$

วิธีทำ จาก $z = x + iy$

$$
\begin{aligned}
f(z) = u + iv &= z^2 + 3z + 4 \\
&= (x+iy)^2 + 3(x+iy) + 4 \\
&= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 3x + 3iy + 4 \\
&= (x^2 - y^2 + 3x + 4) + i(2xy + 3y)
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x + 4$

และ $v(x,y) = 2xy + 3y$

ต่อไปจะศึกษาเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และ ฟังก์ชันวิเคราะห์

2.3 ลิมิตของฟังก์ชัน (Limit of function)

ให้ลำดับอนันต์ (infinite sequence) ของจำนวนเชิงซ้อน $z_1, z_2, z_3, \ldots$ เขียนแทนด้วย $\{z_n\}_1^{\infty}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ และ z_n เป็นจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 1.5 ลำดับ (sequence) ของจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ มีลิมิต z_0 หรือลู่เข้า (converge) ไปยัง z_0 เขียนแทนด้วย $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ หรือ $z_n \to z_0$ เมื่อ $n \to \infty$ ถ้าสำหรับ $\epsilon > 0$ ใดๆ จะมีจำนวนเต็ม N ซึ่ง $|z_n - z_0| < \epsilon$ สำหรับทุกๆ $n > N$

ต่อไปจะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชัน $f(z)$ ซึ่งนิยามในย่านจุด z_0 (Neighborhood) ซึ่งอาจยกเว้นจุด z_0 ถ้าเมื่อทุกๆ z ในย่านจุดนั้นเข้าใกล้ z_0

แล้วทำให้ $f(z)$ เข้าใกล้ w_0 , w_0 เรียกว่าลิมิตของฟังก์ชัน $f(z)$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

สำหรับ z เข้าใกล้ z_0 นั้นหมายถึง z เข้าใกล้ z_0 ในทุกทิศทางซึ่งเหมือนกับลิมิตของฟังก์ชันของจำนวนจริง 2 ตัวแปร

ถ้า z เข้าใกล้ z_0 ในทิศทางต่างกันมีค่าไม่เท่ากัน แล้วจะเรียกว่า $f(z)$ ไม่มีลิมิต หรือ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าไม่ได้

<u>ตัวอย่าง 2</u> จงแสดงว่า $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ หาค่าไม่ได้

<u>วิธีทำ</u> ถ้าลิมิตนี้หาค่าได้ จะต้องได้ว่าไม่ว่าจะให้ z เข้าใกล้ 0 ในทิศทางใดก็ตามจะได้ลิมิตมีค่าเท่ากัน แต่ถ้าลิมิตหาค่าไม่ได้ แสดงว่าลิมิตที่ z เข้าใกล้ 0 ในทิศทางต่างกันมีค่าต่างกัน

พิจารณาเมื่อ z เข้าใกล้ 0 ทางแกน X นั่นคือ $y = 0$ ทำให้ได้ $z = x + iy = x$ และ $\bar{z} = x - iy = x$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \frac{x}{x} = 1$$

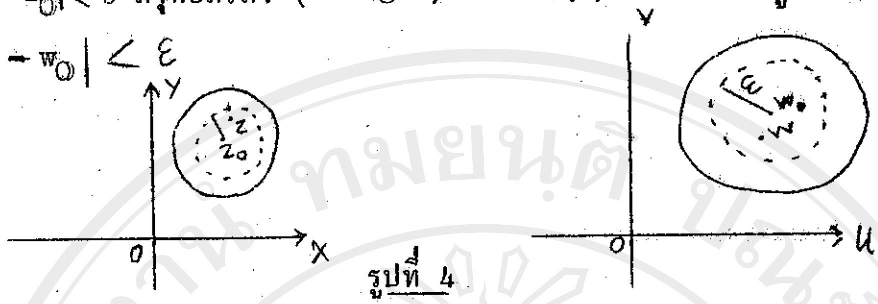
ถ้า z เข้าใกล้ 0 ทางแกน Y นั่นคือ $x = 0$ ทำให้ได้ $z = x + iy = iy$ และ $\bar{z} = x - iy = -iy$ ดังนั้น

$$\lim_{y \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

จะเห็นว่าลิมิต เมื่อ z เข้าใกล้ 0 ทางแกน X และเมื่อ z เข้าใกล้ 0 ทางแกน Y มีค่าต่างกัน นั่นคือ $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ หาค่าไม่ได้

<u>นิยาม 16</u> $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(z) - f(z_0)| = |f(z) - w_0| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta$

นั่นคือ เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุกๆ z ยกเว้น z_0 ในวงกลม $0 < |z - z_0| < \delta$ มีจุดอิมเมจ (image) $w = f(z)$ อยู่ในวงกลม $|f(z) - w_0| < \varepsilon$



รูปที่ 4

ตัวอย่าง 3 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{(3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5)}{z - i} = 4 + 4i$

พิสูจน์ จากนิยาม 16 จะต้องแสดงว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $\left|\dfrac{(3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5)}{z - i} - (4 + 4i)\right| < \varepsilon$

