บทที่ 3

การอินทิเกรตเชิงซ้อน

(Complex Integration)

การอินทิเกรตในระบบจำนวนเชิงซ้อนแบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ

1. อินทิกรัลแบบจำกัดเขต (definite integral) หรือ อินทิกรัลคอนทัวร์ (contour integral)
2. อินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขต (indefinite integral)

แต่ก่อนที่จะกล่าวถึงการอินทิเกรตเชิงซ้อนนั้น จะให้นิยามเกี่ยวกับเส้นต่อเนื่อง (continuous curve) ซึ่งจะต้องนำไปใช้ในการอินทิเกรตเสียก่อนดังต่อไปนี้

<u>นิยาม 1</u> เส้นต่อเนื่อง $z(t) = x(t) + iy(t)$ ในระนาบเชิงซ้อน คือเซตของจุด (x,y) ซึ่ง $x = x(t)$ และ $y = y(t)$ เมื่อ $x(t)$ และ $y(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของพารามิเตอร์ของจำนวนจริง (real parameter) t ในช่วงจริง $[a,b]$

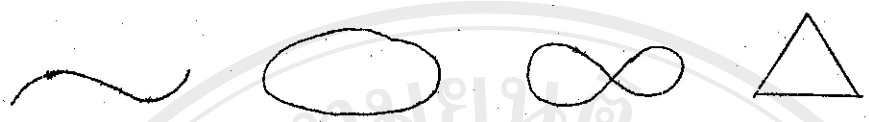
<u>นิยาม 2</u> เส้นต่อเนื่อง $z = z(t)$ ซึ่งนิยามในช่วงจริง $[a,b]$ เรียกว่า อาร์กเรียบ (Smooth arc) ถ้า $z(t)$ มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง ที่ไม่เป็นศูนย์ และ $z(t)$ เป็น 1 - 1 ในช่วง $[a,b]$

$z'(t) \neq 0$ หมายถึง $x'(t) \neq 0$ หรือ $y'(t) \neq 0$

จากนิยาม 2 ถ้า $z'(t) = 0$ แล้วแสดงว่า $x'(t)$ และ $y'(t) = 0$

<u>นิยาม 3</u> เส้นต่อเนื่อง $z(t)$ ซึ่งนิยามในช่วง $[a,b]$ จะเรียกว่า เส้นโค้งปิดเรียบ (Smooth closed curve) ถ้า $z(t)$ มีอนุพันธ์ต่อเนื่อง $z'(t)$ ที่ไม่เป็นศูนย์ และ $z(t)$ เป็น 1 - 1 ในช่วง $[a,b]$ โดยมี $z(b) = z(a)$ และ $z'(b)=z'(a)$

ฟังก์ชันที่เป็นอาร์กเรียบ (smooth arc) หรือ เส้นโค้งปิดเรียบ (smooth closed curve) เรียกรวมกันว่า<u>เส้นโค้งเรียบ</u>(smooth curve)

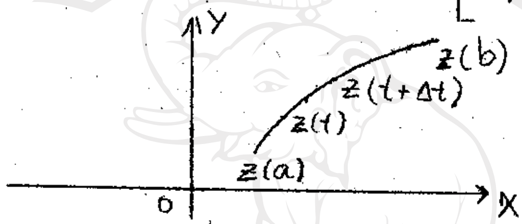


อาร์กเรียบ (smooth arc) เส้นโค้งเรียบปิด (smooth closed curve) ไม่เรียบ not smooth, ไม่เรียบ not smooth

<u>รูปที่ 5</u>

การหาความยาวของเส้นโค้งเรียบ ให้ทำได้ดังนี้

ให้ $z(t)$ เป็นเส้นโค้งเรียบ นิยามในช่วง $[a, b]$



<u>รูปที่ 6</u>

เมื่อ $\Delta t \to 0$ ระยะห่างระหว่างจุด $z(t)$ และจุด $z(t+\Delta t)$ กับความยาวของคอร์ดที่เชื่อมจุด $z(t)$ และจุด $z(t+\Delta t)$ มีค่าใกล้เคียงกันมาก

ถ้าให้ $s(t+\Delta t) - s(t)$ เป็นความยาวของอาร์กที่เชื่อมจุด $z(t)$ และ $z(t+\Delta t)$ แล้วจะได้ $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{z(t+\Delta t) - z(t)} = 1$

แต่ $\dfrac{ds(t)}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{z(t+\Delta t) - z(t)} \times \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

$$= 1 \cdot \frac{dz}{dt}$$

ถ้าให้ L เป็นความยาวของเส้นโค้งเรียบ จะได้

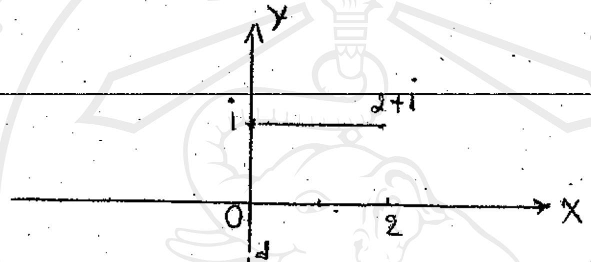
$$L = \int_a^b \frac{ds}{dt}\,dt$$

$$= \int_a^b \left|\frac{dz}{dt}\right| dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

<u>ตัวอย่าง 1</u> ให้ C เป็น เส้นโค้งเรียบ จาก $z = i$ ไปยัง $z = 2 + i$ จงหาความยาวของ C

<u>วิธีทำ</u>



รูปที่ 7

<u>จากสูตร</u>

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

เมื่อ L เป็นความยาวของเส้นโค้งเรียบ C

จากกำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบ จาก $z = i$ ไปยัง $z = 2 + i$

จะได้ว่า y มีค่าคงที่เท่ากับ 1

ให้ $x = t \;,\; 0 \leq t \leq 2$

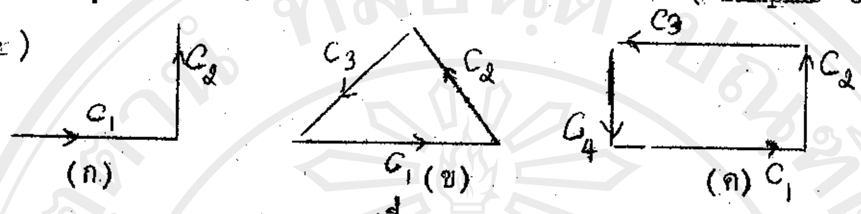
จะได้ $\frac{dx}{dt} = 1$ และ $\frac{dy}{dt} = 0$

