บทที่ 4

อนุกรมของเทย์เลอร์ และ อนุกรมของโลรองต์

(Taylor's series and Laurent's series)

อนุกรมของเทย์เลอร์ และ อนุกรมของโลรองต์ที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นส่วนหนึ่งของอนุกรมกำลัง (Power series) อนุกรมกำลังคืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^m = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\cdots + a_m(z-z_0)^m + \cdots\cdots\cdots$$

เมื่อ z เป็นตัวแปรเชิงซ้อน a_n และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งเรียกว่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง

ในบทที่ 5 คือการหาสูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อนนั้นจำเป็นจะต้องมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์และโลรองต์ดีพอสมควร ดังนั้นในบทนี้จะได้กล่าวถึงเรื่องอนุกรมของเทย์เลอร์ และ อนุกรมของโลรองต์ ดังนี้

4.1 อนุกรมของเทย์เลอร์ (Taylor's series)

นิยาม 1 ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 แล้วอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^m = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots\cdots\cdots$$

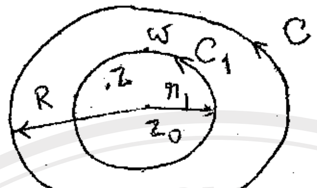
เรียกว่าอนุกรมของเทย์เลอร์ของ $f(z)$ รอบจุด z_0 และถ้า $z_0 = 0$ อนุกรมนี้เรียกว่า อนุกรมของแมคลอริน (Maclaurin's series) ของ $f(z)$

ทฤษฎีที่ 1 ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในวงกลม C ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด z_0 รัศมี R, z เป็นจุดใดๆ ใน C แล้วจะได้

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

พิสูจน์



รูปที่ 22

ให้ C_1 เป็นวงกลมภายใน C และมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ C, r_1 เป็นรัศมีของ C_1 โดยที่ $r_1 < R$

ให้ z เป็นจุดใดๆ ภายใน C_1 และ w เป็นจุดใดๆ บน C_1

โดยสูตรโคชีอินทิกรัลสำหรับคอนทัวร์ C_1

จะได้ $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$ ....(4.1)

กระจายฟังก์ชัน $\frac{1}{w - z}$ โดยพิจารณา

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w-z_0) - (z-z_0)}$$

$$= \frac{1}{(w-z_0)\left[1 - \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)\right]}$$

เพราะว่า $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}$ เมื่อ $x \neq 1$

ดังนั้น $\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0}\left[1 + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right) + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^2 + \ldots\ldots + \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^{n-1} + \ldots\ldots\right.$

$$\left.\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n}{\left\{1 - \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)\right\}}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.2)$$

แทน (4.2) ลงใน (4.1) จะได้

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z_0}dw + \frac{(z-z_0)}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw + \frac{(z-z_0)^2}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^3}dw$$

$$\cdots\cdots + \cdots\cdots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^n}dw + U_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4.3)$$

เมื่อ $U_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n f(w)}{(w-z_0)\left[1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)\right]}dw$

โดยใช้สูตรโคชีอินทริกรัล

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$$

จะได้ว่า $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots$

$$\cdots\cdots + \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{(n-1)} + U_n \quad \cdots\cdots (4.4)$$

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $\lim_{n\to\infty}|U_n| = 0$

ให้ $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| = r < 1$

$$\begin{aligned}|w-z| &= |(w-z_0) - (z-z_0)| \\ &\geq |w-z_0| - |z-z_0| \\ &\geq r_1 - |z-z_0|\end{aligned}$$

ให้ M เป็นจำนวนบวกซึ่ง $|f(w)| \leq M$

เพราะฉะนั้น $|U_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n f(w)}{w-z}dw\right|$

$$\leq \frac{1}{2\pi|i|}\oint_{C_1}\frac{\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|^n |f(w)|}{|w-z|}|dw|$$

$$< \frac{1}{2\pi}\left(\frac{r^n M}{r_1-|z-z_0|}\right)\times 2\pi R$$

แต่ $\gamma < 1$ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} \gamma^n \longrightarrow 0$

$$\lim_{n\to\infty} |U_n| = \lim_{n\to\infty} \gamma^n \left(\frac{M}{r_1 - |z-z_0|}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} |U_n| = 0$$

นั่นคือจาก (4.4) จะได้ว่า

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \dots\dots$$

หรือ $\quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$

ตัวอย่าง 1 จงกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์ของ $\log z$ รอบจุด $z = 1$

วิธีทำ อนุพันธ์ของ $\log z$ หาได้ตามลำดับดังนี้ $\frac{1}{z}, \frac{-1}{z^2}, \frac{2}{z^3}, \frac{-3\times 2}{z^4}, \dots\dots\dots$
ซึ่งเขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$\frac{d^n}{dz^n} \log z = (-1)^{n+1}(n-1)!\, z^{-n}$$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้นกระจาย $\log z$ รอบจุด $z = 1$ จะได้

$$\log z = 0 + (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \dots\dots\dots\dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$$