เมื่อ $0 < |z - i| < \delta$ เนื่องจาก $z \neq i$ เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$\frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = \frac{[3z^3 - (2 - 3i)z^2 + (5 - 2i)z + 5i]\,(z - i)}{(z - i)}$$

$$= 3z^3 - (2 - 3i)z^2 - (5 - 2i)z + 5i$$

ถ้า $\delta \leq 1$ พิจารณา

$$|3z^3 - (2 - 3i)z^2 - (5 - 2i)z + 5i - 4 - 4i|$$

$$= |z - i|\,|3z^2 + (6i - 2)z - 1 - 4i|$$

$$= |z - i|\,|3(z - i + i)^2 + (6i - 2)(z - i + i) - 1 - 4i|$$

$$= |z - i|\,|3(z - i)^2 + (12i - 2)(z - i) - 10 - 6i|$$

$$< \delta\{3|z - i|^2 + |12i - 2|\,|z - i| + |-10 - 6i|\}$$

$$< \delta(3 + 13 + 12)$$

$$< 28\delta$$

จะเห็นว่าถ้าให้ $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{28})$ จะได้

$$\left|\frac{(3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5)}{z - i} - (4 + 4i)\right| < 28 \times \frac{\varepsilon}{28}$$

$$< \varepsilon \quad \text{เมื่อ } 0 < |z - i| < \delta$$

ตามนิยาม 16 จะเห็นว่า $\lim_{z \to i} (3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5) = 4 + 4i$

<u>ทฤษฎีที่ 1</u> ถ้า $f(z)$ มีลิมิตที่จุด z_0 แล้วลิมิตนี้จะมีเพียงค่าเดียว

<u>พิสูจน์</u> สมมุติให้ $\lim_{z \to z_0} f(z)$ มีได้ 2 ค่าคือ

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_1 \quad \text{และ} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = w_2$$

จากนิยาม 16 สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - w_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

และ

$$|f(z) - w_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2$$

ให้ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ จะได้

$$\begin{aligned} |w_1 - w_2| &= |f(z) - w_2 - f(z) + w_1| \\ &= |\{f(z) - w_2\} - \{f(z) - w_1\}| \\ &\leq |f(z) - w_2| + |f(z) - w_1| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$|w_1 - w_2| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

เนื่องจาก ε เป็นจำนวนบวกใดๆ ดังนั้น $w_1 = w_2$

นั่นคือลิมิตของ $f(z)$ เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 มีได้เพียงค่าเดียว

<u>ทฤษฎีที่ 2</u> ให้ $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ หาค่าได้ (define) ในโดเมน D ยกเว้นที่จุด z_0 ของ D และ $z_0 = x_0 + iy_0$ แล้วจะได้ว่า

$\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0$ และ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0$ เท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> $\Longrightarrow$ ถ้าให้ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$

ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta \quad \text{หรือ}$$

$$|(u - u_0) + i(v - v_0)| < \varepsilon \text{ เมื่อ } 0 < |z - z_0| < \delta$$

พิจารณา $|u - u_0| \leq |(u - u_0) + i(v - v_0)|$

และ $|v - v_0| \leq |(u - u_0) + i(w - v_0)|$

ดังนั้น $|u - u_0| < \varepsilon$ และ $|v - v_0| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta$

เนื่องจาก $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปรจริง

ดังนั้น $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0$ และ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0$

$\Longleftarrow$ ถ้าให้ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0$ และ $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0$

จากนิยามของฟังก์ชันของตัวแปรจริง 2 ตัวจะได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้จะมี $\delta_1, \delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$|u - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_1$$

$$\text{และ } |v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_2$$

ให้ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ดังนั้น

$$|f(z) - w_0| = |u - u_0 + i(v-v_0)|$$

$$\leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ เมื่อ } 0 < |z - z_0| < \delta$$

ตามนิยาม 16 จะได้ว่า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0 + iv_0$

<u>ทฤษฎีที่ 3</u> ถ้า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ และ $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$ แล้วจะได้ว่า

1. $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = A + B$

2. $\lim\limits_{z \to z_0} kf(z) = kA$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่(constant)

3. $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z) - g(z)] = A - B$

4. $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z)g(z)] = A.B$

5. $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$

<u>พิสูจน์</u> (1) จะต้องพิสูจน์ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$\left|[f(z) + g(z)] - (A + B)\right| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

พิจารณา $\left|[f(z) + g(z)] - (A + B)\right| = \left|[f(z) - A] + [g(z) - B]\right|$

$$\leq |f(z) - A| + |g(z) - B| \quad \ldots\ldots(2.1)$$

จากกำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องมี $\delta_1 > 0$ และ $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1 \quad \ldots\ldots\ldots(2.2)$$

และ $$|g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2 \quad \ldots\ldots\ldots(2.3)$$

นำ (2.2),(2.3) แทนใน(2.1) และกำหนดให้ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ จะได้

$$\left|[f(z) + g(z)] - (A + B)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

นั่นคือ $\lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z) + g(z)\right] = A + B$

(2) จะต้องพิสูจน์ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้ เราสามารถจะหา $\delta > 0$ ซึ่ง $|kf(z) - kA| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta$

พิจารณา $|kf(z) - kA| = |k(f(z) - A)|$

$$\leq |k|\,|f(z) - A|$$

จากกำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะต้องมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(z) - A| < \frac{\varepsilon}{|k|}$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta$

จะได้ $|kf(z) - kA| < |k| \times \frac{\varepsilon}{|k|} = \varepsilon$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta$

นั่นคือ $\lim\limits_{z \to z_0} kf(z) = kA$

(3) จาก (1) $\lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z) - g(z)\right] = \lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z) + (-1)g(z)\right]$

$$= \lim_{z \to z_0} f(z) + \lim_{z \to z_0} (-1)g(z)$$

$$= A + (-1)B$$ จากข้อ (2)

$$\lim_{z \to z_0} \left[f(z) - g(z)\right] = A - B$$

(4) $\lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z)g(z)\right] = AB$

จะต้องพิสูจน์ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$|f(z)g(z) - AB| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta$