ดังนั้น $L = \int_0^2 dt = t\Big]_0^2 = 2$

<u>นิยาม 4</u> คอนทัวร์ (contour) คือ เส้นโค้งเรียบจำนวนจำกัด $C_1 , C_2 , C_3 ,$ ...., C_n ซึ่งจุดปลายของ C_k และจุดเริ่มต้นของ C_{k+1} เป็นจุดเดียวกัน เมื่อ $k = 1,2,3,\ldots\ldots,n-1$

นั่นคือจุดปลายของ C_1 และจุดเริ่มต้นของ C_2 เป็นจุดเดียวกัน จุดปลายของ C_2 และจุดเริ่มต้นของ C_3 เป็นจุดเดียวกัน ฯลฯ

ถ้าคอนทัวร์ มีจุดร่วมกันเพียงจุดเดียว (นั่นคือจุดปลายและจุดเริ่มต้นของคอนทัวร์นั้นเป็นจุดเดียวกัน) เรียกว่า เส้นโค้งปิดเชิงเดียว (simple closed contour)



<u>รูปที่ 8</u>

<u>ในรูปที่ 8</u> รูป (ก) เป็นคอนทัวร์ซึ่งประกอบด้วย เส้นโค้งเรียบ C_1 และ C_2

รูป (ข) เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งประกอบด้วย เส้นโค้งเรียบ C_1 , C_2 และ C_3

รูป (ค) เป็นเส้นโค้งปิด ประกอบด้วย เส้นโค้งเรียบ C_1 , C_2, C_3 และ C_4

ความยาวของคอนทัวร์หาได้จากผลบวกแต่ละ เส้นโค้งเรียบ ที่ประกอบกันเป็นคอนทัวร์

ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว ถ้า C มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เรียกว่า C มีทิศทางบวก ถ้า C มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา เรียกว่า C มีทิศทางลบ เขียนแทนด้วย $-C$

เส้นโค้งปิด C ใดๆ ในระนาบเชิงซ้อนจะแบ่งระนาบออกเป็น 2 โดเมน คือโดเมนที่มีขอบเขตเรียกว่าส่วนภายในของ C (interior of C) และโดเมนที่ไม่มีขอบเขต เรียกว่าส่วนภายนอกของ C (exterior of C)

<u>นิยาม 5</u> บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว (Simple connected domain) D คือ โดเมน ซึ่งทุกๆ เส้นโค้งปิด ใน D มีจุดภายในของคอนทัวร์อยู่ใน D ทั้งหมด

โดเมนซึ่งไม่เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว เรียกว่า บริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง (multiple connected domain)

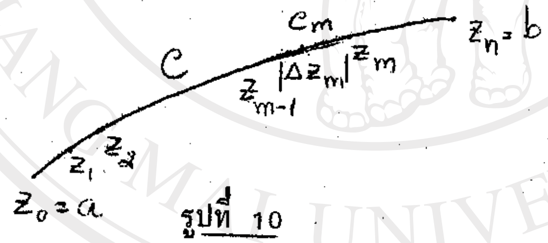
(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 9

ในรูปที่ 9 รูป (ก) และ (ข) เป็น บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว เพราะว่าทุกๆ เส้นโค้งปิด C ในโดเมนมีจุดภายในของ C อยู่ใน D แต่รูป (ค) เป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง เพราะว่าจะมีเส้นโค้งปิด C บางอันซึ่งจุดภายในของ C ไม่อยู่ในโดเมน D

3.1 อินทิกรัลคอนทัวร์ (Contour Integral)

ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบ C ซึ่ง มีจุดเริ่มต้น a และจุดปลาย b แบ่ง C ออกเป็น n ส่วนด้วยจุด $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots, z_n$ เมื่อ $z_0 = a$ และ $z_n = b$ โดยความยาวของแต่ละส่วน ไม่จำเป็นว่าจะต้องเท่ากัน



รูปที่ 10

เลือก c_m เป็นจุดๆ หนึ่งระหว่าง z_{m-1} กับ z_m เมื่อ $m = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1}$$

ให้

$$S_n = f(c_1)\Delta z_1 + f(c_2)\Delta z_2 + \ldots\ldots\ldots + f(c_n)\Delta z_n$$

$$= \sum_{m=1}^{n} f(c_m)\Delta z_m$$

การแบ่งเส้นโค้งเรียบ C ด้วยวิธีนี้ ถ้ากล่าวว่าความยาวของส่วนแบ่งแต่ละส่วนมีค่าน้อยมาก หรือ เมื่อ n มีค่าเข้าใกล้ ∞ จะหมายความว่าส่วนที่ยาว

ที่สุดของ z_m มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

<u>นิยาม 6</u> ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันนิยามบนเส้นโค้งเรียบ C แล้ว $f(z)$ เรียกว่า อินทิเกรตได้ (Integrable) บน C ถ้ามีจำนวนเชิงซ้อน L ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L \quad \text{เมื่อ} \quad \max_n |\Delta z| \longrightarrow 0$$

$$\text{โดย} \quad S_n = \sum_{m=1}^{n} f(c_m)\, \Delta z_m$$

L เรียกว่า อินทิกรัลของ $f(z)$ บน C เขียนแทนด้วย $L = \oint_C f(z)dz$ สำหรับเส้นโค้งเรียบ C เรียกว่าเส้นทางของการอินทิเกรต (path of integration) อินทิกรัลของ $f(z)$ บน C สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอินทิกรัลแบบจำกัดได้ดังนี้

ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบ C

$c_m = p_m + iq_m$ และ $z_m = x_m + iy_m$ เมื่อ $m = 1,2,3, \ldots , n$

ดังนั้น $S_n = \sum_{m=1}^{m}(u + iv)(\Delta x_m + i\,\Delta y_m)$ ....(3.1)

เมื่อ $u = u(p_m, q_m)$, $v = v(p_m, q_m)$

นั่นคือจาก(3.1), $S_n = \sum u\Delta x_m - \sum v\,\Delta y_m + i(\sum u\,\Delta y_m + \sum v\,\Delta x_m)$ ....(3.2)

เนื่องจาก $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น u และ v เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า n เข้าใกล้ ∞ แล้วจะทำให้ $\max \Delta x_m$ และ $\max \Delta y_m$ เข้าใกล้ศูนย์

เนื่องจาก $\lim_{n\to\infty} S_n = L = \int_C f(z)dz$ และ u , v เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง

