บทที่ 5

การหาสูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน

(Residue Formula of Complex Rational Function)

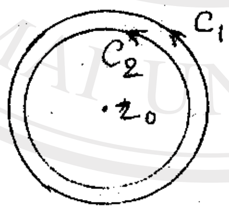
การหาสูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน ก็เพื่อจะนำไปหาค่าเรซิดิว แล้วจึงนำเอาค่าเรซิดิวที่หาได้ไปใช้ในการหาอินทิกรัลของ $\oint_C f(z)dz$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว และ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ภายในและบน C ยกเว้นที่จุดเอกเทศ (Isolated singularrity) z_0 ภายใน C จากนิยาม 3 บทที่ 4 อนุกรมของโลรองต์ f(z) รอบจุด $z = z_0$ คือ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

เมื่อ $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw$ และ $n = 0,1,2,3,\ldots\ldots$

$b_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{-n+1}}dw$ และ $n = 1,2,3,4,\ldots\ldots$

ถ้า C_2 เป็นวงกลมภายใน C_1 ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด z_0 จากทฤษฎีที่ 2 บทที่ 3 จะได้ว่า $\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$



รูปที่ 24

จากสูตร b_{-n} เมื่อ $n = 1$ จะได้

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(w)dw = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)dz$$

ดังนั้น $\oint_{C_2} f(z)dz = 2\pi i \times b_{-1}$

จะเห็นว่าอินทิกรัลของ $f(z)$ บน C ซึ่งล้อมรอบจุดเอกเทศที่ $z = z_0$ มีความสัมพันธ์กับสัมประสิทธิ์ b_{-1} ของการกระจายอนุกรมของโลรองต์ของ $f(z)$ รอบจุด $z = z_0$ ดังนั้นต่อไปนี้จะศึกษาวิธีการหาสัมประสิทธิ์ b_{-1} เพื่อนำไปหา $\oint_C f(z)dz$

<u>นิยาม 1</u> ถ้า $f(z)$ มีจุดเอกเทศ (Isolated singularity) ที่จุด $z = z_0$ และ $f(z)$ กระจายเป็นอนุกรมของโลรองต์ในวงแหวน $r_2 < |z| < r_1$ ได้ว่า

$$f(z) = \cdots + \frac{b_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

แล้วจะเรียกสัมประสิทธิ์ b_{-1} ของ $\frac{1}{z-z_0}$ ว่าเป็นค่าเรซิดิว (Residue) ของ $f(z)$ ณ จุด z_0 เขียนแทนด้วย $\text{Res}(f(z),z_0)$ หรือ $\text{Res}(z_0)$

<u>ตัวอย่าง 1</u> จงหาค่าเรซิดิวของ $f(z) = z.e^{3/z}$ ที่จุด $z = 0$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 4$

<u>วิธีทำ</u> กระจายอนุกรมโลรองต์ของฟังก์ชัน $z.e^{3/z}$ รอบจุด $z = 0$ จะได้ดังนี้

$$z.e^{3/z} = z\left\{1 + \frac{3}{z} + \left(\frac{3}{z}\right)^2 \times \frac{1}{2!} + \left(\frac{3}{z}\right)^3 \times \frac{1}{3!} + \cdots\cdots\right\}$$

$$= z + 3 + \frac{3^2}{2!\,z} + \frac{3^3}{3!\,z^2} + \cdots\cdots$$

จากนิยาม 1 จะได้ว่า $\text{Res}(f(z),0) = \frac{9}{2}$

<u>ทฤษฎีที่ 1</u> ถ้า $f(z)$ มีโพลเชิงเดียว (Simple pole) ที่จุด $z = z_0$ จะได้ว่า

$$\text{Res}(f(z),z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5.1)$$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $f(z)$ มีโพลเชิงเดียวที่จุด $z = z_0$

ดังนั้น $f(z) = \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots\cdots$

$$(z-z_0)f(z) = b_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + a_2(z-z_0)^3 + \cdots\cdots$$

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z) = b_{-1}$$

ดังนั้นจากนิยาม 1 จะได้ $\text{Res}(f(z),z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0)f(z)$

ตัวอย่าง 2 จงหาค่าเรซิดิวของ $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$ ที่จุด $z = 0$ และ $z = -1$

วิธีทำ $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$ มีโพลเชิงเดียวที่จุด $z = 0$ และ $z = -1$

จากทฤษฎีที่ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} Res(0) &= \lim_{z\to 0} zf(z) \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} Res(-1) &= \lim_{z\to -1} (z+1)f(z) \\ &= \lim_{z\to -1} e^z \\ &= e^{-1} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

ทฤษฎีที่ 2 ถ้า $f(z)=\frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0)= 0$, $q'(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0)\neq 0$ แล้วฟังก์ชัน $f(z)$ จะมีโพลเชิงเดียว (simple pole) ที่จุด $z = z_0$ และค่าเรซิดิว (Residue) ของ $f(z)$ ที่จุด z_0 จะมีค่าเท่ากับ $\frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$ .....(5.2)

พิสูจน์ กำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z_0) \neq 0$ และ $q(z_0)= 0$ แต่ $q'(z_0) \neq 0$

แสดงว่า $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่ 1 ที่ $z = z_0$

ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 4 บทที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลเชิงเดียว

จาก $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$

กระจายฟังก์ชันวิเคราะห์ $p(z)$ และ $q(z)$ โดยใช้อนุกรมของเทย์เลอร์

$$f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots\cdots\cdots}{q'(z_0)(z-z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{q'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\cdots\cdots}$$

