บทที่ 6

การนำเอาสูตรการหาค่าเรซิดิวที่ได้ในบทที่ 5 ไปประยุกต์ใช้

ในบทที่ 6 นี้จะเป็นตัวอย่างของการนำเอาสูตรการหาค่าเรซิดิวที่ได้ใน บทที่ 5 ไปประยุกต์ใช้ ซึ่งจะพบมากในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ จะแยกพิจารณาตามอันดับของซีโร่(zero)ของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ แต่ก่อนอื่นจะกล่าวถึงทฤษฎีเรซิดิวของโคชี ก่อนดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีที่ 1</u> <u>ทฤษฎีเรซิดิวของโคชี</u> (Chauchy's Residue Theorem)

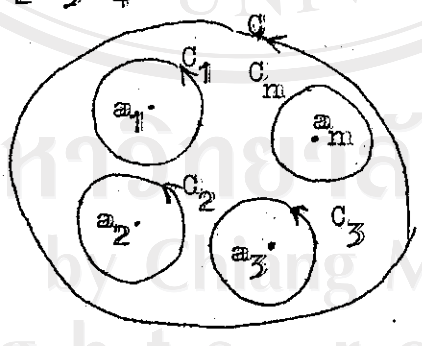
ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในและบนเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C ยกเว้นที่จุดเอกฐาน $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจำกัด ภายใน และรอบจุดเหล่านี้มีค่าเรซิดิวเป็น $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \ldots, m_{-1}$ แล้วจะได้ว่า

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\,(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots+m_{-1})$$

$$= 2\pi i\ (\text{ผลบวกของเรซิดิวรอบจุดต่าง ๆ } n \text{ จุดใน } C)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f(z), a_k)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_m$ เป็นวงกลมภายใน C ที่ไม่ตัดกัน และมีจุดศูนย์กลางที่ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_m$ ตามลำดับ



รูปที่ 25

จากทฤษฎีของโลรองต์ เราได้ว่า f(z) กระจายเป็นอนุกรมของโลรองต์ได้ดังนี้

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

$$\text{เมื่อ } a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ถ้ากระจาย f(z) แบบโลรองต์ รอบจุด $a = a_1$ จะได้

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a_1)^n$$

$$\text{เมื่อ } a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a_1)^{n+1}}\,dz \ , \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

ถ้า $n = -1$ จะได้ $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)\,dz$

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากระจาย f(z) เป็นอนุกรมของโลรองต์ รอบจุด $a = a_2$

จะได้ $b_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)\,dz$

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz = 2\pi i\, b_{-1}$$

ทำในทำนองเดียวกันไปเรื่อยๆ

....

....

จะได้ $\oint_{C_m} f(z)\,dz = 2\pi i\, m_{-1}$

จากทฤษฎีที่ 2 บทที่ 3 $\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{C_m} f(z)\,dz$

$$= 2\pi i\, a_{-1} + 2\pi i\, b_{-1} + \cdots\cdots + 2\pi i\, m_{-1}$$

$$= 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + \cdots\cdots\cdots + m_{-1})$$

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(\text{ ผลบวกของเรซิดิวรอบจุดต่างๆ } m \text{ จุดใน } C)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(f(z), a_k)$$

ต่อไปจะเป็นตัวอย่างของการนำเอาสูตรการหาค่าเรซิดิวที่ได้ในบทที่ 5 ไปประยุกต์ใช้ ซึ่งจะแยกพิจารณาตามอันดับของซีโร่ ของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อนที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้

6.1 เมื่อจุดเอกฐานของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน คือ ซีโร่เชิงเดียว

(เมื่อ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่ง $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = 0$ แต่ $q'(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$)

ตัวอย่าง 1 จงหาค่าเรซิดิวของ $f(z) = \tan z$ ที่จุด $z_0 = \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ จาก $$f(z) = \frac{\sin z}{\cos z} = \tan z$$

พิจารณา
$$p(z) = \sin z$$
$$p(z_0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \neq 0$$

และ
$$q(z) = \cos z$$
$$q(z_0) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$q'(z_0) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1 \neq 0$$

จาก (5.2) จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลเชิงเดียว และ

$$\mathrm{Res}(f(z), z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

$$\mathrm{Res}(f(z), \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = -1$$