ดังนั้นลิมิตของผลบวกของแต่ละส่วนใน(3.2)จะเป็นอินทิกรัลตามเส้นของจำนวนจริง

นั่นคือ $\int_C f(z)dz = \int_C udx - \int_C vdy + i(\int_C udy + \int_C vdx)$ ....(3.3)

ให้ $z(t) = x(t) + iy(t)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาค่าได้บนช่วงจริง $[a, b]$

โดย $z(t)$ มีกราฟเป็นเส้นโค้งเรียบ C บนระนาบเชิงซ้อน

จาก(3.3) เปลี่ยนทางขวามือให้เป็นอินทิกรัลแบบจำกัดของฟังก์ชันของจำนวนจริง จะได้

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (u\frac{dx}{dt} - v\frac{dy}{dt})dt + \int_a^b (v\frac{dx}{dt} + u\frac{dy}{dt})dt$$

เมื่อ $u = u(x(t),y(t))$ และ $v = v(x(t),y(t))$

ดังนั้น

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (u+iv)(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt})\,dt$$

$$= \int_a^b f(z(t))\frac{dz}{dt}\,dt$$

เป็นอินทิกรัลแบบจำกัดของฟังก์ชันของจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อ $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$ และ $f(z) = u + iv$

สำหรับคอนทัวร์ C ใดๆ ที่ประกอบด้วยเส้นโค้งเรียบ C_1, C_2, C_3, C_4, ..., C_n อินทิกรัลของ $f(z)$ บน C เรียกว่า อินทิกรัลคอนทัวร์ ดังนั้นอินทิกรัลคอนทัวร์คือผลบวกของอินทิกรัลของ $f(z)$ บน $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ดังนี้

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots\cdots + \int_{C_n} f(z)dz$$

<u>คุณสมบัติเบื้องต้นของอินทิกรัลคอนทัวร์</u>

ให้ C เป็นคอนทัวร์ใดๆ ดังนั้น

(1) $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

(2) $\int_C (f(z) + g(z))\,dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$

(3) $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$

(4) $$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)|\,|dz|$$

$$\leq \quad ML$$ เมื่อ $|f(z)| \leq M$ และ L เป็นความยาว

ของคอนทัวร์ C

<u>ตัวอย่าง 2</u> จงหาค่าของ $\int_C \bar{z}\, dz$ จาก $z = 0$ ถึง $z = 4 + 2i$ ตาม เส้นโค้ง C เมื่อ กำหนดให้ $z = t^2 + it$

<u>วิธีทำ</u> เมื่อ $z = 0$ จะได้ $t = 0$

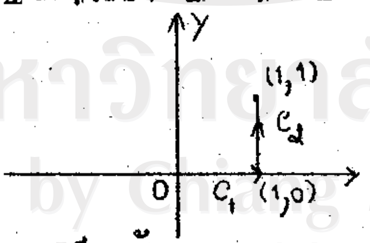
และเมื่อ $z = 4 + 2i$ จะได้ $t^2 + it = 4 + 2i$

นั่นคือ $t = 2$

จาก
$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_{t=0}^{2} (t^2 - it)\, d(t^2 + it)$$
$$= \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)\, dt$$
$$= \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)\, dt$$
$$= \left.\frac{2t^4}{4} - \frac{it^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right]_0^2$$
$$\int_C \bar{z}\, dz = 10 - \frac{8}{3}i$$

<u>ตัวอย่าง 3</u> จงหาค่าของ $\int_C x dx$ เมื่อ C เป็นเส้นทางการอินทิเกรต จาก $z = 0$ ไปยัง $z = 1$ และจาก $z = 1$ ไปยัง $z = 1 + i$

<u>วิธีทำ</u>



<u>รูปที่ 11</u>

ให้ C_1 และ C_2 เป็นเส้นทางการอินทิเกรตจาก $z = 0$ ไปยัง $z = 1$ และจาก $z = 1$ ไปยัง $z = 1 + i$ ตามลำดับ

จะได้ $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$

พิจารณาสำหรับ C_1 , y มีค่าคงที่เป็น 0

ให้ $x = t \;,\; 0 \leq t \leq 1$

ดังนั้น $z(t) = x(t) + iy(t) = t$

$$f(z(t)) = x(t) = t$$

$$z'(t) = 1$$

พิจารณาสำหรับ C_2 , x มีค่าคงที่เป็น 1

ให้ $y = t \;,\; 0 \leq t \leq 1$

ดังนั้น $z(t) = x(t) + iy(t)$

$$= 1 + it$$

$$f(z(t)) = x(t) = 1$$

$$z'(t) = i$$

นั่นคือ $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 i\,dt$

$$= \left.\frac{t^2}{2} + it\right]_0^1$$

$$\int_C f(z)dz = \frac{1}{2} + i$$

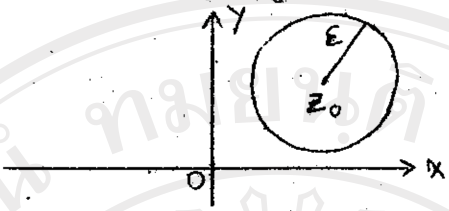
<u>ตัวอย่าง 4</u> จงแสดงว่า $\displaystyle\left|\int_i^{2+i} \frac{dz}{z^2}\right| \leq 2$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$ และบน C ค่าของ y เป็น 1 เสมอ ดังนั้น $x^2 + y^2 \geq 1$

นั่นคือ $\displaystyle\frac{1}{|z^2|} = \frac{1}{x^2 + y^2} \leq 1 = M$

จากคุณสมบัติของอินทิกรัลคอนทัวร์ข้อ(4) จะได้ $\displaystyle\left|\int_i^{2+i} \frac{dz}{z^2}\right| \leq ML = 2$

<u>ตัวอย่าง 5</u> การหาค่าของ $\oint_C (z - z_0)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และ C เป็นวงกลม รัศมี ε จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด z_0



<u>รูปที่ 12</u>

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ $f(z) = (z - z_0)^n$

ให้สมการของคอนทัวร์ C ในพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) คือ

$$z(\theta) = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

นั่นคือ
$$f(z(\theta)) = \left[(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) - z_0\right]^n = \varepsilon^n e^{in\theta}$$

$$z'(\theta) = i\varepsilon e^{i\theta}$$

ดังนั้น
$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (\varepsilon^n e^{in\theta})(i\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = i\varepsilon^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta}\, d\theta$$

<u>ถ้า $n \neq -1$</u> จะได้
$$\oint_C (z - z_0)^n dz = i\varepsilon^{n+1}\left[\frac{e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = i\varepsilon^{n+1}\left[\frac{1}{i(n+1)} - \frac{1}{i(n+1)}\right] = 0$$