ตัวอย่าง 2 จงกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์ของ $\sin z$ รอบจุด $z = 0$

วิธีทำ อนุพันธ์ของ $\sin z$ หาได้ตามลำดับดังนี้

$\cos z, -\sin z, -\cos z, \sin z, \dots\dots\dots$

กระจาย $\sin z$ รอบจุด $z = 0$ จะได้

$$\sin z = \sin 0 + \cos 0(z-0) - \frac{\sin 0}{2!}(z-0)^2 - \frac{\cos 0}{3!}(z-0)^3 + \frac{\sin 0}{4!}(z-0)^4 + \dots\dots$$

$$= 0 + z - 0 - \frac{z^3}{3!} + 0 + \frac{z^5}{5!} - \dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

ในการกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์รอบจุด z_0 ของฟังก์ชัน $f(z)$ ที่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในวงกลม C นั้นรัศมีของ C ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า(converge) เรียกว่ารัศมีของการลู่เข้า(radius of convergence) หาได้จากระยะทางจากจุด z_0 ไปยังจุดเอกฐานของ $f(z)$ ที่อยู่ใกล้ z_0

เช่นเมื่อกระจาย $\log z$ รอบจุด $z = 1$ ในตัวอย่าง 1 นั้นรัศมีของการลู่เข้าคือ $|z - 1| < 1$

หรือกระจาย $\sin z$ รอบจุด $z = 0$ ในตัวอย่างที่ 2 รัศมีของการลู่เข้าคือ $|z| < \infty$ หรือทุกๆ ค่าของ z

<u>ตัวอย่างการกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์ที่นำไปใช้เสมอ</u>

ฟังก์ชัน	อนุกรมของเทย์เลอร์รอบจุด 0	z ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า
e^z	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$	ทุกค่าของ z
$\sin z$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$	ทุกค่าของ z
$\cos z$	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$	ทุกค่าของ z
$\log(1+z)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^m = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots$	$|z| < 1$
$(1+z)^p$ p เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} z^m$, (Binomial series) เมื่อ $\binom{p}{m} = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!} z^m$	$|z| < 1$

จะเข้าใกล้ 0 ถ้า p เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า n และ $\binom{p}{0} = 1$

<u>ตัวอย่าง 3</u> จงหาอนุกรมของเทย์เลอร์ของ $\sin z + i \cos z$ รอบจุด $z = 0$

<u>วิธีทำ</u> อนุกรมของเทย์เลอร์ของ $\sin z$ และ $\cos z$ รอบจุด $z = 0$ คือ

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

ดังนั้น $\sin z + i\cos z = i + z - \frac{iz^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{iz^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\cdots$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาอนุกรมของเทเลอร์ของ $\sin z \cos z$ รอบจุด $z = 0$

วิธีทำ $\sin z \cos z = (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots)(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\cdots)$

$$= z - (\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!})z^3 + (\frac{1}{5!} + \frac{1}{3!}\frac{1}{2!} + \frac{1}{4!})z^5 - \cdots\cdots\cdots$$

$$= z - \frac{4z^3}{3!} + \frac{16}{5!}z^5 - \frac{64}{7!}z^7 + \cdots\cdots\cdots$$

ข้อสังเกต การคูณอนุกรมของเทย์เลอร์รอบจุด $z = 0$ ทำได้ดังนี้

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\cdots)(b_0 + b_1 z^2 + b_2 z^2 + \cdots\cdots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)z + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)z^2 + \cdots\cdots\cdots$$

การกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์รอบจุด z ใดนั้นจะลู่เข้าเมื่อฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านของจุดนั้น สำหรับฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z ใดๆ เช่น $f(z) = \frac{1}{z}$ จะไม่สามารถกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์รอบจุด $z = 0$ ได้ ฟังก์ชันชนิดนี้มีวิธีการกระจายอีกแบบหนึ่งคือ การกระจายของโลรองต์(Laurent expansion) การกระจายของโลรองต์มีความสำคัญมากในการศึกษาเรื่องจุดเอกฐานของฟังก์ชัน และ การหาสูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน ซึ่งจะกล่าวในบทต่อไป

ทฤษฎีที่ 2 ทฤษฎีของโลรองต์ (Laurent 's Theorem)

ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ภายในและบนรูปวงแหวน R ซึ่งมีขอบเขต (bounded) ด้วยวงกลม 2 วงซ้อนกันคือ C_1 และ C_2 ซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกันที่จุด z_0 และรัศมี r_1 และ r_2 ตามลำดับโดยที่ $r_1 > r_2$ แล้วจะได้ว่า