ค่าเรซิดิวของ $f(z) = \tan z$ ที่จุด $z_0 = \frac{\pi}{2}$ คือ -1

<u>อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ</u>

พิจารณาอินทิกรัลในรูป $I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ เมื่อ F เป็นฟังก์ชันตักยะ จะประยุกต์ทฤษฎีเรซิดิวของโคชีด้วยการแปลงสภาพตัวแปร θ บนช่วง $[0, 2\pi]$ ให้เป็นตัวแปร z บนวงกลม $|z| = 1$ โดยให้ $z = e^{i\theta}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

เนื่องจาก $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

$\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

ดังนั้นจะได้ $\cos\theta = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$

และ $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}(z - \dfrac{1}{z})$

จาก $z = e^{i\theta}$

$dz = ie^{i\theta}d\theta = iz\,d\theta$

$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

นั่นคือ $I = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \oint_C f(z)\,dz$

เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 1$

และ $f(z) = F\left[\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right] \cdot \frac{1}{iz}$

<u>ตัวอย่าง 2</u> จงหาค่าของ $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta}$

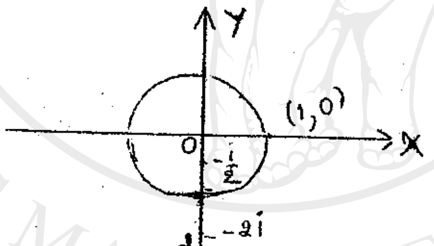
<u>วิธีทำ</u> $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{5}{4} + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 1$

$$= \oint_C \frac{dz}{iz\left[\frac{5}{4} + \frac{z}{2i} - \frac{1}{2iz}\right]}$$

$$= \oint_C \frac{dz}{iz\left[\frac{5iz + 2z^2 - 2}{4iz}\right]}$$

$$= \oint_C \frac{4dz}{2z^2 + 5iz - 2}$$

$$= \oint_C \frac{4dz}{(z + 2i)(2z + i)}$$



<u>รูปที่ 26</u>

จุดเอกฐานของฟังก์ชัน $f(z) = \frac{4}{2z^2 + 5iz - 2}$ คือ $z_1 = -\frac{i}{2}$

และ $z_2 = -2i$

แต่ z_2 ไม่อยู่ในวงกลม $|z| = 1$

ดังนั้น $\oint_C \frac{4\,dz}{(z + 2i)(2z + i)} = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z), -\frac{i}{2})$

จาก (5.2) $\operatorname{Res}(z_1 = -\frac{i}{2}) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)}$ เมื่อ $p(z) = 4$, $q(z) = 2z^2 + 5iz - 2$

$$q'(z) = 4z + 5i$$

$$\text{Res}(z_1 = \frac{-i}{2}) = \frac{4}{4(\frac{-i}{2}) + 5i}$$

$$= \frac{4}{3i}$$

$$\oint_C \frac{4\,dz}{2z^2 + 5iz - 2} = 2\pi i \times \frac{4}{3i} = \frac{8\pi}{3}$$

ดังนั้นจะได้ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \sin\theta} = \oint_C \frac{4\,dz}{2z^2 + 5iz - 2} = \frac{8\pi}{3}$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$

วิธีทำ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \oint_C \frac{\frac{dz}{iz}}{3 - 2\times\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) + \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})}$

เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 1$

$$= \oint_C \frac{dz}{iz(3 - z - \frac{1}{z} + \frac{z}{2i} - \frac{1}{2iz})}$$

$$= \oint_C \frac{dz}{iz(\frac{6iz - 2iz^2 - 2i + z^2 - 1}{2iz})}$$

$$= \oint_C \frac{2\,dz}{z^2 - 2iz^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

$$= \oint_C \frac{2\,dz}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

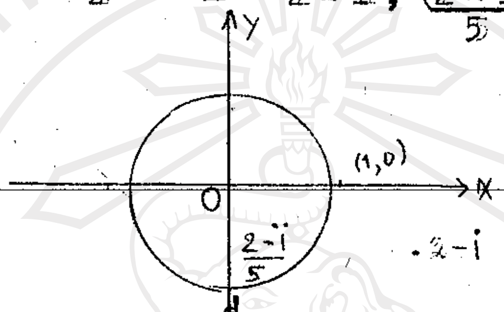
ต่อไปจะพิจารณาหาจุดเอกฐานของ $f(z) = \dfrac{2}{(1 - 2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$