<u>ถ้า $n = -1$</u> จะได้
$$\oint_C (z - z_0)^n dz = i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

นั่นคือ
$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{ถ้า } n = -1 \end{cases}$$

<u>ทฤษฎีนำ ๓</u> ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งมีอนุพันธ์ $f'(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆ จุด ภายในและบนเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C แล้วจะได้ว่า

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งมีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆ จุด $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$

จะได้ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ และ $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ มีความต่อเนื่องภายในและบน C

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)$$

จากทฤษฎีของกรีน (Green's theorem) ในวิชา Advance calculus ได้ว่า $\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$

$$\oint_C f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

จากสมการของ โคชี - รีมันน์ จะได้ว่า

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

3.2 ทฤษฎีของโคชี (Cauchy 's theorem)

ทฤษฎีที่ 1 ทฤษฎีของโคชี ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D และ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว ใน D จะได้ว่า $\oint_C f(z)dz = 0$

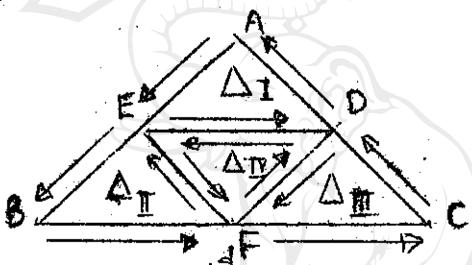
การพิสูจน์ทฤษฎีนี้จะแยกพิจารณาเป็น 3 ตอน

ตอนแรก จะพิสูจน์สำหรับคอนทัวร์ C ที่เป็นรูปสามเหลี่ยม

ตอนที่สอง จะพิสูจน์สำหรับคอนทัวร์ C ที่เป็นรูปหลายเหลี่ยม

ตอนที่สาม จะพิสูจน์สำหรับเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใดๆ

การพิสูจน์ทฤษฎีโคชี สำหรับรูปสามเหลี่ยม



รูปที่ 13

พิสูจน์ กำหนดให้ ABC ใดๆ จะพิสูจน์ว่า $\oint_C f(z)dz = 0$

ให้จุด D , E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC , AB และ BC ตามลำดับ จะได้ DE , EF และ DF แบ่ง ABC ออกเป็นสามเหลี่ยม 4 รูป เขียนแทนด้วย Δ_I Δ_{II} Δ_{III} และ Δ_{IV} ดังรูปที่ 13

ให้คอนทัวร์ ABCA ประกอบด้วยคอนทัวร์ DAE , EBF , FCD ดังนั้น

จะได้ $$\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz = \int_{DAE} f(z)dz + \int_{EBF} f(z)dz + \int_{FCD} f(z)dz$$

จากคุณสมบัติของอินทิกรัลคอนทัวร์จะได้ว่า

$\int_{ED} = -\int_{DE}$, $\int_{FE} = -\int_{EF}$ และ $\int_{DF} = -\int_{FD}$ ดังนั้นจะได้

$$\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz = \left(\int_{DAE} + \int_{ED}\right) + \left(\int_{EBF} + \int_{FE}\right) + \left(\int_{FCD} + \int_{DF}\right)$$

$$+ \left(\int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FD} \right)$$

$$\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz = \oint_{\Delta DAED} f(z)dz + \oint_{\Delta EBFE} f(z)dz + \oint_{\Delta FCDF} f(z)dz + \oint_{\Delta DEFD} f(z)dz$$

$$= \oint_{\Delta_I} f(z)dz + \oint_{\Delta_{II}} f(z)dz + \oint_{\Delta_{III}} f(z)dz + \oint_{\Delta_{IV}} f(z)dz$$

จะได้ $\left|\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz\right| \leq \left|\oint_{\Delta_I} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{II}} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{III}} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{IV}} f(z)dz\right|$

ให้ $\Delta_1 = \max\left\{\Delta_I, \Delta_{II}, \Delta_{III}, \Delta_{IV}\right\}$ ดังนั้นจะได้

$$\left|\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right|$$

เมื่อแบ่ง Δ_1 โดยวิธีการเดียวกับการแบ่ง Δ และให้ Δ_2 เป็นสามเหลี่ยมที่มีค่ามากที่สุด ดังนั้นจะได้

$$\left|\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right|$$

และ $$\left|\oint_{\Delta_1} f(z)dz\right| \leq 4 \left|\oint_{\Delta_2} f(z)dz\right|$$

นั่นคือ $$\left|\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz\right| \leq 4^2 \left|\int_{\Delta_2} f(z)dz\right|$$

เมื่อแบ่งสามเหลี่ยมที่ได้ใหม่โดยวิธีเดียวกันนี้จนถึง n ครั้งจะได้ Δ_n ซึ่งทำให้

$$\left|\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\oint_{\Delta_n} f(z)dz\right|$$

โดยที่ลำดับ (sequence) ของสามเหลี่ยมที่ได้จะเป็น $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots \Delta_n \supset \ldots$

ให้ z_0 เป็นจุดที่อยู่ภายในสามเหลี่ยมทุกๆ รูปในลำดับนี้ นั่นคือ z_0 จะเป็นจุดที่อยู่ภายในหรือบนสามเหลี่ยม ดังนั้น f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0

นั่นคือสำหรับ $n \longrightarrow 0$ เมื่อ $z \longrightarrow z_0$ จะได้

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) = \eta$$

$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z-z_0) + \eta(z-z_0)$$

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \eta(z-z_0) \quad \ldots\ldots(3.4)$$

จาก(3.4) $\oint_{\Delta_n} f(z)dz = \oint_{\Delta_n} f(z_0)dz + \oint_{\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)dz + \oint_{\Delta_n} \eta(z-z_0)dz$

และจากทฤษฎีบทที่ 1 จะได้ว่า $\oint_{\Delta_n} f(z_0)dz = 0$ และ $\oint_{\Delta_n} f'(z_0)(z-z_0)dz = 0$

ดังนั้นจะได้ $\oint_{\Delta_n} f(z)dz = \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)dz$

$$\left|\oint_{\Delta_n} f(z)dz\right| = \left|\oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)dz\right|$$

$$\leq \oint_{\Delta_n} |\eta||z - z_0|\, dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.5)$$

ให้ P เป็นความยาวของเส้นรอบรูปของ Δ ABCA

เนื่องจากให้จุด D , E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC , AB และ BC ตามลำดับ

ดังนั้นความยาวของเส้นรอบรูปของ Δ_1 คือ $P_1 = \frac{P}{2}$

ความยาวของเส้นรอบรูปของ Δ_2 คือ $P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{P}{2^2}$

ความยาวของเส้นรอบรูปของ Δ_3 คือ $P_3 = \frac{P_2}{2} = \frac{P}{2^3}$

....