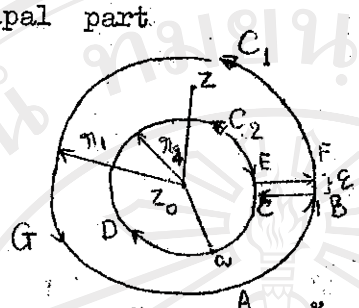
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

เมื่อ $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$ และ $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}\,dw \quad \text{และ} \quad n = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots$$

โดยที่ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ เรียกว่า Taylor part และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_{n}(z-z_0)^{-n}$
เรียกว่า Principal part

<u>พิสูจน์</u>



รูปที่ 23

ให้ w เป็นจุดบน C_2 ดังนั้นบน C_2 จะได้ $w-z_0 = r_2$

ให้ z เป็นจุดภายใน R ซึ่ง $z-z_0 = r$ เมื่อ $r_2 < r < r_1$

เนื่องจาก f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ภายในและบนรูปวงแหวน R และบน C_1, C_2 ดังนั้นจากสูตรโคชีอินทิกรัล

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\text{แต่} \quad \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = -\oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$$\text{เพราะฉะนั้น}\ f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \quad \ldots\ldots(4.5)$$

$$\text{พิจารณา}\ \frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-z_0)\left[1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{(w-z_0)} + \frac{z-z_0}{(w-z_0)^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(w-z_0)^n} + U_n$$

$$\text{ดังนั้น}\ \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw + \frac{(z-z_0)}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}\,dw$$

$$+\ldots\ldots+ \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^n}\,dw + U_n$$

จากทฤษฎีของเทย์เลอร์ จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} |U_n| = 0$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}$$

เมื่อ $a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z_0}dw$, $a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^2}dw$, ...,

$$a_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^n}\,dw \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4.6)$$

ต่อไปจะพิจารณา $-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-z_0)-(w-z_0)}$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)\left[1-\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)\right]}$$

ดังนั้น $-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(z-z_0)}\left[1 + \frac{w-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^{n-1} + W_n\right]$

เมื่อ $W_n = \frac{\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n}{(z-z_0)\left[1-\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)\right]} = \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \times \frac{1}{(z-w)}$

เพราะฉะนั้น

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z)}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{(z-z_0)}dw + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{(w-z_0)f(w)}{(z-z_0)^2}dw$$

$$+ \cdots\cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{(w-z_0)^{n-1}f(w)}{(z-z_0)^n}\,dw + V_n$$

$$= \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n} + V_n$$

เมื่อ $b_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(w)dw$, $b_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} (w-z_0)f(w)dw$,.........

......., $b_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} (w-z_0)^{n-1}f(w)dw$

และ $V_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n \times \frac{f(w)}{(z-z_0)}dw$

จะพิสูจน์ว่า $\lim_{n\to\infty}|V_n| = 0$

ให้ $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| = \lambda < 1$

พิจารณา $|z-w| = |z-z_0| - |w-z_0|$

$\geqslant |z-z_0| - r_2$

ให้ M เป็นจำนวนบวกซึ่ง $|f(w)| \leq M$

$$\lim_{n\to\infty}|V_n| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n f(w)}{(z-w)} dw\right|$$

$$< \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{\lambda^n M\, 2\pi r_2}{|z-z_0| - r_2}$$

แต่ $\lambda < 1$ จะได้ $\lim_{n\to\infty}\lambda^n \longrightarrow 0$

$$\lim_{n\to\infty}|V_n| = 0$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z)}dw = \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-3}}{(z-z_0)^3} + \cdots + \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n} \quad \ldots(4.7)$$

นำเอา (4.6) และ (4.7) ไปแทนค่าใน (4.5) จะได้

$$f(z) = \left[a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + a_3(z-z_0)^3 + \cdots + a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}\right]$$
$$+ \left[\frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-3}}{(z-z_0)^3} + \cdots + \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n}\right]$$

ดังนั้น $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n}$

เมื่อ $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$ และ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

เมื่อ $b_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw$ และ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่างที่ 5 จงกระจายอนุกรมของโลรองต์ของฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ รอบจุด $z = 0$ สำหรับอาณาบริเวณ $1 < |z| < 3$

วิธีทำ ฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับทุกๆ ค่าของ z ในวงแหวน $1<|z|<3$ จากทฤษฎีที่ 2 เมื่อ C_1 เป็นวงกลม $|z|<1$ และ C_2 เป็นวงกลม $|z|<3$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลาง $z_0=0$ ร่วมกัน อนุกรมของโลรองต์รอบจุด $z=0$ ของ $f(z)$ คือ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} z^{-n} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4.8)$$

เมื่อ $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}}dw$ และ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{w^{-n+1}}dw$ และ $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