เอา $(z-z_0)$ คูณตลอด

$$(z-z_0)f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots\cdots\cdots}{q'(z_0) + \frac{q''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{q'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\cdots\cdots}$$

$$\therefore \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

จาก(5.1) จะได้ $\quad \text{Res}(f(z),z_0) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$

ทฤษฎีที่ 3 ถ้า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = 0$ แต่ $q''(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$ แล้ว $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่สองที่จุด $z = z_0$ และค่าเรซิดิวของ $f(z)$ คือ

$$\text{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{2!}{q''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \frac{q''(z_0)}{2!} & p(z_0) \\ \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots(5.3)$$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z_0) \neq 0$ และ $q(z_0) = q'(z_0) = 0$ แต่ $q''(z_0) \neq 0$ แสดงว่า $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่สอง ที่ $z = z_0$
ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 4 บทที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สอง
กระจายฟังก์ชันวิเคราะห์ $p(z)$ และ $q(z)$ โดยใช้อนุกรมของเทย์เลอร์

$$f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots}{\frac{q''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{q'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{q^{IV}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \cdots}$$

ในการกระจาย$f(z)$ แบบอนุกรมของโลรองต์นั้น ถ้า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สอง

จะได้ว่า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$

จาก $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$

$p(z) = q(z)f(z)$

$$p(z) = \left[\frac{q''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{q'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\right]\left[\frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\right]$$

$$p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots$$
$$= \left[\frac{q''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{q'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{q^{IV}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \cdots\right]\left[\frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\right]$$

นั่นคือ $p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots$

$$= b_{-2}\frac{q''(z_0)}{2!} + \left[b_{-2}\frac{q'''(z_0)}{3!} + b_{-1}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right](z-z_0) + \cdots$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า

$$b_{-2}\frac{q''(z_0)}{2!} = p(z_0)$$

$$b_{-2} = \frac{2!}{q''(z_0)} \times p(z_0)$$

และ $\frac{b_{-2}q'''(z_0)}{3!} + \frac{b_{-1}q''(z_0)}{2!} = p'(z_0)$

$$\frac{b_{-1}q''(z_0)}{2!} = p'(z_0) - \frac{b_{-2}q'''(z_0)}{3!}$$

$$= p'(z_0) - \frac{2!}{q''(z_0)} \times \frac{q'''(z_0)}{3!}p(z_0)$$

$$b_{-1} = \frac{2!}{q''(z_0)}p'(z_0) - \left[\frac{2!}{q''(z_0)}\right]^2 \frac{q'''(z_0)}{3!}p(z_0)$$

$$b_{-1} = \left[\frac{2!}{q''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \frac{q''(z_0)}{2!} & p(z_0) \\ \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \end{vmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{2!}{q''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \frac{q''(z_0)}{2!} & p(z_0) \\ \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \end{vmatrix}$

ทฤษฎีที่ 4 ถ้า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = 0$ แต่ $q'''(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$ แล้ว $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่สาม ที่จุด $z = z_0$ และค่าเรซิดิวของ $f(z)$ คือ

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{q'''(z_0)}{3!} & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots(5.4)$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z_0) \neq 0$ และ $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = 0$ แต่ $q'''(z_0) \neq 0$

แสดงว่า $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่สามที่จุด $z = z_0$
ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 4 บทที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สาม
กระจายฟังก์ชันวิเคราะห์ $p(z)$ และ $q(z)$ โดยใช้อนุกรมของเทย์เลอร์

$$f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \cdots}{\frac{q'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{q^{IV}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \frac{q^{V}(z_0)}{5!}(z-z_0)^5 + \cdots}$$

ในการกระจาย $f(z)$ แบบอนุกรมของโลรองต์นั้น ถ้า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สาม
จะได้ว่า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{b_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$

$$\text{จาก } f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$p(z) = q(z)f(z)$$

$$p(z) = \left\{\frac{q'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{q^{IV}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \frac{q^{V}(z_0)}{5!}(z-z_0)^5 + \cdots\right\}\left\{\frac{b_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\right\}$$

$$p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots$$

$$= b_{-3}\frac{q'''(z_0)}{3!} + \left[b_{-3}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} + b_{-2}\frac{q'''(z_0)}{3!}\right](z-z_0) + \left[b_{-3}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} + b_{-2}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} + b_{-1}\frac{q'''(z_0)}{3!}\right](z-z_0)^2 + \cdots$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ว่า

$$b_{-3}\frac{q'''(z_0)}{3!} = p(z_0)$$

$$b_{-3} = 3! \times \frac{p(z_0)}{q'''(z_0)}$$

$$b_{-3}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} + b_{-2}\frac{q'''(z_0)}{3!} = p'(z_0)$$

$$b_{-2}\frac{q'''(z_0)}{3!} = p''(z_0) - b_{-3}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}$$

$$= p'(z_0) - \frac{3!}{4!}p(z_0)\frac{q^{IV}(z_0)}{q'''(z_0)}$$

$$b_{-2} = 3!\frac{p''(z_0)}{q'''(z_0)} - \frac{(3!)^2}{4!}p(z_0)\times\frac{q^{IV}(z_0)}{\left[q'''(z_0)\right]^2}$$

$$b_{-3}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} + b_{-2}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} + b_{-1}\frac{q'''(z_0)}{3!} = \frac{p''(z_0)}{2!}$$

$$b_{-1}\frac{q'''(z_0)}{3!} = \frac{p''(z_0)}{2!} - b_{-3}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} - b_{-2}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}$$