....

จะได้ความยาวของเส้นรอบรูปของ Δ_n คือ $P_n = \frac{P_{n-1}}{2} = \frac{P}{2^n}$

และถ้า z เป็นจุดใดๆ บน Δ_n แล้วจะได้ $|z - z_0| < \frac{P}{2^m}$

นั่นคือสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆ จะหา $\delta > 0$ ซึ่ง $|\eta| < \varepsilon$ เมื่อ $|z - z_0| < \delta$

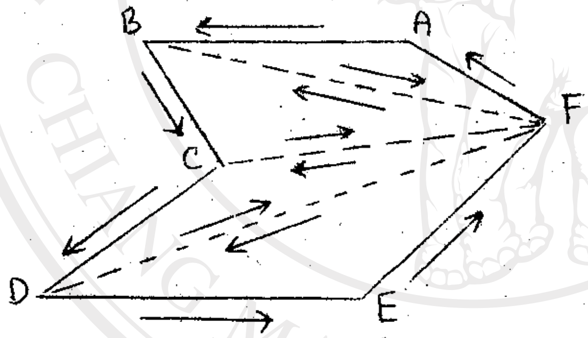
จาก (3.5) จะได้ $\left|\oint_{\Delta_n} f(z)dz\right| \leq \varepsilon \times \frac{P}{2^m} \cdot \frac{P}{2^m} = \frac{\varepsilon P^2}{4^m}$

นั่นคือ $\left|\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz\right| \leq 4^n \times \varepsilon \times \frac{P^2}{4^n} = \varepsilon \times P^2$

เนื่องจาก ε สามารถจะเลือกให้มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้ ดังนั้น $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$\oint_{\Delta ABCA} f(z)dz = 0$$

การพิสูจน์ทฤษฎีของโคชีสำหรับรูปหลายเหลี่ยม



รูปที่ 14

ให้ ABCDEFA เป็นรูปหลายเหลี่ยม

แบ่งรูปหลายเหลี่ยม ABCDEFA ออกเป็นรูปสามเหลี่ยม โดยลากเส้น BF , FC และ DF เพื่อที่จะใช้ทฤษฎีของโคชีสำหรับรูปสามเหลี่ยม

จาก $\int_{BF} = -\int_{FB}$, $\int_{CF} = -\int_{FC}$ และ $\int_{DF} = -\int_{FD}$

ดังนั้นจะได้ $\oint_{ABCDEFA} f(z)dz = \left[\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FA}\right] f(z)dz$

$$= \left(\int_{AB} + \int_{BF} + \int_{FA}\right) f(z)dz + \left(\int_{BC} + \int_{CF} + \int_{FB}\right) f(z)dz \ +$$

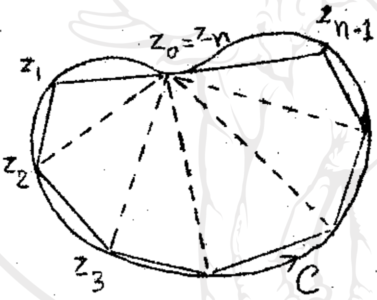
$$\left(\int_{CD} + \int_{DF} + \int_{FC}\right) f(z)dz + \left(\int_{DE} + \int_{EF} + \int_{FD}\right) f(z)dz$$

$$= \oint_{\Delta ABFA} f(z)dz + \oint_{\Delta BCFB} f(z)dz + \oint_{\Delta CDFC} f(z)dz + \oint_{\Delta DEFD} f(z)dz$$

$= 0 + 0 + 0 + 0$ (จากทฤษฎีของโคชีสำหรับรูปสามเหลี่ยม)

$$\oint_{ABCDEFA} f(z)dz = 0$$

<u>การพิสูจน์ทฤษฎีของโคชีสำหรับ เส้นโค้งปิดเชิงเดียวใดๆ</u>



รูปที่ 15

ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใดๆ ที่มีความยาวเท่ากับ L แบ่ง C ออกเป็น n ส่วน โดยจุด $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_n = z_0$

ให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k) \Delta z_k$ เมื่อ $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$

<u>จากนิยาม 6</u> $\lim_{n \to \infty} S_n = \oint_C f(z)dz$ ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆที่กำหนดให้ จะสามารถเลือกจำนวนเต็ม N ซึ่งเมื่อ $n > N$ จะได้

$$\left| \oint_C f(z)dz - S_n \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

เนื่องจากอินทิกรัลของ f(z) รอบรูปหลายเหลี่ยมเป็นศูนย์

ดังนั้นเมื่อให้ P เป็นรูปหลายเหลี่ยมที่เกิดจากการลากเส้นตรงเชื่อมจุด $z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_m = z_0$ จะได้

$$\oint_P f(z)dz = 0$$

นั่นคือ $$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz + \int_{z_2}^{z_3} f(z)dz + \ldots + \int_{z_{n-1}}^{z_m} f(z)dz = 0$$

$$\therefore \int_{z_0}^{z_1}\left\{f(z)-f(z_1)+f(z_1)\right\}dz + \int_{z_1}^{z_2}\left\{f(z)-f(z_2)+f(z_2)\right\}dz + \ldots$$

$$\ldots + \int_{z_{n-1}}^{z_m}\left\{f(z)-f(z_m)+f(z_n)\right\}dz = 0$$

$$\int_{z_0}^{z_1}\left\{f(z)-f(z_1)\right\}dz + \int_{z_1}^{z_2}\left\{f(z)-f(z_2)\right\}dz + \ldots$$

$$\ldots + \int_{z_{n-1}}^{z_m}\left\{f(z)-f(z_n)\right\}dz + S_m = 0$$

$$S_m = \int_{z_0}^{z_1}\left\{f(z_1)-f(z)\right\}dz + \ldots + \int_{z_{m-1}}^{z_m}\left\{f(z_m)-f(z)\right\}dz$$

เลือก N ให้มีค่ามากพอจนได้ว่า บนเส้นที่เชื่อมจุด z_0 และ z_1 , z_1 และ z_2 $\ldots$, z_{n-1} และ z_m, $f(z)$ มีค่าเข้าใกล้ $f(z_m)$ เมื่อ $m > N$ ดังนั้นให้

$$|f(z_1)-f(z)| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad |f(z_2)-f(z)| < \frac{\varepsilon}{2L}, \ldots, |f(z_m)-f(z)| < \frac{\varepsilon}{2L}$$