พิจารณา $|f(z)g(z) - AB| = \left|f(z)\left[g(z) - B\right] + B\left[f(z) - A\right]\right|$

$$\leq |f(z)|\,|g(z) - B| + |B|\,|f(z) - A|$$

$$\leq |f(z)|\,|g(z) - B| + (|B| + 1)|f(z) - A| \quad \ldots(2.4)$$

จากกำหนดให้ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ ดังนั้นกำหนดให้ $\varepsilon = 1$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - A| < 1 \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1$$

แต่เนื่องจาก $|f(z) - A| \geq |f(z)| - |A|$

ดังนั้นจะได้ $1 > |f(z)| - |A|$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta_1$

หรือ $|A| + 1 > |f(z)|$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta_1$

แต่ $|A| + 1$ เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้นจึงสามารถให้ P เป็นจำนวนจริงบวก

ซึ่ง $|f(z)| < P$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < 1$ ....(2.5)

และจากกำหนดให้ $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$ ดังนั้นกำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$|g(z) - B| < \frac{\varepsilon}{2P} \quad \text{เมื่อ } 0 < |z - z_0| < \delta_2 \quad ....(2.6)$$

และจากกำหนดให้ $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ ดังนั้นกำหนดให้ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_3 > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - A| < \frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)} \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_3 \quad ....(2.7)$$

กำหนดให้ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ ย่อมทำให้ (2.5),(2.6) และ (2.7) เป็นจริงสำหรับ $0 < |z - z_0| < \delta$ ดังนั้นจาก (2.4),(2.5),(2.6)และ(2.7)

จะได้ว่า $|f(z)g(z) - AB| < P.\frac{\varepsilon}{2P} + (|B| + 1)\frac{\varepsilon}{2(|B| + 1)}$

$$|f(z)g(z) - AB| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ } 0 < |z - z_0| < \delta$$

นั่นคือ $\lim_{z \to z_0} f(z)g(z) = AB$

(5) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}$, $B \neq 0$

จากข้อ (4) จะได้ $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} f(z) \times \frac{1}{g(z)}$

$$= \lim_{z \to z_0} f(z) \times \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)}$$

$$= A \times \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.8)$$

จะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $\lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{B}$, $B \neq 0$

นั่นคือจะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B} \right| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

พิจารณา $\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|g(z) - B|}{|B|\,|g(z)|} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.9)$

จากกำหนดให้ $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$ ถ้ากำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เราสามารถจะหา

$\delta_1 > 0$ ซึ่ง $|g(z) - B| < \frac{1}{2}|B|^2\varepsilon$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2.10)$

และจาก $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$ ดังนั้นกำหนดให้ $\varepsilon = \frac{1}{2}|B|$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง

$$|g(z) - B| < \frac{1}{2}|B| \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_2$$

พิจารณา
$$\begin{aligned} |B| &= |B - g(z) + g(z)| \\ &\leq |B - g(z)| + |g(z)| \\ &< \frac{1}{2}|B| + |g(z)| \end{aligned}$$

ดังนั้น $|g(z)| > \frac{1}{2}|B|$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta_1 \quad \ldots\ldots\ldots (2.11)$

ให้ $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$

แทนค่า (2.10) , (2.11) ลงใน (2.9) จะได้ว่า

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{B} \right| \quad \frac{\frac{1}{2}|B|^2\varepsilon}{|B| \times \frac{1}{2} \times |B|} = \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

ดังนั้นจะได้ $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{B}$ ....(2.12)

เอา (2.12) แทนค่าใน(2.8)จะได้ $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = A \times \frac{1}{B}$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0$$

<u>ตัวอย่าง 4</u> จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้โดยใช้ทฤษฎีที่ 3

(ก) $\lim\limits_{z \to 2i} (iz^4 + 3z^2 - 10i)$

(ข) $\lim\limits_{z \to \frac{i}{2}} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-i)^2}$

<u>วิธีทำ</u> (ก) $\lim\limits_{z \to 2i} (iz^4 + 3z^2 - 10i) = \lim\limits_{z \to 2i} iz^4 + \lim\limits_{z \to 2i} 3z^2 - \lim\limits_{z \to 2i} 10i$

$$= i(2i)^4 + 3(2i)^2 - 10i$$

$$= 16i - 12 - 10i$$

$$= -12 + 6i$$

(ข) $\lim\limits_{z \to \frac{i}{2}} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2} = \frac{\lim\limits_{z \to \frac{i}{2}} (2z-3) \times \lim\limits_{z \to \frac{i}{2}} (4z+i)}{\lim\limits_{z \to \frac{i}{2}} (iz-1)^2}$

$$= \frac{(i-3)(2i+i)}{\frac{9}{4}}$$

$$= (i-3) \times 3i \times \frac{4}{9}$$

$$= -\frac{4}{3} - 4i$$

2.4 ความต่อเนื่อง (Continuity)

ความต่อเนื่องที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ ต่างจากเรื่องลิมิตที่ได้กล่าวไปแล้ว ตรงที่ว่าเมื่อเราพูดถึงลิมิตที่จุด z_0 เราจะพิจารณาค่า z ทุกๆ ค่าในย่านจุด z_0 ที่เข้าใกล้ z_0 แต่ไม่รวมจุด z_0 ส่วนความต่อเนื่องนี้จะพิจารณาที่จุด z_0 ด้วย