$$b_{-1}\frac{q'''(z_0)}{3!} = \frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{3!}{q'''(z_0)}\times\frac{q^{V}(z_0)p(z_0)}{5!} - \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\times p''(z_0) - \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2\frac{q^{IV}(z_0)p(z_0)}{4!}\right]\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}$$

$$= \frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{3!}{q'''(z_0)}\times\frac{q^{V}(z_0)p(z_0)}{5!} - \frac{3!}{q'''(z_0)}\times\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\times p''(z_0) + \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2\times\left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2\times p(z_0)$$

$$= \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2\left\{\left[\frac{q'''(z_0)}{3!}\right]^2\frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{q'''(z_0)}{3!}\times\frac{q^{V}(z_0)p(z_0)}{5!} - \frac{q'''(z_0)}{3!}\times\frac{q^{IV}(z_0)p'(z_0)}{4!} + \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2 p(z_0)\right\}$$

$$= \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2\left\{\left[\frac{q'''(z_0)}{3!}\right]^2\times\frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{q'''(z_0)}{3!}\times\frac{q^{IV}(z_0)p'(z_0)}{4!} + \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2 p(z_0) - \frac{q'''(z_0)}{3!}\times\frac{q^{V}(z_0)p(z_0)}{5!}\right\}$$

$$= \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2 \left\{ \frac{q'''(z_0)}{3!} \begin{vmatrix} \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix} - \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \frac{q'''(z_0)}{3!} & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

$$b_{-1} = \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{q'''(z_0)}{3!} & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

$$\therefore\ b_{-1} = \operatorname{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{q'''(z_0)}{3!} & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

<u>ทฤษฎีที่ 5</u> ถ้า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = q'''(z_0) = 0$ แต่ $q^{IV}(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$ แล้ว $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่สี่ที่จุด $z = z_0$ และค่าเรซิดิวของ $f(z)$ คือ

$$\operatorname{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^4 \begin{vmatrix} \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} \qquad \ldots(5.5)$$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z_0) \neq 0$ และ $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = q'''(z_0) = 0$ แต่ $q^{IV}(z_0) \neq 0$

แสดงว่า $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่สี่ ที่จุด $z = z_0$

ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 4 บทที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สี่

กระจายฟังก์ชันวิเคราะห์ $p(z)$ และ $q(z)$ โดยใช้อนุกรมของเทย์เลอร์

$$f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\cdots}{\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \frac{q^{V}(z_0)}{5!}(z-z_0)^5 + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}(z-z_0)^6 + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}(z-z_0)^7 + \cdots\cdots}$$

ในการกระจาย $f(z)$ แบบอนุกรมของโลรองต์นั้นถ้า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สี่จะได้ว่า

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{b_{-4}}{(z-z_0)^4} + \frac{b_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\cdots$$

จาก $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$

$$p(z) = q(z)f(z)$$

$$p(z) = \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \frac{q^{V}(z_0)}{5!}(z-z_0)^5 + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}(z-z_0)^6 + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}(z-z_0)^7 + \cdots\right.$$

$$\left.\cdots\right]\left[\frac{b_{-4}}{(z-z_0)^4} + \frac{b_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\cdots\right]$$

$$p(z_0) + p(z_0)(z-z_0) + \frac{p^{//}(z_0)}{2}(z-z_0)^2 + \frac{p^{///}(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\cdots$$

$$= b_{-4}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} + \left[b_{-4}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} + b_{-3}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right](z-z_0) + \left[b_{-4}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + \right.$$

$$\left. b_{-3}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} + b_{-2}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right](z-z_0)^2 + \left[b_{-4}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} + b_{-3}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + \right.$$

$$\left. b_{-2}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} + b_{-1}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right](z-z_0)^3 + \cdots\cdots$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$b_{-4}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} = p(z_0)$$

$$b_{-4} = \frac{4!}{q^{IV}(z_0)} \times p(z_0)$$

$$b_{-4}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} + b_{-3}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} = p^{/}(z_0)$$

$$b_{-3}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} = p^{/}(z_0) - b_{-4}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}$$

$$= p^{/}(z_0) - \frac{4!}{q^{IV}(z_0)} \times \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times p(z_0)$$

$$b_{-3} = \frac{4!}{q^{IV}(z_0)} \times p^{/}(z_0) - \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{V}(z_0)}{5!} p(z_0)$$

$$b_{-4}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-3}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} + b_{-2}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} = \frac{p^{//}(z_0)}{2!}$$

$$b_{-2}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} = \frac{p''(z_0)}{2!} - b_{-4}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} - b_{-3}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}$$

$$= \frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times\frac{q^{VI}(z_0)p(z_0)}{6!} - \left\{\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times p'(z_0) - \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^2\times\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times p(z_0)\right\}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}$$

$$= \frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times\frac{q^{VI}(z_0)p(z_0)}{6!} - \frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times p'(z_0) + \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 p(z_0)$$

$$b_{-2} = \frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times\frac{p''(z_0)}{2!} - \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^2\times\frac{q^{VI}(z_0)p(z_0)}{6!} - \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^2\times\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times p''(z_0) + \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^3\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 p(z_0)$$

$$b_{-4}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} + b_{-3}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-2}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} + b_{-1}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} = \frac{p'''(z_0)}{3!}$$

$$b_{-1}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} = \frac{p'''(z_0)}{3!} - b_{-4}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} - b_{-3}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} - b_{-2}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}$$