นั่นคือ $$|S_m| \leq \left|\int_{z_0}^{z_1}\left\{f(z_1)-f(z)\right\}dz\right| + \left|\int_{z_1}^{z_2}\left\{f(z_2)-f(z)\right\}dz\right| + \ldots$$

$$\ldots + \left|\int_{z_{n-1}}^{z_m}\left\{f(z_n)-f(z)\right\}dz\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2L}\left\{|z_1-z_0| + |z_2-z_1| + \dots\dots + |z_n-z_{n-1}|\right\} = \frac{\varepsilon}{2L} \times L = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$S_m < \frac{\varepsilon}{2}$$

แต่เนื่องจาก $\oint_C f(z)dz = \oint_C f(z)dz - S_m + S_n$

ดังนั้น $\left|\oint_C f(z)dz\right| \leq \left|\oint_C f(z)dz - S_n\right| + \left|S_m\right|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

เนื่องจาก ε เป็นค่าใดๆ ที่มากกว่าศูนย์

นั่นคือ $\oint_C f(z)dz = 0$

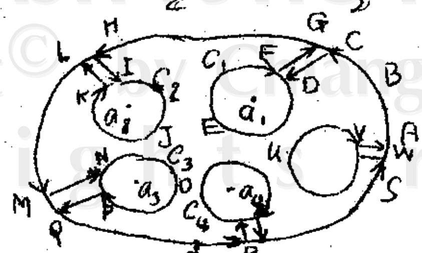
ตัวอย่าง 6 $\oint_C e^z dz$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว ใดๆ แล้วจะได้ว่า

$\oint_C e^z dz = 0$ เพราะว่า $f(z) = e^z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ที่ทุกๆ ค่าของ z ตามทฤษฎีของโคชี

ทฤษฎีที่ 2 ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C ยกเว้นที่จุด $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\dots\dots$ ถ้า $c_1, c_2, c_3, \dots\dots ; c_n, \dots\dots$ เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวรอบจุด $a_1, a_2, a_3, \dots\dots, a_n, \dots$ แล้วเราจะได้ว่า

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \dots + \oint_{C_m} f(z)dz + \dots$$



รูปที่ 16

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ภายใน เส้นโค้งปิดเชิงเดียว C ยกเว้นที่จุด $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ และ $C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots, C_n, \ldots$ เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว รอบจุด $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots$ <u>ดังรูปที่ 16</u>

ดังนั้นจากทฤษฎีของโคชี จะได้ $\displaystyle\int_{ABCDEF\ldots\ldots W} f(z)dz = 0$

$$\int_{ABC} + \int_{CD} + \int_{DEF} + \int_{FG} + \int_{GH} + \int_{HI} + \int_{IJK} + \int_{KL} + \int_{LM} + \int_{MN} +$$

$$\int_{NOP} + \int_{PQ} + \int_{Q\ldots} + \ldots\ldots\ldots + \int_{ST} + \int_{TUV} + \int_{VW} = 0$$

$$\left(\int_{ABCG} + \int_{GHL} + \int_{LMQ} + \int_{Q\ldots S} + \int_{SWA}\right) + \left(\int_{DEF} + \int_{IJK} + \int_{NOP} + \ldots + \int_{TUV}\right) = 0$$

$$\therefore \oint_{C} f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \ldots\ldots + \oint_{C_m} f(z)dz = 0$$

$$\oint_{C} f(z)dz = -\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz - \oint_{C_3} f(z)dz - \ldots\ldots - \oint_{C_n} f(z)dz$$

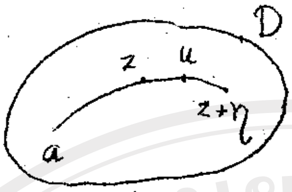
$$\oint_{C} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \ldots\ldots + \oint_{C_m} f(z)dz$$

<u>3.3</u> <u>อินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขต</u> (Indefinite Integral)

<u>ทฤษฎีที่ 3</u> ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D , a และ z เป็นจุดใน D และให้ $F(z) = \displaystyle\int_a^z f(u)du$ ....(3.7)

ดังนั้นจะได้ว่า F(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D และ $F'(z) = f(z)$

<u>พิสูจน์</u>



รูปที่ 17

ให้ z และ $z+\eta$ เป็นจุดใน D , u เป็นจุดใดๆ บนเส้นที่ต่อระหว่าง z และ $z+\eta$ จาก (3.7) จะได้ว่า $F(z+\eta)-F(z) = \int_a^{z+\eta} f(u)du - \int_a^{z} f(u)du$

$$F(z+\eta)-F(z) = \int_z^{z+\eta} f(u)du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.8)$$

เมื่อ z เป็นจุดคงที่ใดๆ จะได้

$$\frac{1}{\eta}\int_z^{z+\eta} f(z)du = \frac{1}{\eta} f(z)\int_z^{z+\eta} du = f(z) \quad \ldots\ldots\ldots(3.9)$$

จาก (3.8) และ (3.9) จะได้ว่า

$$\frac{F(z+\eta)-F(z)}{\eta} - f(z) = \frac{1}{\eta}\int_z^{z+\eta} f(u)du - \frac{1}{\eta}\int_z^{z+\eta} f(z)du \quad \ldots(3.10)$$

เนื่องจาก $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ ใดๆ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(u)-f(z)| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad |u-z| < \delta$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $|\eta| < \delta$ ย่อมยังคงทำให้ $|f(u)-f(z)| < \varepsilon$

ดังนั้นสำหรับ $|\eta| < \delta$ และจาก (3.10) จะได้

$$\frac{F(z+\eta)-F(z)}{\eta} - f(z) = \frac{1}{|\eta|}.\varepsilon.|\eta| = \varepsilon$$

ดังนั้น $$\lim_{|\eta|\to 0} \frac{F(z+\eta)-F(z)}{\eta} = f(z) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.11)$$

นั่นคือจาก (3.11) $F'(z)$ หาค่าได้ที่จุด z ใดๆ ในโดเมน D ... ว่า แสดงว่า $F(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z และ $F'(z) = f(z)$

จาก (3.7) จะพบว่าถ้าแทนจุด a ด้วยจุดอื่นๆ ใน D แล้ว ฟังก์ชัน $F(z)$ จะมีค่าเปลี่ยนแปลงไปด้วยค่าคงตัวค่าหนึ่ง ฟังก์ชัน $F(z)$ ซึ่ง $F'(z)=f(z)$ เรียกว่า อินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขต หรือ Antiderivative ของ $f(z)$