ดังนั้นนิยามของความต่อเนื่อง จึงคล้ายกับนิยามของลิมิต เพียงแต่เพิ่มการพิจารณาที่จุด z_0 ไปด้วยเท่านั้น

นิยาม 17 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้ในย่านจุด z_0 แล้ว $f(z)$ จะมีความต่อเนื่อง (continuous) ที่จุด z_0 ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ เท่านั้น

จากนิยามนี้จะเห็นว่าความต่อเนื่องของ $f(z)$ ขึ้นอยู่กับเงื่อนไข 3 ประการคือ

(1) $f(z_0)$ หาค่าได้

(2) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าได้

(3) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

หรือ $f(z)$ จะมีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆที่กำหนดให้จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ เมื่อ $|z - z_0| < \delta$

ตัวอย่าง 5 กำหนดให้

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & , z \neq i \\ 0 & , z = i \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่า (1) $\lim\limits_{z \to i} z^2 = -1$

(2) $f(z)$ ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $z = i$

พิสูจน์ (1) จากนิยาม 16 สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|z^2 - (-1)| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |z - i| < \delta$

ถ้า $\delta \leq 1$ ดังนั้น $|z^2 - (-1)| = |z^2 + 1|$

$$= |(z - i)(z + i)|$$

$$= |(z - i)(z - i + 2i)|$$
$$\leq |z - i||z - i + 2i|$$
$$< \delta \{|z - i| + |2i|\}$$
$$< \delta\ (1 + 2)$$
$$< 3\delta$$

ถ้าให้ $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{3})$ จะได้

$$|z^2 - (-1)| < \frac{\varepsilon}{3} \times 3 = \varepsilon \quad \text{เมื่อ}\quad 0 < |z - z_0| < \delta$$

นั่นคือ $\lim_{z \to i} z^2 = -1$

(2) จากกำหนดให้ $f(i) = 0$

ดังนั้น $\lim_{z \to i} f(z) \neq f(i)$

จากนิยาม 17 จะได้ว่า $f(z)$ ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด $z = i$

<u>ตัวอย่าง 6</u> กำหนดให้ $f(z) = z^2$ สำหรับทุกๆ ค่าของ z จงแสดงว่า $f(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $z = i$

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 5 ได้ว่า $\lim_{z \to i} f(z) = -1$

จากกำหนดให้ $f(i) = (i)^2 = -1$

นั่นคือ $\lim_{z \to i} f(z) = f(i)$

ตามนิยาม 17 จะได้ว่า $f(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $z = i$

<u>ทฤษฎีที่ 4</u> ถ้า $f(z)$ และ $g(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 แล้วจะได้ว่า $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ และ $\frac{f(z)}{g(z)}$ เมื่อ $g(z) \neq 0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด z_0

การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ พิสูจน์ได้เช่นเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีลิมิตเพียงแต่แทน A

ด้วย $f(z)$ และ B ด้วย $g(z)$ และเปลี่ยนเงื่อนไขจาก $0 < |z - z_0| < \delta$ เป็น $|z - z_0| < \delta$ เท่านั้น

<u>ทฤษฎีที่ 5</u> ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้ในย่านของจุด z_0 และ $F(w)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้ในย่านของ $w_0 = f(z_0)$ ถ้า $f(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 และ $F(w)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $w_0 = f(z_0)$ จะได้ว่าฟังก์ชันประกอบ $F(f(z))$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $F(w)$ มีความต่อเนื่องที่จุด w_0 ดังนั้นถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $|F(w) - F(w_0)| < \varepsilon$ เมื่อ $|w - w_0| < \delta_1$ ....(2.13)

และเนื่องจาก $f(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ดังนั้นถ้ากำหนด $\varepsilon_1 > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(z) - w_0| < \varepsilon_1$ เมื่อ $|z - z_0| < \delta$ ......(2.14)

ให้ $\delta_1 = \varepsilon_1$ ดังนั้นจาก (2.14) จะได้ว่า

$|f(z) - w_0| < \delta_1$ เมื่อ $|z - z_0| < \delta$ ....(2.15)

จาก (2.15) จะได้ $|F(f(z)) - F(f(z_0))| < \varepsilon$

เมื่อ $|f(z) - w_0| < \delta_1$ ....(2.16)

จาก (2.15) และ (2.16) จะได้

$$|F(f(z)) - F(f(z_0))| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad |z - z_0| < \delta$$

ตามนิยาม 1.7 จะได้ว่า $F(f(z))$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0

<u>นิยาม 1.8</u> ฟังก์ชันใดๆ เรียกว่าฟังก์ชันต่อเนื่องในโดเมน D ถ้าฟังก์ชันนั้น มีความต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดใน D

ถ้าฟังก์ชัน เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในโดเมน D แล้ว ตามนิยามจะได้ว่า ที่แต่ละจุด z_0 ใน D และสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะสามารถหา $\delta > 0$ (ขึ้นอยู่กับ ε และ z_0) ซึ่ง $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ เมื่อ $|z - z_0| < \delta$

แต่ถ้าสามารถหา δ ที่ขึ้นอยู่กับเฉพาะ ε โดยไม่ขึ้นกับ z_0 ได้แล้วเรียกว่า $f(z)$ <u>มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ</u> (Uniformly continuous) ใน D

ตัวอย่าง 7 จงแสดงว่า $f(z) = z^2$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอในเซตเปิด $|z| < 1$