ดังนั้นจะต้องหา a_n และ b_{-n}

ในที่นี้ $f(w) = \frac{1}{(w-1)(w-3)}$

นั่นคือ $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{1}{(w-1)(w-3)} \times \frac{1}{w^{n+1}}dw$

โดย Partial fraction $\frac{1}{(w-1)(w-3)w^{n+1}}$ จะได้

$$\frac{1}{(w-1)(w-3)w^{n+1}} = \frac{A_1}{w-1} + \frac{A_2}{w-3} + \frac{B_1}{w} + \frac{B_2}{w^2} + \cdots + \frac{B_{n+1}}{w^{n+1}} \qquad \ldots\ldots(4.9)$$

เมื่อ A_1, A_2 และ $B_i (i=1,2,3,\ldots,n+1)$ เป็นค่าคงตัว

เนื่องจาก C_2 เป็นวงกลม $|z|<3$ ดังนั้น $\frac{A_2}{w-3}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน C_2

ดังนั้นจากทฤษฎีของโคชีจะได้ $\oint_{C_2} \frac{A_2}{w-3}dw = 0$

จากสูตรโคชีอินทิกรัล $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ เมื่อ z_0 อยู่ใน C

จะได้ $$\oint_{C_1} \frac{B_2}{w^2}dw = 2\pi i \frac{d}{dz}B_2\Big]_{z=0} = 0$$

ในทำนองเดียวกัน $$\oint_{C_1} \frac{B_3}{w^3}dw = \oint_{C_1} \frac{B_4}{w^4}dw = \ldots\ldots = \oint_{C_1} \frac{B_{n+1}}{w^{n+1}}dw = 0$$

ดังนั้น $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{A_1}{w-1}dw + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{B_1}{w}dw$$

แต่จากสูตรโคชีอินทิกรัล $$\oint_{C_1} \frac{B_1}{w}dw = 2\pi i \times B_1$$

ดังนั้น $$a_n = A_1 + B_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4.10)$$

หา A_1 โดยคูณ(4.9)ด้วย $w-1$ จะได้

$$\frac{1}{(w-3)w^{n+1}} = A_1 + \frac{A_2(w-1)}{w-3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{B_{n+1}(w-1)}{w^{n+1}}$$

ให้ $w = 1$ จะได้ $A_1 = -\frac{1}{2}$

หา B_1 โดยหา A_2 ก่อนแล้วคูณ(4.9) ด้วย $w-3$ จะได้

$$\frac{1}{(w-1)w^{n+1}} = \frac{A_1(w-3)}{(w-1)} + A_2 + \frac{B_1(w-3)}{w} + \ldots\ldots + \frac{B_{n+1}}{w^{n+1}}(w-3)$$

ให้ $w = 3$ จะได้ $A_2 = \frac{1}{2\times 3^{n+1}}$

คูณ(4.9) ด้วย w จะได้

$$\frac{1}{(w-1)(w-3)w^n} = \frac{A_1}{w-1}\times w + \frac{A_2}{w-3}\times w + B_1 + \frac{B_2}{w} + \frac{B_3}{w^2} + \ldots\ldots + \frac{B_{n+1}}{w^m}$$

ให้ $w \longrightarrow \infty$ จะได้ $A_1 + A_2 + B_1 = 0$

$$B_1 = -A_1 - A_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 3^{n+1}}$$

แทน A_1 และ B_1 ลงใน (4.10) จะได้

$$a_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\times 3^{n+1}}$$

$$= -\frac{1}{2\times 3^{n+1}}$$

หา b_{-n} จาก $\quad b_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{dw}{(w-1)(w-3)w^{-n+1}}$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{\frac{w^{n-1}}{w-3}}{w-1}\,dw$$

เนื่องจากฟังก์ชัน $g(w) = \frac{w^{n-1}}{w-3}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในและบน C_2 ดังนั้นจากสูตรโคชีอินทิกรัล

$$\oint_{C_2}\frac{\frac{w^{n-1}}{w-3}}{w-1}\,dw = 2\pi i\times g(1)$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\pi i$$

ดังนั้น $\quad b_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\times(-\pi i) = -\frac{1}{2}$

แทน $a_n = -\frac{1}{2\times 3^{n+1}}$ และ $b_{-n} = -\frac{1}{2}$ ลงใน(4.8) จะได้อนุกรมของโลรองต์

$$f(z) = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \qquad \text{สำหรับ} \quad 1<|z|<3$$

จากตัวอย่างที่ 5 นี้จะเห็นว่าการกระจายอนุกรมของโลรองต์โดยใช้ทฤษฎีโดยตรงนั้นมีความยุ่งยากในการหา a_n และ b_{-n} จึงมีวิธีการกระจายซึ่งหลีกเลี่ยงการใช้ทฤษฎีโดยตรงโดยดัดแปลงฟังก์ชันที่จะกระจายอนุกรมของโลรองต์รอบจุด z_0 โดยเขียนอยู่ในเทอม $\quad f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$