จาก $(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i = 0$

จะได้ $$z = \frac{-6i \pm \sqrt{(6i)^2 - 4(1-2i)(-1-2i)}}{2(1-2i)}$$

$$z = \frac{-6i \pm 4i}{2(1-2i)}$$

$$z = 2 - i\,,\ \frac{(2-i)}{5}$$



รูปที่ 27

ดังนั้นจุดเอกฐานคือ $z_1 = 2 - i$ และ $z_2 = \frac{2-i}{5}$ แต่ z_1 ไม่อยู่ในวงกลม $|z| = 1$

นั่นคือ $$\oint_C \frac{2\,dz}{z^2 - 2iz^2 + 6iz - 1 - 2i} = 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(z_2 = \frac{2-i}{5}\right)$$

จาก(5.2) จะได้ $$\mathrm{Res}(z_2) = \frac{p(z_2)}{q'(z_2)}$$

เมื่อ $p(z_2) = 2$, $q(z) = (1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i$

$$q(z_2) = 0$$

$$q'(z_2) = 2z - 4iz + 6i$$

$$q'(z_2) = 2\frac{(2-i)}{5} - 4i\frac{(2-i)}{5} + 6i$$

$$\therefore\ q'(z_2) = 4i$$

$$\mathrm{Res}\left(z_2 = \frac{2-i}{5}\right) = \frac{2}{4i} = \frac{1}{2i}$$

$$\oint_C \frac{2\,dz}{z^2 - 2iz^2 + 6iz - 1 - 2i} = 2\pi i \times \frac{1}{2i}$$

$$= \pi$$

นั่นคือจะได้

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta} = \oint_C \frac{2\,dz}{z^2 - 2iz^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

$$= \pi$$

<u>6.2</u> <u>เมื่อจุดเอกฐานของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน คือ ซีโร่อันดับที่สอง</u>

(เมื่อ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$

ซึ่ง $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = 0$ แต่

$q''(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$)

<u>ตัวอย่าง 4</u> จงหาค่าเรซิดิวของ $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ ที่จุด $z = 1$

<u>วิธีทำ</u> จากกำหนดให้ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$

จะได้ $p(z) = e^z$, $p(1) = e \neq 0$

และ $q(z) = (z-1)^2$, $p(1) = 0$

$q'(z) = 2(z-1)$, $q'(1) = 0$

$q''(z) = 2$, $q''(1) = 2 \neq 0$

จาก(5.3) จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สอง

$$\text{และ } \operatorname{Res}(f(z), z_0) = \left[\frac{2!}{q'''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \dfrac{q''(z_0)}{2!} & p(z_0) \\ \dfrac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ $p'(z) = e^z$, $p'(1) = e$

และ $q'''(z) = 0$, $q'''(1) = 0$

ดังนั้น $$\mathrm{Res}(f(z),1) = \left[\frac{2!}{2}\right]^2 \begin{vmatrix} \frac{2}{2!} & e \\ \frac{0}{3!} & e \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{Res}(f(z),1) = e$$

ค่าเรซิดิวของ $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$ ที่จุด $z = 1$ คือ e

---

<u>ตัวอย่าง 5</u> จงหาค่าของ $\oint_C \dfrac{dz}{z(e^z-1)}$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 1$

<u>วิธีทำ</u> จากกำหนดให้ $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z-1)}$ จะได้ว่า $f(z)$ มีจุดเอกฐานที่จุด $z = 0$

จะได้ว่า $p(z) = 1$, $p(0) = 1 \neq 0$

และ $q(z) = ze^z - z$, $q(0) = 0$

$q'(z) = ze^z + e^z - 1$, $q'(0) = 0$

$q''(z) = ze^z + e^z + e^z$, $q''(0) = 2 \neq 0$

จาก (5.3) จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สอง

และ $$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{2!}{q''(z_0)}\right]^2 \begin{vmatrix} \frac{q''(z_0)}{2!} & p(z_0) \\ \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ $p'(z) = 0$, $p'(0) = 0$

และ $q'''(z) = ze^z + e^z + 2e^z = ze^z + 3e^z$

$q'''(0) = 3$

ดังนั้น $\quad \text{Res}(f(z),0) = \left[\frac{2!}{2}\right]^2 \begin{vmatrix} \frac{2}{2!} & 1 \\ \frac{3}{3!} & 0 \end{vmatrix}$

$$\text{Res}(f(z),0) = -\frac{1}{2}$$

จาก $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z(e^z-1)} = 2\pi i\ \text{Res}(z_0 = 0)$

$$= 2\pi i \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\oint_C \frac{dz}{z(e^z-1)} = -\pi i$$