วิธีทำ จะต้องแสดงว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ ที่กำหนดให้จะสามารถหา $\delta > 0$ ซึ่ง $z^2 - z_0^2$ เมื่อ $|z - z_0| < \delta$ โดยที่ δ ขึ้นกับ ε แต่ไม่ขึ้นกับ z_0

ให้ z_1 และ z_0 เป็นจุดใดๆ ในเซตเปิด $|z| < 1$

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
|z^2 - z_0^2| &= |z + z_0||z - z_0| \\
&\leq (|z| + |z_0|)\,|z - z_0| \\
&\leq 2\,|z - z_0|
\end{aligned}
$$

สำหรับ $|z - z_0| < \delta$ จะได้ $|z^2 - z_0^2| < 2\delta$

เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ ดังนั้น $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ เมื่อ $|z - z_0| < \delta$ และ δ ขึ้นอยู่กับ ε เท่านั้น

นั่นคือ $f(z) = z^2$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอในเซตเปิด $|z| < 1$

2.5 อนุพันธ์ (Derivative)

นิยาม 19 ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันนิยามซึ่งหาค่าได้ในย่านจุด z_0 แล้ว $f(z)$ มีอนุพันธ์ที่จุด z_0 ถ้า $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ หาค่าได้

และเขียนแทนด้วย $\left.\frac{d\,f(z)}{dz}\right|_{z = z_0}$ หรือ $f'(z_0)$

ตัวอย่าง 8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z) = z^2$ ที่จุด $z = 1$

วิธีทำ จากนิยาม 19
$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} (z + z_0) \\
&= 2\,z_0
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $f'(1) = 2\times1 = 2$

<u>ทฤษฎีที่ 6</u> ถ้า $f(z)$ มีอนุพันธ์ที่จุด z_0 แล้วจะได้ว่า $f(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $f(z) - f(z_0) = \dfrac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} \times (z - z_0)$

จะได้ว่า $\lim\limits_{z \to z_0}\left\{f(z) - f(z_0)\right\} = \lim\limits_{z \to z_0}\left\{\dfrac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} \times (z - z_0)\right\}$

$$= \lim_{z \to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)} \times \lim_{z \to z_0}(z - z_0)$$

$$= f'(z_0) \times 0$$

$$\lim_{z \to z_0}\left\{f(z) - f(z_0)\right\} = 0$$

นั่นคือ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ แสดงว่า $f(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0

ส่วนกลับของทฤษฎีที่ 6 นี้ไม่จริง คือถ้า $f(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 แล้ว $f(z)$ ไม่จำเป็นจะต้องมีอนุพันธ์ที่จุด z_0

<u>ทฤษฎีที่ 7</u> ถ้าฟังก์ชัน $f(z)$ และ $g(z)$ มีอนุพันธ์ $f'(z)$ และ $g'(z)$ แล้วจะได้

(1) $\dfrac{d}{dz}\left\{f(z) + g(z)\right\} = f'(z) + g'(z)$

(2) $\dfrac{d}{dz}\left\{f(z)g(z)\right\} = f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$

(3) $\dfrac{d}{dz}\left\{\dfrac{f(z)}{g(z)}\right\} = \dfrac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$

<u>พิสูจน์</u> (1) จากนิยาม 19 จะได้ว่า

$$\frac{d}{dz}\left\{f(z) + g(z)\right\}\Big]_{z=z_0} = \lim_{z \to z_0}\left[\frac{\left\{f(z) + g(z)\right\} - \left\{f(z_0) + g(z_0)\right\}}{z - z_0}\right]$$

$$= \lim_{z \to z_0}\left[\frac{\left\{f(z) - f(z_0)\right\} + \left\{g(z) - g(z_0)\right\}}{z - z_0}\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0}\left\{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right\} + \lim_{z\to z_0}\left\{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}\right\}$$

$$= f'(z_0) + g'(z_0)$$

ดังนั้นสำหรับ $z = z_0$ ใดๆจะได้ $\frac{d}{dz}\left\{f(z) + g(z)\right\} = f'(z) + g'(z)$

(2) จากนิยาม 19 , $\frac{d}{dz}\left\{f(z)g(z)\right\}\Big]_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0}\right]$

$$= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0}\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0} f(z)\left[\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}\right] + \lim_{z\to z_0} g(z_0)\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right]$$

$$= f(z_0)\lim_{z\to z_0}\left[\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}\right] + g(z_0)\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right]$$

$$= f(z_0)g'(z_0) + g(z_0)f'(z_0)$$

ดังนั้นสำหรับ $z = z_0$ ใดๆ จะได้ $\frac{d}{dz}\left\{f(z)g(z)\right\} = f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$

(3) $$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{d}{dz}\left[f(z)\times\frac{1}{g(z)}\right]$$

$$= f(z)\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{g(z)}\right] + \frac{1}{g(z)}\times\frac{d}{dz}f(z) \quad \ldots\ldots\ldots(2.17)$$

แต่ $\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{g(z)}\right]$ ยังไม่ทราบค่า แต่จะหาได้จากนิยาม 19

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{g(z)}\right]\Bigg]_{z=z_0} = \lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{z - z_0}\left\{\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)}\right\}\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{z - z_0}\left\{\frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)g(z_0)}\right\}\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{-1}{g(z)g(z_0)}\left\{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}\right\}\right]$$

$$= \frac{-1}{g(z_0)} \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} \times \lim_{z \to z_0} \left\{ \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right\}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{g(z)}\right]_{z=z_0} = -\frac{1}{\left[g(z_0)\right]^2} \times g'(z_0)$$