$$= \frac{p'''(z_0)}{3!} - \frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times\frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!} - \frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times\frac{q^{VI}(z_0)p''(z_0)}{6!}$$
$$+ \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^2\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\times p(z_0) - \frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{p''(z_0)}{2!}$$
$$+ \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^2\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)p(z_0)}{6!} + \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\times\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times p''(z_0)$$

$$- \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)} \times \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3 p(z_0)$$

$$b_{-1}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} = \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^3 \left\{\left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^3 \frac{p'''(z_0)}{3!} - \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2 \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \times p(z_0)\right.$$

$$- \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2 \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times p'(z_0) + \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} \times \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{VI}(z_0)\, p(z_0)}{6!}$$

$$- \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2 \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{p''(z_0)}{2!} + \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} \times \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{VI}(z_0)\, p(z_0)}{6!}$$

$$\left. + \frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 p'(z_0) - \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3 p(z_0)\right\}$$

$$b_{-1}\left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^4 = \left\{\left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^3 \frac{p'''(z_0)}{3!} - \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2 \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{p''(z_0)}{2!} +\right.$$

$$\left. \frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 p'(z_0) - \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2 \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times p'(z_0)\right\} -$$

$$\left\{\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3 p(z_0) - \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} \times \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times p(z_0)\right\} +$$

$$\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} \times \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times p(z_0) - \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2 \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \times p(z_0)$$

$$= \left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]\left[\left\{\left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^2 \frac{p'''(z_0)}{3!} - \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} \times \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{p''(z_0)}{2!}\right\} -\right.$$

$$\left. \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\left\{- \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times p'(z_0)\right\} + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\left\{- \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} \times p'(z_0)\right\}\right]$$

$$-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\left\{0+\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^{2}\times p(z_0)-\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\times p(z_0)\right\}+$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\left\{0+\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}p(z_0)+0\right\}-\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\left\{0-\left[\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\right]^{2}\times p(z_0)+0\right\}$$

$$=\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\left\{\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\begin{vmatrix}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!}\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix}-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix}0 & p'(z_0)\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix}0 & p'(z_0)\\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!}\end{vmatrix}\right\}-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\left\{0\begin{vmatrix}\frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!}\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix}+\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!}\end{vmatrix}\right\}$$

$$+\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\left\{0\begin{vmatrix}0 & p'(z_0)\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix}-\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.+\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ 0 & p'(z_0)\end{vmatrix}\right\}-\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\left\{0\begin{vmatrix}0 & p'(z_0)\\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left.-\frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!}\end{vmatrix}+\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ 0 & p'(z_0)\end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{q^{IV}(z_0)}{4!}\begin{vmatrix} \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & p^{/}(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p^{//}(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{///}(z_0)}{3!} \end{vmatrix} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p^{//}(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{///}(z_0)}{3!} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & p^{/}(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{///}(z_0)}{3!} \end{vmatrix} - \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & p^{/}(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p^{//}(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & p^{//}(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p^{//}(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{///}(z_0)}{3!} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{Res}(f(z),z_0) = b_{-1} = \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^4 \begin{vmatrix} \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & p^{/}(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p^{//}(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{///}(z_0)}{3!} \end{vmatrix}$$

<u>ทฤษฎีที่ 6</u> ถ้า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = q'''(z_0)$ $q^{IV}(z_0) = 0$ แต่ $q^{V}(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$ แล้ว $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่ห้าที่จุด $z = z_0$ และค่าเรซิดิวคือ

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^5 \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{IX}(z_0)}{9!} & \frac{q\ (z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} \quad ....(5.7)$$

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z_0) \neq 0$ และ $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = q'''(z_0) =$ $q^{IV}(z_0) = 0$ แต่ $q^{V}(z_0) \neq 0$

แสดงว่า $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่ห้า ที่จุด $z = z_0$

ดังนั้นจากทฤษฎี 4 บทที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่ห้า

กระจายฟังก์ชันวิเคราะห์ $p(z)$ และ $q(z)$ โดยใช้อนุกรมของเทย์เลอร์

$$f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\cdots}{\frac{q^{V}(z_0)}{5!}(z-z_0)^5 + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}(z-z_0)^6 + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}(z-z_0)^7 + \cdots\cdots}$$

ในการกระจาย f(z) แบบอนุกรมของโลรองต์นั้น ถ้า f(z) มีโพลอันดับที่ห้า จะได้ว่า

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{b_{-5}}{(z-z_0)^5} + \frac{b_{-4}}{(z-z_0)^4} + \frac{b_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + \cdots\cdots$$

จาก $\quad f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$

$$p(z) = q(z)f(z)$$

$$p(z) = \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}(z-z_0)^5 + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}(z-z_0)^6 + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}(z-z_0)^7 + \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}(z-z_0)^8 + \cdots\right.$$
$$\left.\frac{q^{IX}(z_0)}{9!}(z-z_0)^9 + \cdots\cdots\right]\left[\frac{b_{-5}}{(z-z_0)^5} + \frac{b_{-4}}{(z-z_0)^4} + \frac{b_{-3}}{(z-z_0)^3} + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \right.$$
$$\left.\frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\cdots\right]$$

$$p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \frac{p^{IV}(z_0)}{4!}(z-z_0)^4 + \cdots$$
$$= b_{-5}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} + \left[b_{-5}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-4}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right](z-z_0) + \left[b_{-5}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} + \right.$$
$$\left. b_{-4}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-3}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right](z-z_0)^2 + \left[b_{-5}\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} + b_{-4}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} + \right.$$
$$\left. b_{-3}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-2}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right](z-z_0)^3 + \left[b_{-5}\frac{q^{IX}(z_0)}{9!} + b_{-4}\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} + \right.$$
$$\left. b_{-3}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} + b_{-2}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-1}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right](z-z_0)^4 + \cdots\cdots$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า