เขียนแทนด้วย $F(z) = \int f(z)dz$

สำหรับอินทิกรัลแบบจำกัดเขตสามารถหาได้โดยเปลี่ยนให้เป็นค่าของอินทิกรัลไม่จำกัดเขต ดังนี้

$$\int_a^b f(z)dz = \int_{z_0}^b f(z)dz - \int_{z_0}^a f(z)dz = F(b) - F(a)$$

เมื่อ a และ b เป็นจุดใดๆ ใน D และสำหรับเส้นทาง (path) ใดๆ ใน D จากจุด a ไปยังจุด b

ถ้า $F'(z) = f(z)$ และ $G'(z) = f(z)$ ดังนั้น

$F'(z) - G'(z) = 0$ สิ้น D

นั่นคือ $F(z) - G(z)$ เป็นฟังก์ชันคงที่ หรือ อินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขต $F(z)$ และ $G(z)$ ต่างกันด้วยค่าคงตัวค่าหนึ่ง

<u>ตัวอย่าง 7</u> ให้ $f(z) = 3z^2 - 4\sin z$

$$d\,f(z) = d\,(3z^2 - 4\sin z) = (6z - 4\cos z)\,dz$$

$$\int (6z - 4\cos z)\,dz = 3z^2 - 4\sin z + c$$

<u>ตัวอย่าง 8</u> ให้ $f(z)=z^m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกจงหาค่าของ $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ สำหรับคอนทัวร์ใดๆ ที่เชื่อมจุด z_0 และ z_1

<u>วิธีทำ</u> ฟังก์ชัน $f(z) = z^m$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในระนาบเชิงซ้อน ถ้าให้ $F(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ซึ่ง $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$ จะเห็นว่า

$F'(z) = z^n = f(z)$ ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 3 จะได้อินทิกรัลแบบไม่จำกัดเขตของ $f(z) = z^n$ คือ $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$

$$\int_{z_0}^{z_1} z^n dz = \int_a^{z_1} z^n dz - \int_a^{z_0} z^n dz$$

$$= F(z_1) - F(z_0)$$

$$\int_{z_0}^{z_1} z^n dz = \frac{z_1^{n+1}}{n+1} - \frac{z_0^{n+1}}{n+1}$$

3.4 สูตรโคชีอินทิกรัล (Cauchy Integral Formula)

จากทฤษฎีของโคชี ที่ผ่านมาแล้วนั้น ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในและบนเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C แล้วจะได้ว่า $\oint_C f(z)dz = 0$

พิจารณา $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$

ถ้า z_0 เป็นจุดภายนอก C ฟังก์ชัน $\frac{f(z)}{z - z_0}$ ยังคงเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในและบน C ดังนั้น $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0$

แต่ถ้า z_0 เป็นจุดภายใน C แล้วฟังก์ชัน $\frac{f(z)}{z - z_0}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 ดังนั้น $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \neq 0$

แต่จะได้ว่า $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$

ดังทฤษฎีต่อไปนี้

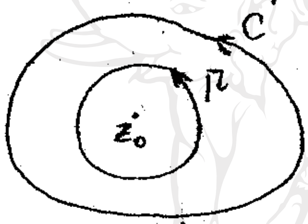
<u>ทฤษฎีที่ 4</u> (สูตรโคชีอินทิกรัล) ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D , C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใน D และ z_0 เป็นจุดใดๆ ภายใน C แล้วจะได้ว่า

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

<u>พิสูจน์</u> z_0 เป็นจุดอยู่ใน C ดังนั้นฟังก์ชัน $\frac{f(z)}{z-z_0}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน C ยกเว้นที่จุด z_0

ให้ Γ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง z_0 รัศมี ϵ และอยู่ภายใน C

จากทฤษฎีที่ 2 จะได้ว่า $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ ......(3.12)



<u>รูปที่ 18</u>

จาก (3.12) จะได้ว่า

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(z_0)+f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \oint_{\Gamma} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz + \oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

จากตัวอย่าง 5 $\oint_{\Gamma} \frac{1}{z-z_0}\,dz = 2\pi i$

ดังนั้น $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = f(z_0)\times 2\pi i + \oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$

จะพบว่าเทอมทางซ้ายมือ และ เทอมแรกทางขวามือไม่ขึ้นกับรัศมี ϵ แต่เทอมที่ 2 ทางขวามือขึ้นกับรัศมี ϵ ดังนั้นเมื่อให้ $\epsilon \longrightarrow 0$ จะได้

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \times 2\pi i \; + \lim_{\varepsilon \to 0} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \quad \ldots\ldots (3.13)$$

เนื่องจาก $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น $f(z)$ มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 ฉะนั้นสำหรับ $\varepsilon_1 \to 0$ ใดๆที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon_1 \text{ เมื่อ } |z - z_0| < \delta$$

ให้ $\varepsilon = \delta$ เมื่อ z อยู่บน Γ, $|z - z_0| = \varepsilon$ พิจารณา

$$\left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| \leq \oint_{\Gamma} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \times |dz|$$

$$< \varepsilon_1 \times \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} = 2\pi\varepsilon_1$$

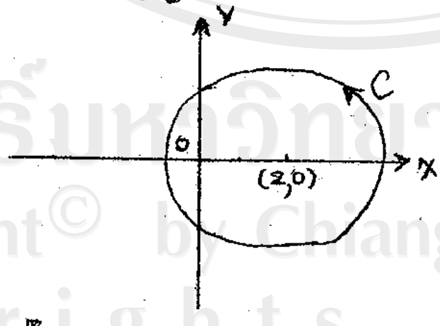
ดังนั้น $$\lim_{\varepsilon_1 \to 0} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz = 0$$

จาก (3.13) จะได้ว่า $$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) \times 2\pi i$$

นั่นคือ $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

<u>ตัวอย่าง 9</u> จงหาค่าของ $\oint_C \frac{e^z + \sin z}{z}\, dz$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z - 2| = 3$

<u>วิธีทำ</u>



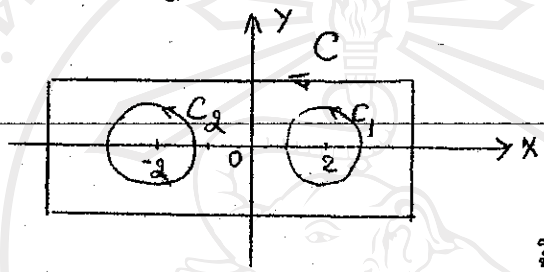
<u>รูปที่ 19</u>

ฟังก์ชัน $\frac{e^z + \sin z}{z}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 0$ ซึ่งอยู่ใน C แต่ฟังก์ชัน $e^z + \sin z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน C