เมื่อ $g(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0

ดังนั้นในการกระจายอนุกรมของโลรองต์ของ $f(z)$ รอบจุด z_0 สามารถอาศัยการกระจายอนุกรมของเทย์เลอร์ของ $g(z)$ รอบจุด z_0 เช่น จากตัวอย่าง 5 กระจาย $f(z)$ รอบจุด $z = 0$ สำหรับอาณาบริเวณ $1 < |z| < 3$ เมื่อ $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$

เพราะว่า $$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2(z-3)} = g_1(z) + g_2(z) \quad \ldots(4.11)$$

ทั้ง $g_1(z)$ และ $g_2(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 0$

จากอนุกรมของเทย์เลอร์ของ $\frac{1}{1-z}$ รอบจุด $z = 0$ ได้ว่า

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\ldots\ldots \quad \text{ซึ่งลู่เข้า สำหรับ } |z| < 1$$

ดังนั้น $$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\ldots \quad \text{จะลู่เข้าสำหรับ } \left|\frac{1}{z}\right| < 1 \text{ นั่นคือ } |z| > 1$$

และ $$\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = 1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots \quad \text{ลู่เข้าสำหรับ } \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \text{ นั่นคือ } |z| < 3$$

ดังนั้น $$\frac{1}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{2(1-z)} - \frac{1}{6(1-\frac{z}{3})}$$

$$= -\frac{1}{2z(1-\frac{1}{z})} - \frac{1}{6(1-\frac{z}{3})}$$

$$= -\frac{1}{2z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \ldots\ldots\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \ldots\ldots\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{z}{3^2} + \frac{z^2}{3^3} + \ldots\ldots\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} \quad \text{สำหรับ } 1 < |z| < 3$$

ตัวอย่าง 6 จงกระจายอนุกรมของโลรองต์ของ $e^{\frac{1}{z}}$ รอบจุด $z = 0$

วิธีทำ อนุกรมของเทย์เลอร์ของ e^w คือ

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots\cdots$$

ให้ $w = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ จะได้

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots\cdots$$

ตัวอย่าง 7 จงกระจายอนุกรมของโลรองต์ของ $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ รอบจุด $z = 1$

วิธีทำ ให้ $z - 1 = u$ จะได้ $z = 1 + u$

แล้ว
$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^{2+2u}}{u^3}$$
$$= \frac{e^2 x e^{2u}}{u^3}$$
$$= \frac{e^2}{u^3}\left\{1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \cdots\cdots\right\}$$

ดังนั้น
$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} = \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{(z-1)} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2(z-1)}{3} + \cdots\cdots$$

ตัวอย่าง 8 จงกระจายอนุกรมของโลรองต์ของ $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ รอบจุด $z = -2$

วิธีทำ ให้ $z + 2 = u$ แล้ว $z = u - 2$

จาก
$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{u-2}{(u-1)u}$$
$$= \frac{2-u}{u} x \frac{1}{1-u}$$
$$= \frac{2-u}{u}(1 + u + u^2 + u^3 + \cdots\cdots)$$
$$= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots\cdots$$

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + (z+2)^3 + \cdots\cdots\cdots$$

4.2 จุดเอกฐาน และ ซีโร่ (Singularities and Zeroes)

นิยาม 2 จุด z_0 จะเรียกว่าจุดเอกเทศ (Isolated singular point หรือ Isolated singularity) ของ $f(z)$ ถ้า $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 แต่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบางย่านจุดของ z_0 ซึ่งไม่รวมจุด z_0 (deleted neighborhood)

นิยาม 3 ในการกระจายฟังก์ชัน $f(z)$ รอบจุดเอกเทศนั้น จะได้อนุกรมของโลรองต์ ดังนี้

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

อนุกรมส่วนที่มีกำลังลบเรียกว่า ส่วนหลัก (principal part)

การแยกชนิดของ จุดเอกฐาน ออกเป็นแบบต่างๆ สามารถทำได้โดยพิจารณาจากลักษณะของส่วนหลัก 3 แบบ คือ

1. ถ้า b_{-n} เป็นศูนย์ทั้งหมด
2. ถ้า b_{-n} ที่ไม่เป็นศูนย์มีจำนวนจำกัด
3. ถ้า b_{-n} ที่ไม่เป็นศูนย์มีจำนวนอนันต์

แบบที่ 1 ถ้า $b_{-n} = 0$ เมื่อ $n = 1,2,3,4,\ldots\ldots$

อนุกรมของโลรองต์รอบจุด $z = z_0$ คืออนุกรมของเทย์เลอร์รอบจุด $z = z_0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{เมื่อ} \quad z \neq z_0$$