$$b_{-5}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} = p(z_0)$$

$$b_{-5} = \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times p(z_0)$$

$$b_{-5}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-4}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} = p'(z_0)$$

$$b_{-4}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} = p''(z_0) - b_{-5}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}$$

$$= p'(z_0) - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}p(z_0)$$

$$b_{-4} = \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times p''(z_0) - \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \frac{q^{VI}(z_0) \times p(z_0)}{6!}$$

$$b_{-5}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} + b_{-4}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-3}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} = \frac{p''(z_0)}{2!}$$

$$b_{-3}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} = \frac{p''(z_0)}{2!} - b_{-5}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} - b_{-4}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}$$

$$= \frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!} - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)p'(z_0)}{6!} +$$

$$\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 p(z_0)$$

$$b_{-3} = \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{p''(z_0)}{2!} - \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!} -$$

$$\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)p'(z_0)}{6!} + \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^3 \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 p(z_0)$$

$$b_{-5}\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} + b_{-4}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} + b_{-3}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-2}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} = \frac{p'''(z_0)}{3!}$$

$$b_{-2}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} = \frac{p'''(z_0)}{3!} - b_{-5}\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} - b_{-4}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} - b_{-3}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}$$

$$= \frac{p'''(z_0)}{3!} - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VIII}(z_0) \times p(z_0)}{8!} - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \times p'(z_0)$$

$$+\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!} - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{p''(z_0)}{2!}$$

$$+\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!} + \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \times p'(z_0) -$$

$$\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^3 \times p(z_0)$$

$$b_{-2} = \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{p'''(z_0)}{3!} - \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{VIII}(z_0)p(z_0)}{8!} - \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{VII}(z_0) \times p'(z_0)}{7!}$$

$$+\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^3 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!} - \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{p''(z_0)}{2!} +$$

$$\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^3 \times \frac{q^{VII}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!} + \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^3 \times \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \times p'(z_0) -$$

$$\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^4 \times \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^3 \times p(z_0)$$

$$b_{-5}\frac{q^{IX}(z_0)}{9!} + b_{-4}\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} + b_{-3}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} + b_{-2}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} + b_{-1}\frac{q^{V}(z_0)}{5!}$$

$$= \frac{p^{IV}(z_0)}{4!}$$

$$b_{-1}\frac{q^{V}(z_0)}{5!} = \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} - b_{-5}\frac{q^{IX}(z_0)}{9!} - b_{-4}\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} - b_{-3}\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} -$$

$$b_{-2}\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}$$

$$= \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{IX}(z_0)p(z_0)}{9!} - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VIII}(z_0) \times p'(z_0)}{8!} +$$

$$\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VIII}(z_0)p(z_0)}{8!} - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \times \frac{p''(z_0)}{2!} +$$

$$\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \left[\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\right]^2 p(z_0) + \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \times p'(z_0) -$$

$$\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^3 \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!} - \frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{p'''(z_0)}{3!} +$$

$$\left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^2 \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VIII}(z_0)p(z_0)}{8!} + \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right] \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} p'(z_0)$$

$$- \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^3 \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!} + \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{p''(z_0)}{2!}$$

$$- \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^3 \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \frac{q^{VIII}(z_0)p(z_0)}{7!} - \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^3 p'(z_0)$$

$$+ \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^4 p(z_0)$$

$$b_{-1} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} = \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^4 \left\{ \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^4 \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} - \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3 \frac{q^{IX}(z_0) \times p(z_0)}{9!} - \right.$$

$$\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3 \times \frac{q^{VIII}(z_0)p^{\prime}(z_0)}{8!} + \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} \times p(z_0) -$$

$$\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3 \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \times \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!} + \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\right]^2 \times p(z_0) +$$

$$\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} p^{\prime}(z_0) - \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!}$$

$$- \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{p^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!} + \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} \times p(z_0) +$$

$$\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} p^{\prime}(z_0) - \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!}$$

$$+ \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{q^{VII}(z_0)p(z_0)}{7!}$$

$$- \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^3 \times p^{\prime}(z_0) + \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^4 \times p(z_0) \Bigg\}$$

b) $$-\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^5 = \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^4 \times \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} - \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{p^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!} +$$

$$\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!} - \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3 \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \times \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!} -$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!} \times \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^3 \times p^{\prime}(z_0) + \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \times p^{\prime}(z_0) +$$

$$\left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{\mathrm{VII}}(z_0)}{7!} \times p'(z_0) - \left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!}\right]^3 \times \frac{q^{\mathrm{VIII}}(z_0)\,p'(z_0)}{8!} +$$

$$\left[\frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!}\right]^4 \times p(z_0) - \frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!} \times \left[\frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{q^{\mathrm{VII}}(z_0)}{7!} \times p(z_0) -$$

$$\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!} \times \left[\frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{q^{\mathrm{VII}}(z_0)\,p(z_0)}{7!} + \left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{\mathrm{VIII}}(z_0)}{8!} \times p(z_0)$$

$$- \frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!} \times \left[\frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{q^{\mathrm{VII}}(z_0)\,p(z_0)}{7!} + \left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{\mathrm{VII}}(z_0)}{7!}\right]^2 \times p(z_0) +$$