ดังนั้นสำหรับ $z = z_0$ ใดๆ จะได้ $\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{g(z)}\right] = -\frac{g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$ ....(2.18)

นำเอา (2.18) ไปแทนค่าใน (2.17) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = f(z)\left[-\frac{g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}\right] + \frac{1}{g(z)} \times f'(z)$$

ดังนั้น $$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{\left[g(z)\right]^2}$$

<u>ทฤษฎีที่ 8</u> กฎลูกโซ่(Chain Rule) ให้ $w = f(z)$ มีอนุพันธ์ที่จุด z_0 และ $g(w)$ มีอนุพันธ์ที่จุด $w_0 = f(z_0)$ ดังนั้นฟังก์ชันประกอบ $(gof)(z) = g(f(z))$ มีอนุพันธ์ที่จุด z_0 และ $\frac{d}{dz} g(f(z))\Big]_{z=z_0} = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0))$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $$h(w) = \begin{cases} \dfrac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) & \text{เมื่อ } w \neq w_0 \\ 0 & \text{เมื่อ } w = w_0 \end{cases}$$

และจาก $w = f(z)$ จะได้ว่า

$$g(f(z) - g(f(z_0)) = \left\{h(f(z)) + g'(w_0)\right\}\left\{f(z) - f(z_0)\right\}$$

เมื่อ $z \neq z_0$ จะได้

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \left\{h(f(z)) + g'(w_0)\right\}\left\{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right\}$$

ดังนั้น $$\lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0}\left\{h(f(z)) + g'(w_0)\right\} \lim_{z \to z_0}\left\{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right\}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dz} g(f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \left\{ h(f(z_0)) + g'(w_0) \right\} f'(z_0)$ ....(2.19)

เนื่องจาก $g(w)$ มีอนุพันธ์ $g'(w_0)$ ดังนั้น $g(w)$ มีความต่อเนื่องที่จุด w_0 จากนิยามการให้ h จะได้ว่า h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และจากทฤษฎีที่ 5

$$\lim_{z \to z_0} h(f(z_0)) = h(f(z_0)) = h(w_0) = 0 \quad \text{.............(2.20)}$$

จาก (2.19) และ (2.20)

$$\frac{d}{dz} g(f(z))\Big]_{z=z_0} = \left[0 + g'(w_0)\right] f'(z_0)$$

$$= g'(f(z_0)).f'(z_0)$$

ตัวอย่าง 9 ให้ $g(z) = z^5$, $f(z) = 2z + 1$ จงหา $\frac{d}{dz}\left[g(f(z))\right]$

วิธีทำ
$$\frac{d}{dz}\left[g(f(z))\right] = \frac{d}{dz}(2z + 1)^5$$

$$= \frac{d}{dz}\left[f(z)\right]^5$$

$$= 5\left[f(z)\right]^4 \frac{d}{dz}\left[f(z)\right]$$

$$= 5(2z + 1)^4 \frac{d}{dz}(2z + 1)$$

$$\frac{d}{dz}\left[g(f(z))\right] = 10(2z + 1)^4$$

ส่วนที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะอาศัยอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของฟังก์ชัน 2 ตัวแปรจริง

ถ้า $f(z) = u + iv$ มีอนุพันธ์ $f'(z)$ ความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 ของฟังก์ชัน 2 ตัวแปรจริง

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} = u_y \ , \ \frac{\partial v}{\partial x} = v_x \ , \ \frac{\partial v}{\partial y} = v_y$$

จะเป็นดังนี้ $u_x = v_y$ และ $u_y = -v_x$

เช่น $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

ดังนั้น $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$

และ $u_x = 2x$, $u_y = -2y$

$v_x = 2y$, $v_y = 2x$

จะเห็นว่า $u_x = 2x = v_y$ และ $u_y = -2y = -v_x$

สมการ $u_x = v_y$ และ $u_y = -v_x$ นี้เรียกว่าสมการ <u>โคชี - รีมันน์</u> (Cauchy - Riemann equations)

<u>ทฤษฎีที่ 9</u> ถ้า $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ มีอนุพันธ์ที่จุด z_0 ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยอันดับ 1, u_x , u_y , v_x และ v_y จะสอดคล้องกับสมการ โคชี- รีมันน์ ที่จุด z_0

<u>พิสูจน์</u> ให้ $z_0 = x_0 + iy_0$

เนื่องจาก $f(z)$ มีอนุพันธ์ที่จุด z_0

ดังนั้นจากนิยาม 19 จะได้ว่า $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

จากทฤษฎีที่ 1 , $f'(z_0)$ จะมีเพียงค่าเดียว และเนื่องจาก $z \to z_0$ ในทุกทิศทุกทาง เราจะเลือกพิจารณา $z \to z_0$ เมื่อ $x \to x_0$ และ $y = y_0$

$$f'(z_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{[u(x,y_0) - u(x_0,y_0)] + i\,[v(x,y_0) - v(x_0,y_0)]}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i\lim_{x\to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\,v_x(x_0,y_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.21)$$

และพิจารณาเมื่อ $y \longrightarrow y_0$ และ $x = x_0$

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{[u(x_0,y) - u(x_0,y_0)] + i[v(x_0,y) - v(x_0,y_0)]}{i(y - y_0)}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} + i \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{i(y - y_0)}$$

$$= -i \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0}$$

$$f'(z_0) = -i\, u_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.22)$$

เพราะว่า (2.21) = (2.22)