นั่นคือ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$

จุด $z = z_0$ เรียกว่า ภาวะเอกฐานที่ขจัดได้ (removable singularity)

ตัวอย่าง 9 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\frac{\sin z}{z}$ มีภาวะเอกฐานที่ขจัดได้ ที่จุด $z = 0$

วิธีทำ ฟังก์ชัน $\sin z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 0$ ดังนั้น

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots\cdots\cdots$$

นั่นคืออนุกรมของโลรองต์จะมี b_{-n} เป็นศูนย์หมด

ดังนั้น $\frac{\sin z}{z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ และ $\lim_{n \to 0} \sin z = 1 = a_0$

แบบที่ 2 ถ้า $b_{-n} = 0$ เมื่อ $n > m \geq 1$ นั่นคือให้ b_{-m} เป็นสัมประสิทธิ์ตัวสุดท้าย ที่ไม่เป็นศูนย์ จุด $z = z_0$ เรียกว่าโพลอันดับที่ m (pole of order m) ของ $f(z)$ ดังนั้น

$$f(z) = \frac{b_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots\cdots + \frac{b_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^m$$

ในกรณีที่ $m = 1$ จุด $z = z_0$ เรียกว่าโพลเชิงเดียว (simple pole) ของ $f(z)$

ตัวอย่างที่ 10 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\frac{e^z}{z^2}$ มีโพลอันดับที่สอง ที่จุด $z = 0$

วิธีทำ ฟังก์ชัน e^z เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 0$ ดังนั้นอนุกรมของโลรองต์ของ $\frac{e^z}{z^2}$ รอบจุด $z = 0$ คือ

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\right)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \cdots\cdots\cdots$$

นั่นคือ b_{-2} เป็นสัมประสิทธิ์ตัวสุดท้ายที่ไม่เป็นศูนย์

ดังนั้น $\frac{e^z}{z^2}$ มี โพลอันดับที่สอง ที่จุด $z = 0$

ตัวอย่างที่ 11 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\frac{e^z - 1}{z^2}$ มีโพลเชิงเดียวที่จุด $z = 0$

วิธีทำ ฟังก์ชัน $\frac{e^z - 1}{z^2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 0$ ดังนั้นอนุกรมของโลรองต์ของ $\frac{e^z - 1}{z^2}$ รอบจุด $z = 0$ คือ

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left\{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots - 1\right\}$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

นั่นคือ b_{-1} เป็นสัมประสิทธิ์ตัวสุดท้ายที่ไม่เป็นศูนย์

ดังนั้น $\frac{e^z - 1}{z^2}$ มีโพลเชิงเดียวที่จุด $z = 0$

<u>แบบที่ 3</u> ถ้าไม่มี b_{-n} เป็นศูนย์จำนวนอนันต์จุด $z = z_0$ เรียกว่า<u>ภาวะเอกฐานสาวัตถ์</u> (essential singularity) ของ $f(z)$

<u>ตัวอย่าง 12</u> จงแสดงว่าฟังก์ชัน e^{1/z^2} มีภาวะเอกฐานสาวัตถ์ ที่จุด $z = 0$

<u>วิธีทำ</u> ฟังก์ชัน e^w เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $w = 0$ กระจายอนุกรมของเทย์เลอร์รอบจุด $w = 0$ ได้ $e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots\cdots$

ให้ $w = \frac{1}{z^2}$ เมื่อ $z \neq 0$

ดังนั้น $e^{1/z^2} = 1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \frac{1}{3!z^6} + \cdots\cdots + \frac{1}{n!z^{2n}} + \cdots\cdots$

อนุกรมของโลรองต์นี้มี b_{-n} เป็นจำนวนอนันต์ ที่ไม่เป็นศูนย์

ดังนั้น e^{1/z^2} มี ภาวะเอกฐานสาวัตถ์ ที่จุด $z = 0$

<u>ทฤษฎีที่ 3</u> ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านของ z_0 ยกเว้นที่จุด $z = z_0$ ดังนั้น $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่ m ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน $p(z) = (z-z_0)^m f(z)$ มีภาวะเอกฐานที่ขจัดได้ ที่จุด $z = z_0$ และ $\lim_{z \to z_0} p(z) \neq 0$

<u>พิสูจน์</u> $\Rightarrow$ ให้ $f(z)$ มีโพลอันดับที่ m ที่จุด $z = z_0$

ดังนั้น $b_{-m} \neq 0$ และ $b_{-n} = 0$ เมื่อ $n > m$

และ $f(z) = \frac{b_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots\cdots + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