$$\left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{\mathrm{VIII}}(z_0)}{8!}\,p(z_0) - \left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!}\right]^3 \times \frac{q^{\mathrm{IX}}(z_0)}{9!} \times p(z_0)$$

$$= \frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!} \left\{ \left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!}\right]^3 \times \frac{p^{\mathrm{IV}}(z_0)}{4!} - \left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!} \times \frac{p'''(z_0)}{3!} + \right.$$

$$\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!} \times \left[\frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!}\right]^2 \times \frac{p''(z_0)}{2!} - \left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{\mathrm{VII}}(z_0)}{7!} \times \frac{p''(z_0)}{2!} -$$

$$\left[\frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!}\right]^3 \times p'(z_0) + \frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{\mathrm{VII}}(z_0)}{7!} \times p'(z_0) +$$

$$\left. \frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{\mathrm{VII}}(z_0)}{7!} \times p'(z_0) - \left[\frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!}\right]^2 \times \frac{q^{\mathrm{VIII}}(z_0)}{8!} \times p'(z_0) \right\} -$$

$$\frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!} \left\{ - \left[\frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!}\right]^3 \times p(z_0) + \frac{q^{\mathrm{V}}(z_0)}{5!} \times \frac{q^{\mathrm{VI}}(z_0)}{6!} \times \frac{q^{\mathrm{VII}}(z_0)}{7!} \times p(z_0) + \right.$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times p(z_0) - \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\times p(z_0)\Bigg\} +$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\left\{-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2\times p(z_0) + \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\,p(z_0)\right\}$$

$$-\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\left\{-\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\,p(z_0)\right\} - \frac{q^{IX}(z_0)}{9!}\times\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3\times p(z_0)$$

$$= \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\left\{\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\left\{\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times\frac{p^{IV}(z_0)}{4!} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\times\frac{p'''(z_0)}{3!}\right.\right.$$

$$\left. + \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2\times\frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times\frac{p''(z_0)}{2!}\right\} -$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\left\{\left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2\times p'(z_0) - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times p'(z_0)\right\} +$$

$$\left.\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\,p'(z_0) - \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\times\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times p'(z_0)\right\} -$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\left\{-\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\left\{\left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2\times p(z_0) - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times p(z_0)\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\times p(z_0) - \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\times\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times p(z_0)\right\} +$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\left\{-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\left\{\left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2 p(z_0) - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times p(z_0)\right\}\right\} -$$

$$\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\Big\{-\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times\frac{q^{VI}(z_0)p(z_0)}{6!}\Big\} - \frac{q^{IX}(z_0)}{9!}\times\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^3\times p(z_0)$$

$$= \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\Big[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\Big\{\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times\frac{p^{IV}(z_0)}{4!} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\times\frac{p'''(z_0)}{3!} +$$

$$\left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2\times\frac{p''(z_0)}{2!} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times\frac{p''(z_0)}{2!}\Big\} -$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\Big\{0 + \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2\times p'(z_0) - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times p'(z_0)\Big\} +$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\Big\{0 + \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\times p'(z_0) + 0\Big\} - \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\Big\{0 +$$

$$\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times p'(z_0) + 0\Big\}\Big] - \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\Big[\{0\} - \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\Big\{0 +$$

$$\left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2\times p(z_0) - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times p(z_0)\Big\} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\Big\{0 +$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\times p(z_0) + 0\Big\} - \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\Big\{0 + \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2\times p(z_0) + 0\Big\}\Big]$$

$$+ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\Big[\{0\} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\Big\{0 - \left[\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\right]^2\times p(z_0) -$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\times p(z_0)\Big\} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\Big\{0 - 0 - 0\Big\} -$$

$$\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\left\{0 - 0 + 0\right\}\Bigg] - \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\Bigg[\{0\} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\Bigg\{0 +$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\times\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\times p(z_0) + 0\Bigg\} + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\left\{0 - 0 + 0\right\} -$$

$$\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\left\{0 - 0 + 0\right\}\Bigg] + \frac{q^{IX}(z_0)}{9!}\Bigg[\{0\} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\Bigg\{0 + \left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^2 \times p(z_0) +$$

$$+ 0\Bigg\} + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\left\{0 - 0 + 0\right\} - \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\left\{0 - 0 + 0\right\}\Bigg]\Bigg]$$

$$= \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\Bigg[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\Bigg\{\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} -$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}\Bigg\} -$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\Bigg\{0\begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} - \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}\Bigg\} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\Bigg\{0\begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} -$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}\Bigg\} -$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{8!}\Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}\Bigg\}\Bigg] - \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\Bigg[0 \Bigg\{ \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}\Bigg\} -$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} - \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}\Bigg\} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix} \Bigg\}$$

$$- \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} \Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix} \Bigg\} \Bigg] + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \Bigg[0 \Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} \Bigg\} -$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!} \Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} - \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} \Bigg\} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$- 0 \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ 0 & p'(z_0) \end{vmatrix} \Bigg\}$$

$$- \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} \Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ 0 & p'(z_0) \end{vmatrix} \Bigg\} \Bigg] - \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} \Bigg[0 \Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} \Bigg\} -$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!} \Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} \Bigg\} + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} -$$

$$0\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!}\end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ 0 & p'(z_0)\end{vmatrix}\Bigg\}$$

$$-\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\Bigg\{0\begin{vmatrix}0 & p'(z_0)\\ 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ 0 & p'(z_0)\end{vmatrix}\Bigg\}\Bigg] + \frac{q^{IX}(z_0)}{9!}\Bigg[0\Bigg\{0\begin{vmatrix}0 & \frac{p''(z_0)}{2!}\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix}$$