นั่นคือที่จุด $z_0 = x_0 + iy_0$, $u_x + iv_x = -i\,u_y + v_y$

จากนิยามที่ 3 บทที่ 2 การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อนจะได้

$$u_x = v_y \quad \text{และ} \quad v_x = -u_y$$

ส่วนกลับของทฤษฎีนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง คือ ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 1 ของ u และ v สอดคล้องกับสมการโคชี – รีมันน์ ที่จุด z_0 แล้ว ฟังก์ชัน $f(z) = u + iv$ อาจจะไม่มีอนุพันธ์ที่จุด z_0 ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 10</u> ให้ $f(z) = \begin{cases} u + iv & \text{เมื่อ } z \neq 0 \\ 0 & \text{" } z = 0 \end{cases}$

และให้ $u(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

จงแสดงว่าที่จุด $z = 0$ อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง ของ u และ v สอดคล้องกับสมการโคชี – รีมันน์ แต่ $f'(0)$ หาค่าไม่ได้

<u>วิธีทำ</u> จากนิยามของ f จะได้ว่า

$$u_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3/x^2 - 0}{x} = 1$$

$$u_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{(-y^3/y^2) - 0}{y} = -1$$

$$v_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3/x^2 - 0}{x} = 1$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{y^3/y^2 - 0}{y} = 1$$

จะเห็นว่าที่จุด $z = 0$, $u_x = v_y$ และ $u_y = -v_x$ ฉะนั้น v_x และ v_y สอดคล้องกับสมการ โคชี - รีมันน์

พิจารณาค่าของ $f'(0)$ เมื่อ z เข้าใกล้ศูนย์ทางเส้นตรง $y = x$ จะได้

$$u(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

$$v(x,y) = \frac{2x^3}{2x^2} = x$$

ดังนั้น $f(z) = u + iv = 0 + ix$

จาก
$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{ix - 0}{(x + ix) - 0}$$
$$= \frac{i}{1 + i}$$
$$f'(0) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

แต่ถ้า $z \to 0$ ทางแกน x จะได้

$$u(x,y) = \frac{x^3 - 0}{x^2 + 0} = x$$

$$v(x,y) = \frac{x^3 + 0}{x^2 + 0} = x$$

ดังนั้น $f(z) = u + iv = x + ix$

นั่นคือ $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{(x + ix) - 0}{x}$

$$f'(0) = 1 + i$$

จะเห็นว่าลิมิตของ $f'(0)$ เมื่อ z เข้าใกล้ศูนย์ทางแกน X และทางเส้นตรง $y = x$ มีค่าต่างกัน ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 1 , $f'(z)$ จะไม่มีลิมิตที่จุด 0

สำหรับฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการ โคชี - รีมันน์ และมีอนุพันธ์ที่จุด z_0 ได้นั้นจะต้องมีเงื่อนไขเพิ่มขึ้นคือ จะต้องมี u_x , u_y , v_x , v_y เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีที่ 10</u> ถ้า $f(z) = u + iv$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่ง u_x , u_y , v_x และ v_y ที่มีความต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการ โคชี - รีมันน์ที่จุด z_0 จะได้ว่า $f(z)$ มีอนุพันธ์ที่จุด z_0

<u>พิสูจน์</u> ให้ $f(z_0) = u_0 + iv_0$

ถ้า $\Delta u = u - u_0$ และ $\Delta v = v - v_0$ เป็นส่วนที่เปลี่ยน(increment) ของฟังก์ชัน u และ v ตามลำดับนั้น $u - u_0 = u(x,y) - u(x_0,y_0)$

และ $v - v_0 = v(x,y) - v(x_0,y_0)$

เนื่องจากอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ u และ v มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ดังนั้นจากวิชา **Advanced Calculus** ส่วนที่เปลี่ยนของ u และ v สามารถเขียนได้ในเทอมของอนุพันธ์ย่อยดังนี้คือ

$$u - u_0 = u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0) + \varepsilon_1(x - x_0) + \varepsilon_2(y - y_0)$$

โดยที่ $\varepsilon_1 \to 0$ และ $\varepsilon_2 \to 0$ เมื่อ $x \to x_0$ และ $y \to y_0$

$$v - v_0 = v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0) + \varepsilon_3(x - x_0) + \varepsilon_4(y - y_0)$$

โดยที่ $\varepsilon_3 \to 0$ และ $\varepsilon_4 \to 0$ เมื่อ $x \to x_0$ และ $y \to y_0$

เนื่องจากอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งของ u และ v สอดคล้องกับสมการ โคชี - รีมันน์

$u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$ และจาก $f(z) - f(z_0) = (u - u_0) + i(v - v_0)$

ดังนั้น
$$f(z) - f(z_0) = u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0) + \varepsilon_1(x - x_0) + \varepsilon_2(y - y_0) + i\left[v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0) + \varepsilon_3(x - x_0) + \varepsilon_4(y - y_0)\right]$$

$$= u_x(x - x_0) - v_x(y - y_0) + \varepsilon_1(x - x_0) + \varepsilon_2(y - y_0) +$$
$$i\left[v_x(x - x_0) + u_x(y - y_0) + \varepsilon_3(x - x_0) + \varepsilon_4(y - y_0)\right]$$
$$= u_x\left[(x - x_0) + i(y - y_0)\right] + v_x\left[i(x - x_0) - (y - y_0)\right] +$$
$$(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)(x - x_0) + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)(y - y_0)$$

$$f(z) - f(z_0) = u_x(z - z_0) + iv_x(z - z_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)(x - x_0) +$$
$$(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)(y - y_0)$$