จากโจทย์ $p(z) = (z-z_0)^m f(z)$ เมื่อ $z \neq z_0$

$$p(z) = b_{-m} + b_{-m+1}(z-z_0) + \cdots\cdots + b_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^{n+m} \quad \ldots (4.12)$$

นั่นคือ $\lim_{z \to z_0} p(z) = b_{-m} \neq 0$

ตามนิยาม 2 แบบที่ 1 จะได้ว่า จาก (4.12) ,$p(z)$ มี ภาวะเอกฐานที่ขจัดได้ที่จุด $z = z_0$ เพราะไม่มีเทอมยกกำลังลบอยู่ในอนุกรม (b_{-n} เป็น 0 หมด)

$\Longleftarrow$ ถ้า $p(z) = (z-z_0)^m f(z)$ มีภาวะเอกฐานที่ขจัดได้ ที่จุด $z = z_0$

ให้ $\lim_{z\to z_0} p(z) = C_0 \neq 0$

อนุกรมของโลรองต์ของ $p(z)$ รอบจุด $z = z_0$ คือ

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

จากโจทย์ $p(z) = (z-z_0)^m f(z)$

ดังนั้น $$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^m \quad \text{.................}(4.13)$$

หารทั้งสองข้างด้วย $(z-z_0)^m$ และเขียน b_{-m+n} แทน C_n เมื่อ $n<m$ และเขียน a_{-n+m} แทน C_n เมื่อ $n \geq m$ ดังนั้น (4.13) จะเป็น

$$f(z) = \frac{b_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots\cdots + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

จะพบว่า $b_{-m} \neq 0$ เพราะว่าจากโจทย์ $C_0 \neq 0$ และเนื่องจาก $b_{-m}=C_0$

ดังนั้น $f(z)$ มีโพลอันดับที่ m ที่จุด $z = z_0$

<u>ตัวอย่าง 13</u> ฟังก์ชัน $f(z) = \dfrac{z^2+5}{(z+2i)(z-1)^3}$ มีโพลเชิงเดียวที่จุด $z = -2i$ และมีโพลอันดับที่ 3 ที่จุด $z = 1$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $p_1(z) = (z+2i)f(z)$

$p_2(z) = (z-1)^3 f(z)$

จะได้ $p_1(z) = \dfrac{z^2+5}{(z-1)^3}$ และ $p_2(z) = \dfrac{z^2+5}{z+2i}$

$p_1(z)$ และ $p_2(z)$ จะมีภาวะเอกฐานที่ขจัดได้ที่จุด $z = -2i$ และ $z= 1$ ตามลำดับ

และจะพบว่า $\lim_{z\to -2i} p_1(z) = \dfrac{1}{(-2i-1)^3} \neq 0$

และ $\lim_{z\to 1} p_2(z) = \dfrac{6}{1+2i} \neq 0$ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีที่ 3

<u>นิยาม 4</u> จุด z_0 เรียกว่า ซีโร่ (Zero) อันดับที่ m ของ f(z) ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 และมีอนุพันธ์อันดับที่ m-1 ลงมา ที่จุด z_0 เป็นศูนย์ทั้งหมด แต่ $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ นั่นคือ

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots\ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \qquad \text{แต่ } f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

จากนิยาม 3 จะเขียนฟังก์ชัน f(z) ได้ดังนี้

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \ldots\ldots$$

เมื่อ $$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

สำหรับ ซีโร่อันดับที่หนึ่ง เรียกว่า ซีโร่เชิงเดียว (Simple zero)

<u>ทฤษฎีที่ 4</u> ให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยมี p(z) และ q(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 และ $p(z_0) \neq 0$ ดังนั้น f(z) จะมีโพลอันดับที่ m ที่จุด $z = z_0$ ก็ต่อเมื่อ z_0 เป็นซีโร่อันดับที่ m ของ q(z) เท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> $\Longrightarrow$ จะแสดงว่า z_0 เป็นซีโร่ อันดับที่ m ของ q(z)

ถ้า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ มีโพลอันดับที่ m ที่จุด $z = z_0$

จาก $$f(z) = \frac{b_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{b_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \ldots\ldots + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

$$= (z-z_0)^{-m}\,\eta(z)$$

เมื่อ $$\eta(z) = b_{-m} + b_{-m+1}(z-z_0) + \ldots\ldots + b_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^{m+n}$$

$\eta(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ และ $\eta(z_0) \neq 0$

จากทฤษฎีที่ 3 จะได้ว่า $$\frac{p(z)}{q(z)} = (z-z_0)^{-m}\eta(z)$$

$$q(z) = (z-z_0)^m \frac{p(z)}{\eta(z)}$$

ดังนั้น $$q(z) = (z-z_0)^m \phi(z)$$

โดยที่ $$\phi(z) = \frac{p(z)}{\eta(z)}$$

เนื่องจาก $p(z)$ และ $\lambda(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ดังนั้น $\phi(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ด้วย นั่นคือ $q(z)$ มี ซีโร่อันดับที่ m ที่จุด $z = z_0$