$$-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix}0 & p'(z_0)\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix} + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix}0 & p'(z_0)\\ 0 & \frac{p''(z_0)}{2!}\end{vmatrix}\Bigg\} -$$

$$\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\Bigg\{0\begin{vmatrix}0 & \frac{p''(z_0)}{2!}\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix} - \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix}0 & p(z_0)\\ 0 & \frac{p''(z_0)}{2!}\end{vmatrix}\Bigg\} + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\Bigg\{0\begin{vmatrix}0 & p'(z_0)\\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!}\end{vmatrix} -$$

$$0\begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ 0 & p'(z_0) \end{vmatrix}\Bigg\} -$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\Bigg\{0\begin{vmatrix} 0 & p'(z_0) \\ 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix} + \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} 0 & p(z_0) \\ 0 & p'(z_0) \end{vmatrix}\Bigg\}$$

$$= \frac{q^{V}(z_0)}{5!}\Bigg\{\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} -$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}\Bigg\} - \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}\Bigg\} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}\Bigg\} - \frac{q^{VII}(z_0)}{8!}\Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}\Bigg\} + \frac{q^{IX}(z_0)}{9!}\Bigg\{ 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix} + \frac{q^{VI}(z_0)}{6!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}$$

$$- \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} \begin{vmatrix} 0 & 0 & p(z_0) \\ 0 & 0 & p^{\prime}(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!} \end{vmatrix} \Bigg\}$$

$$= \frac{q^{V}(z_0)}{5!} \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & p^{\prime}(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} -$$

$$\frac{q^{VI}(z_0)}{6!} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{VII}(z_0)}{7!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} -$$

$$\frac{q^{VIII}(z_0)}{8!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix} +$$

$$\frac{q^{IX}(z_0)}{9!}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}$$

$$b_{-1}\left[\frac{q^{V}(z_0)}{5!}\right]^5 = \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{IX}(z_0)}{9!} & \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \operatorname{Res}(f(z),z_0) = b_{-1} = \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^5 \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{IX}(z_0)}{9!} & \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

<u>ทฤษฎีที่ 7</u> ให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = q'''(z_0) = q^{IV}(z_0) = q^{V}(z_0) = \ldots\ldots = q^{(n-1)}(z_0) = 0$ แต่ $q^{(n)}(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$ แล้วฟังก์ชัน $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่ n และค่าเรซิดิวของ $f(z)$ จะมีค่าดังนี้

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{n!}{q^{(n)}(z_0)}\right]^n \times$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & p(z_0) \\
\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & 0 & \cdots\cdots & 0 & p'(z_0) \\
\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & \cdots\cdots & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\
\frac{q^{(n+3)}(z_0)}{(n+3)!} & \frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \cdots\cdots & 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\
\frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} & \frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} & \frac{q^{(2n-4)}(z_0)}{(2n-4)!} & \cdots\cdots & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & \frac{p^{(n-2)}(z_0)}{(n-2)!} \\
\frac{q^{(2n-1)}(z_0)}{(2n-1)!} & \frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} & \frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} & \cdots\cdots & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{p^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}
\end{vmatrix}$$

..........(5.7)

<u>พิสูจน์</u> กำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$ และ $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z_0) \neq 0$ และ $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = q'''(z_0) = q^{IV}(z_0) = \ldots\ldots = q^{(n-1)}(z_0) = 0$ แต่ $q^{(n)}(z_0) \neq 0$

แสดงว่า $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่ m ที่จุด $z = z_0$

ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 4 บทที่ 4 จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่ n

กระจายฟังก์ชันวิเคราะห์ $p(z)$ และ $q(z)$ โดยใช้อนุกรมของเทย์เลอร์

$$f(z) = \frac{p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\cdots}{\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{(n+1)} + \frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z-z_0)^{(n+2)} + \cdots\cdots}$$

$$f(z) = \frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{b_{-n+1}}{(z-z_0)^{(n-1)}} + \frac{b_{-n+2}}{(z-z_0)^{(n-2)}} + \frac{b_{-n+3}}{(z-z_0)^{(n-3)}} + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\cdots\cdots$$

จาก $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$

$$p(z) = q(z)f(z)$$

$$p(z_0) + p'(z_0)(z-z_0) + \frac{p''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \frac{p'''(z_0)}{3!}(z-z_0)^3 + \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots + \frac{p^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{(n-1)} + \frac{p^{(m)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^m + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \left[\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^m + \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z-z_0)^{(n+1)} + \frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!}(z-z_0)^{(n+2)} \right.$$

$$\left. + \cdots\cdots\cdots + \frac{q^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{(n-1)} + \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0) + \cdots\cdots \right]$$

$$\left[\frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{b_{-n+1}}{(z-z_0)^{(n-1)}} + \frac{b_{-n+2}}{(z-z_0)^{(n-2)}} + \frac{b_{-n+3}}{(z-z_0)^{(n-3)}} + \cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots + \frac{b_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{b_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots\cdots\right]$$

$$= b_{-n}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} + \left[b_{-n}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} + b_{-n+1}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}\right](z-z_0) +$$

$$\left[b_{-n}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} + b_{-n+1}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} + b_{-n+2}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}\right](z-z_0)^2$$

$$\left[b_{-n}\frac{q^{(n+3)}(z_0)}{(n+3)!} + b_{-n+1}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} + b_{-n+2}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} +\right.$$