ดังนั้นจากสูตรโคชีอินทิกรัลจะได้ว่า

$$\oint_C \frac{e^z + \sin z}{z}\,dz = 2\pi i \times f(0)$$
$$= 2\pi i \times (e^0 + \sin 0)$$
$$= 2\pi i$$

<u>ตัวอย่าง 10</u> จงหาค่าของ $\oint_C \frac{\cos z}{z^2 - 4}$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ ดังรูปที่ 20



<u>รูปที่ 20</u>

<u>วิธีทำ</u> ฟังก์ชัน $\frac{\cos z}{z^2 - 4}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 2$ และจุด $z = -2$ ซึ่งอยู่ใน C ให้ C_1 และ C_2 เป็นวงกลมล้อมรอบจุด $z = 2$ และ $z = -2$ <u>ดังรูปที่ 20</u> ดังนั้นจากสูตรโคชีอินทิกรัล และจากทฤษฎีที่ 2 จะได้ว่า

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^2 - 4}dz = \oint_{C_1} \frac{\cos z}{(z+2)(z-2)}dz + \oint_{C_2} \frac{\cos z}{(z+2)(z-2)}dz$$

$$= 2\pi i \times f_1(2) + 2\pi i \times f_2(-2) \qquad \text{เมื่อ } f_1 = \frac{\cos z}{z + 2}$$

$$= \frac{2\pi i \cos 2}{4} + \frac{2\pi i \cos(-2)}{-4} \qquad \text{เมื่อ } f_2 = \frac{\cos z}{z - 2}$$

$$= \frac{2\pi i \cos 2}{4} - \frac{2\pi i \cos 2}{4}$$

$$= 0$$

จากสูตรโคชีอินทิกรัล สามารถหาอนุพันธ์อันดับสูง (Higher derivative) ในเทอมของอินทิกรัลได้ นั่นคือ

ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D , C

เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว ใน D และ z_0 เป็นจุดใดๆ ภายใน C แล้วจะได้

(1) $\quad f(z_0) \quad 1 = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz$

(2) $\quad f'(z_0) = \dfrac{1!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$

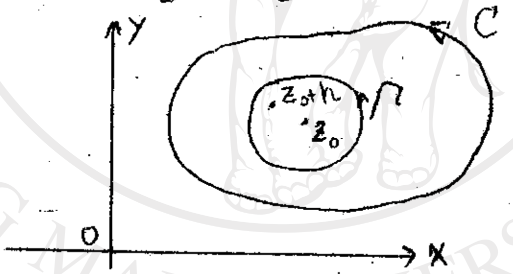
(3) $\quad f''(z_0) = \dfrac{2!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^3}\,dz$

.. ..

.. ..

.. ..

(n) $\quad f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$



รูปที่ 21

พิสูจน์

เพราะว่า $f'(z_0) = \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}\right]$

จาก (1) จะได้ว่า $f(z_0+h) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{\left[z-(z_0+h)\right]}\,dz$ ....(3.14)

และ $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ ....(3.15)

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\times\frac{1}{h}\left[\oint_C\left\{\frac{1}{z-(z_0+h)}-\frac{1}{z-z_0}\right\}f(z)\,dz\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)+f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\oint_C\left\{\frac{1}{z-(z_0+h)} - \frac{1}{z-z_0}\right\}f(z)dz\right]$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\left[\oint_C \frac{f(z)}{\left[z-(z_0+h)\right](z-z_0)}\right]dz$$

จากทฤษฎีที่ 2 จะได้ว่า $\oint_{\Gamma} = \oint_C$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\left[\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{\left[z-(z_0+h)\right](z-z_0)}dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\left[\oint_{\Gamma}\frac{(z-z_0)f(z)}{\left[z-(z_0+h)\right](z-z_0)^2}dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\left[\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz + h\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{\left[z-(z_0+h)\right](z-z_0)^2}dz\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz + \lim_{h\to 0}\left[\frac{h}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2\left[z-(z_0+h)\right]}dz\right]$$

พิจารณา $\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2\left[z-(z_0+h)\right]}dz\right|$

โดยมี $|f(z)| \leqslant M$ และ $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|z-z_0| = \varepsilon$

$z-z_0 = \varepsilon e^{i\theta}$, $|z-z_0-h| \geqslant |z-z_0| - |h| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_{\Gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}dz\right| \leqslant \frac{|h|}{|2\pi i|}\oint_{\Gamma}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^2|z-z_0-h|}|dz|$$

$$< \frac{|h|}{2\pi}\frac{M\times 2\pi\varepsilon}{\varepsilon^2\times\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$< \frac{2 \; M \; |h|}{\varepsilon^2}$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz \right| = 0$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{(z-z_0)^2} dz$$

$$\therefore f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.16)$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถจะพิสูจน์ได้ว่า

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^3} dz$$

$$f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^4} dz$$

$$f^{IV}(z_0) = \frac{4!}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^5} dz$$

....

....

....

โดยขบวนการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์(mathematical induction) เราสามารถจะพิสูจน์ได้ว่า

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

ตัวอย่าง 11 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz$

เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 3$

วิธีทำ $\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

และ $f(z) = \sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-1)(z-2)}\,dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-2}\,dz - \oint_C \frac{f(z)}{z-1}\,dz$$

$$= \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-2)}\,dz - \oint_C \frac{\sin(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{(z-1)}\,dz$$

$$= 2\pi i \times f(2) - 2\pi i \times f(1)$$

$$= 2\pi i\left[\sin 4\pi + \cos 4\pi\right] - 2\pi i\left[\sin\pi + \cos\pi\right]$$

$$= 2\pi i - 2\pi i\,(0-1)$$

$$= 2\pi i + 2\pi i$$

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz = 4\pi i$$

ตัวอย่าง 12 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz$ เมื่อC เป็นวงกลม $|z| = 2$

วิธีทำ จาก $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$

$$\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz = \frac{2\pi i \times f'''(-1)}{3!}$$

ในที่นี้ $f(z) = e^{2z}$

$f'(z) = 2e^{2z}$

$f''(z) = 4e^{2z}$

$$f'''(z) = 8e^{2z}$$

ดังนั้น $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{2\pi i \times 8 e^{-2z}}{3.2.1}$

$$= \frac{16\pi i}{6e^2}$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz = \frac{8\pi i}{3e^2}$$

....