$\Longleftarrow$ ถ้า z_0 เป็น ซีโร่อันดับที่ m ของ $q(z)$ จะแสดงว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่ m

เนื่องจาก
$$q(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots\cdots$$
$$= (z-z_0)^m\{a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \cdots\cdots\}$$
$$= (z-z_0)^m\psi(z)$$

โดยที่ $\psi(z) = a_m + a_{m+1}(z-z_0) + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.14)$

$\psi(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ และ $\psi(z) \neq 0$

จากโจทย์ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$

จาก (4.14) , $f(z) = \dfrac{p(z)}{(z-z_0)^m\psi(z)}$

ดังนั้น $(z-z_0)^m f(z) = r(z)$ เมื่อ $r(z) = \dfrac{p(z)}{\psi(z)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z=z_0$

จากโจทย์ $p(z_0) \neq 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} r(z) = \dfrac{p(z_0)}{\psi(z_0)} \neq 0$

แสดงว่า $r(z) = (z-z_0)^m f(z)$ มีภาวะเอกฐานที่ขจัดได้ที่จุด z_0

และจากทฤษฎีที่ 3 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่ m ที่จุด $z = z_0$

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการหาโพลของ $f(z)$ โดยการพิจารณาจากซีโร่ของ $q(z)$ ตามทฤษฎีที่ 4

<u>ตัวอย่าง 14</u> ให้ $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z-1)}$ จงหาชนิดของจุดเอกฐานของ $f(z)$ ที่จุด $z = 0$

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎีที่ 4 ให้ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$

ดังนั้นจะได้ $p(z) = 1$, $q(z) = z^3(z-1)$

ที่จุด $z = 0$, $q(0) = q'(0) = q''(0) = 0$ แต่ $q'''(0) \neq 0$
นั่นคือ $q(z)$ มี ซีโร่อันดับที่ 3 ที่จุด $z = 0$
จากทฤษฎีที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่ 3 ที่จุด $z = 0$

สำหรับชนิดของจุดเอกฐานของ $f(z)$ ที่จุด $z = \infty$ สามารถหาได้จากชนิดของจุดเอกฐานของ $f(\frac{1}{w})$ ที่ $w = 0$ เพราะเมื่อใช้ $z = \frac{1}{w}$ ค่าของ $f(\frac{1}{w})$ ที่ $w = 0$ จะสมนัย (correspondence)กับค่าของ $f(z)$ เมื่อ $z \to \infty$

<u>ตัวอย่าง 15</u> จงหา ซีโร่ และ โพล ของฟังก์ชันต่อไปนี้ในระนาบเชิงซ้อนที่รวมจุด ∞ (extended complex plane)

(1) $\dfrac{z-1}{z^2+3z+2}$

(2) $\dfrac{z^3+3z^2+3z+1}{z}$

<u>วิธีทำ</u> (1) ให้ $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2+3z+2}$

$f(z)$ มีซีโร่เมื่อ $\dfrac{z-1}{z^2+3z+2} = 0$

ค่าของ z ที่ทำให้ $\dfrac{z-1}{z^2+3z+2} = 0$ คือ $z = 1$ และ $z = \infty$

ดังนั้นซีโร่ของ $f(z)$ คือ $z = 1$ และ $z = \infty$

ให้ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$

นั่นคือ $p(z) = z - 1$, $q(z) = z^2 + 3z + 2$

แต่ $q(z)$ มีซีโร่เมื่อ $z = -1$ และ -2

ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่หนึ่งที่จุด $z = -1$ และ $z = -2$

(2) ให้ $f(z) = \dfrac{z^3+3z^2+3z+1}{z}$

ค่าของ z ที่ทำให้ $f(z) = 0$ คือ $z = -1$

ดังนั้น ซีโร่ของ $f(z)$ คือ -1

ให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$

นั่นคือ $q(z) = z$

ฟังก์ชัน $q(z)$ มีซีโร่ เมื่อ $z = 0$

เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลที่จุด $z = 0$

พิจารณาโพลที่ ∞ , ให้ $z = \frac{1}{w}$

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w^3} + \frac{3}{w^2} + \frac{3}{w} + 1}{\frac{1}{w}}$$

$$= \frac{1}{w^2} + \frac{3}{w} + 3 + w$$

จะได้ว่า $f\left(\frac{1}{w}\right)$ มีโพลอันดับที่ 2 ที่จุด $w = 0$

นั่นคือ $f(z)$ มีโพลอันดับที่ 2 ที่จุด $z = \infty$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $f(z)$ มีโพลที่จุด $z = 0 , \infty$

....