คูณด้วย $\frac{1}{z - z_0}$ ทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x + iv_x + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}\right) +$$
$$(\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\left(\frac{y - y_0}{z - z_0}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.23)$$

ให้ $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y = z - z_0$

จากความรู้พื้นฐานในเรื่องจำนวนเชิงซ้อนขั้นพื้นฐานจะได้ว่า

$$|\Delta x| \leq |\Delta z| \qquad \text{และ} \qquad |\Delta y| \leq |\Delta z|$$

ดังนั้น $\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| \leq 1$ และ $\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \leq 1$

พิจารณา $\left|(\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}\right) + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\left(\frac{y - y_0}{z - z_0}\right)\right|$

$$\leq |\varepsilon_1 + i\varepsilon_3|\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| + |\varepsilon_2 + i\varepsilon_4|\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|$$
$$\leq |\varepsilon_1 + i\varepsilon_3| + |\varepsilon_2 + i\varepsilon_4|$$

$$\lim_{z \to z_0} \left((\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\left(\frac{x - x_0}{z - z_0}\right) + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\left(\frac{y - y_0}{z - z_0}\right)\right) = 0$$

ดังนั้นจาก (2.23) จะได้ว่า $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x + iv_x = f'(z_0)$

นั่นคือสามารถหาอนุพันธ์ของ $f(z)$ ที่จุด z_0 ได้

ตัวอย่าง 11 จงแสดงว่า $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ มีอนุพันธ์ที่ทุกๆจุดในระนาบ

วิธีทำ ให้ $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

ดังนั้น $u = e^x \cos y \ , \quad v = e^x \sin y$

$$u_x = e^x \cos y \ , \quad v_y = e^x \cos y$$

$$u_y = -e^x \sin y \ , \quad v_x = e^x \sin y$$

จะเห็นว่า u_x , u_y , v_x และ v_y มีความต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการโคชี – รีมันน์ ที่ทุกๆ จุดในระนาบ ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 10 จะได้ว่า

$f(z)$ มีอนุพันธ์ที่ทุกๆ จุดในระนาบ

ตัวอย่าง 12 จงแสดงว่า $f(z) = |z|^2$ มีอนุพันธ์ที่จุด $z = 0$ เท่านั้น

วิธีทำ ให้ $z = x + iy \ , \quad f(z) = u + iv$

ดังนั้น $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$

$$u = x^2 + y^2 \ , \quad v = 0$$

$$u_x = 2x \ , \quad v_x = 0$$

$$u_y = 2y \ , \quad v_y = 0$$

จะเห็นว่า u_x , u_y , v_x , v_y ไม่สอดคล้องกับสมการ โคชี – รีมันน์ ยกเว้นที่จุด $z = 0$ เท่านั้น ดังนั้น $f(z)$ มีอนุพันธ์ที่จุด $z = 0$ เท่านั้น

2.6 ฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Function)

นิยาม 20 ฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 ถ้า $f(z)$ มีอนุพันธ์ที่ทุกๆ จุด z ในย่านจุด z_0

ถ้า $f(z)$ มีอนุพันธ์ที่จุด $z = z_0$ จุดเดียว แต่ที่อื่นๆ ใกล้ z_0 ไม่มีอนุพันธ์ แล้ว $f(z)$ ก็ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

นิยามของการเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และ การมีอนุพันธ์ของ $f(z)$ ที่จุด z_0 ต่างกันคือการมีอนุพันธ์ที่จุด z_0 หมายถึง $f(z)$ มีอนุพันธ์เฉพาะที่จุด z_0 เท่านั้น ส่วนการเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 นั้นหมายถึง $f(z)$ จะต้องมีอนุพันธ์ที่ทุกๆ จุด z ในย่านจุด z_0 เช่น $f(z) = |z|^2$ มีอนุพันธ์ที่จุด $z = 0$ แต่ $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 0$ เพราะว่าฟังก์ชันนี้มีอนุพันธ์ที่จุด $z = 0$ เท่านั้น

<u>นิยาม 21</u> $f(z)$ เรียกว่าเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D ถ้า $f(z)$ มีอนุพันธ์ที่ทุกๆ จุดใน D

<u>นิยาม 22</u> ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกๆ จุดในระนาบ z แล้ว เราจะเรียก $f(z)$ ว่าเป็นฟังก์ชันเอนไทร์ (entire function) เช่น $f(z) = z^2$ $f(z) = e^z$

จุดที่ $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์เรียกว่าจุด เอกฐาน(Singular point หรือ Singularity) ซึ่งจะกล่าวอย่างละเอียดในบทที่ 4 เช่น จุด $z = i$ เป็นจุดเอกฐานของฟังก์ชัน $f(z) = \frac{z}{z - i}$

จากทฤษฎีที่ 7 จะได้ว่าผลบวกและผลคูณของสองฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D ยังคงเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D และผลหารของฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งมีส่วนไม่เป็นศูนย์ ยังคงเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ของ z ใน D และ R เป็นเรนจ์ของ $f(z)$ สำหรับทุกๆ ค่าของ z ใน D ถ้า g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในสับเซต S ของ R จากทฤษฎีที่ 8 จะได้ว่าฟังก์ชันประกอบ $g(f(z))$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D และจากทฤษฎีที่ 9 และทฤษฎีที่ 10 จะได้ว่า $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D ก็ต่อเมื่อ u และ v มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง ที่มีความต่อเนื่อง และ สอดคล้องกับสมการ โคชี – รีมันน์ ที่แต่ละจุดใน D ได้

....