$$\left.b_{-n+3}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}\right](z-z_0)^3 + \cdots\cdots + \left[b_{-n}\frac{q^{(2n-1)}(z_0)}{(2n-1)!} +\right.$$

$$b_{-n+1}\frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} + b_{-n+2}\frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} + \cdots\cdots$$

$$\left.b_{-2}\frac{q^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} + b_{-1}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!}\right](z-z_0)^{(n-1)} + \cdots\cdots$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้สมการทั้งหมด n สมการดังนี้

$$b_{-n}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = p(z_0)$$

$$b_{-n} = \frac{n!}{q^{(n)}(z_0)} \times p(z_0) \quad \cdots\cdots (5.7.1)$$

$$b_{-n}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} + b_{-n+1}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = p'(z_0)$$

$$b_{-n+1}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = p'(z_0) - b_{-n}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} \quad \ldots\ldots (5.7.2)$$

$$b_{-n}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} + b_{-n+1}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} + b_{-n+2}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{p''(z_0)}{2!}$$

$$b_{-n+2}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{p''(z_0)}{2!} - b_{-n}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} - b_{-n+1}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} \quad \ldots (5.7.3)$$

$$b_{-n}\frac{q^{(n+3)}(z_0)}{(n+3)!} + b_{-n+1}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} + b_{-n+2}\frac{q^{(n+3)}(z_0)}{(n+1)!} + b_{-n+3}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{p'''(z_0)}{3!} \quad \ldots\ldots$$

$$b_{-n+3}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{p'''(z_0)}{3!} - b_{-n}\frac{q^{(n+3)}(z_0)}{(n+3)!} - b_{-n+1}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} - b_{-n+2}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} \quad \ldots\ldots (5.7.4)$$

....

....

....

$$b_{-n}\frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} + b_{-n+1}\frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} + b_{-n+2}\frac{q^{(2n-4)}(z_0)}{(2n-4)!} + b_{-n+3}\frac{q^{(2n-5)}(z_0)}{(2n-5)!} + \cdots + b_{-4}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} + b_{-3}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} + b_{-2}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{p^{(n-2)}(z_0)}{(n-2)!}$$

$$b_{-2}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{p^{(n-2)}(z_0)}{(n-2)!} - b_{-n}\frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} - b_{-n+1}\frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} - b_{-n+2}\frac{q^{(2n-4)}(z_0)}{(2n-4)!} - b_{-n+3}\frac{q^{(2n-5)}(z_0)}{(2n-5)!} - \cdots - b_{-4}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} - b_{-3}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} \quad \cdots\cdots (5.7.(n-1))$$

$$b_{-n}\frac{q^{(2n-1)}(z_0)}{(2n-1)!} + b_{-n+1}\frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} + b_{-n+2}\frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} + b_{-n+3}\frac{q^{(2n-4)}(z_0)}{(2n-4)!} + \cdots + b_{-3}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} + b_{-2}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} + b_{-1}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{p^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}$$

$$b_{-1}\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{p^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} - b_{-n}\frac{q^{(2n-1)}(z_0)}{(2n-1)!} - b_{-n+1}\frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} - b_{-n+2}\frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} - \cdots - b_{-3}\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} - b_{-2}\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} \quad \cdots\cdots (5.7.n)$$

จากสมการที่ 5.7.n ถ้าแทนค่า b_{-n} , b_{-n+1} , b_{-n+2} , b_{-n+3} , ... , b_{-4} , b_{-3} , b_{-2} จากสมการที่ 5.7.1 ถึงสมการที่ 5.7.(n-1) ลงไปในสมการที่ 5.7.n ซึ่งสามารถจะทำได้ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีที่ 2 ถึงทฤษฎีที่ 6 แล้วจะได้ว่า

$$b_{-1}\,\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} = \left[\frac{n!}{q^{(n)}(z_0)}\right]^{(n-1)} \times$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & p(z_0) \\
\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{q^{(m)}(z_0)}{n!} & 0 & \cdots\cdots & 0 & p'(z_0) \\
\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & \cdots\cdots & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\
\frac{q^{(n+3)}(z_0)}{(n+3)!} & \frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \cdots\cdots & 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots\cdots & & \vdots \\
 & & & \cdots\cdots & & \\
 & & & \cdots\cdots & & \\
\frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} & \frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} & \frac{q^{(2n-4)}(z_0)}{(2n-4)!} & \cdots\cdots & \frac{q^{(n)}(z_0)}{m!} & \frac{p^{(n-2)}(z_0)}{(n-2)!} \\
\frac{q^{(2n-1)}(z_0)}{(2n-1)!} & \frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} & \frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} & \cdots\cdots & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{p^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}
\end{vmatrix}$$

$$\operatorname{Res}\,(f(z), z_0) = b_{-1} = \left[\frac{n!}{q^{(n)}(z_0)}\right]^{n} \times$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(z_0) \\
\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & 0 & \cdots & 0 & p'(z_0) \\
\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & \cdots & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\
\frac{q^{(n+3)}(z_0)}{(n+3)!} & \frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \cdots & 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} & \frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} & \frac{q^{(2n-4)}(z_0)}{(2n-4)!} & \cdots & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & \frac{p^{(n-2)}(z_0)}{(n-2)!} \\
\frac{q^{(2n-1)}(z_0)}{(2n-1)!} & \frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} & \frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} & \cdots & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{p^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}
\end{vmatrix}$$

....