6.3 <u>เมื่อจุดเอกฐานของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน คือ ซีโร่อันดับที่สาม</u>

(เมื่อ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = 0$ แต่ $q'''(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$)

<u>ตัวอย่าง 6</u> จงหาค่าเรซิดิวของ $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$ ที่จุด $z = 0$

<u>วิธีทำ</u> จากกำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{z^2 \sin z}$

จะได้ $\quad p(z) = 1$, $p(0) = 1 \neq 0$

และ $\quad q(z) = z^2 \sin z$, $q(0) = 0$

$q'(z) = 2z \sin z + z^2 \cos z$, $q'(0) = 0$

$q''(z) = 4z \cos z + 2 \sin z - z^2 \sin z$

$q''(0) = 0$

$q'''(z) = 6 \cos z - 6z \sin z - z^2 \cos z$

$$q'''(0) = 6 \neq 0$$

ดังนั้นจาก (5.4)จะได้ว่า f(z) มีโพลอันดับที่สาม

และ $$\operatorname{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{q'''(z_0)}{3!} & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ $p'(z) = 0 \;,\; p'(0) = 0$

$$p''(z) = 0 \;,\; p''(0) = 0$$

และ $$q^{IV}(z) = -12 \sin z - 8z \cos z + z^2 \sin z$$

$$q^{IV}(0) = 0$$

$$q^{V}(z) = -20 \cos z + 10z \sin z + z^2 \cos z$$

$$q^{V}(0) = -20$$

ดังนั้น $$\operatorname{Res}(f(z),0) = \left[\frac{3!}{6}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{6}{3!} & 0 & 1 \\ \frac{0}{4!} & \frac{6}{3!} & 0 \\ \frac{-20}{5!} & \frac{0}{4!} & \frac{0}{2!} \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 - \frac{20}{5!} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \frac{1}{6}$$

นั่นคือค่าเรซิดิวของ $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin z}$ ที่จุด $z = 0$ คือ $\frac{1}{6}$

ตัวอย่าง 7 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{e^z}{\sin^3 z}dz$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 1$

วิธีทำ จากกำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{e^z}{\sin^3 z}$

ถ้า $z = 0$ จะได้ $\sin^3 z = 0$ ดังนั้นจึงได้ว่า $f(z)$ มีจุดเอกฐานที่ $z = 0$

ในที่นี้ $p(z) = e^z$, $p(0) = e^0 = 1 \neq 0$

และ $q(z) = \sin^3 z$, $q(0) = 0$

$q'(z) = 3\sin^2 z\cos z$, $q'(0) = 0$

$q''(z) = 6\sin z\cos^2 z - 3\sin^3 z$, $q''(0) = 0$

$q'''(z) = 6\cos^3 z - 21\sin^2 z\cos z$

$q'''(0) = 6 \neq = 0$

ดังนั้น จาก (5.4) จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สาม

$$\text{และ}\quad \operatorname{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{q'''(z_0)}{3!} & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ $p'(z) = e^z$, $p'(0) = 1$

$p''(z) = e^z$, $p''(0) = 1$

และ $q^{IV}(z) = -18\cos^2 z\sin z - 42\sin z\cos^2 z + 21\sin^3 z$

$= 21\sin^3 z - 60\sin z\cos^2 z$

$q^{IV}(0) = 0$

$q^{V}(z) = 63\cos z\sin^2 z - 60\cos^3 z + 120\cos z\sin^2 z$

$$q^{(V)}(z) = 183\cos z\sin^2 z - 60\cos^3 z$$

$$q^{(V)}(0) = -60$$

ดังนั้น

$$\mathrm{Res}(f(z),0) = \left[\frac{3!}{6}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{6}{3!} & 0 & 1 \\ \frac{0}{4!} & \frac{6}{3!} & 1 \\ \frac{-60}{5!} & \frac{0}{4!} & \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - 0 - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\mathrm{Res}(f(z),0) = 1$$

และจาก

$$\oint_C \frac{e^z}{\sin^3 z}\,dz = 2\pi i \times \mathrm{Res}(f(z),0)$$

$$= 2\pi i \times 1$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{\sin^3 z}\,dz = 2\pi i$$

<u>ตัวอย่าง 8</u> จงหาค่าของ $\oint_C \frac{e^z}{z(z-2)^3}\,dz$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 3$

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้ $f(z) = \frac{e^z}{z(z-2)^3} = \frac{p(z)}{q(z)}$

ถ้าให้ $z = 0$ จะทำให้ $z(z-2)^3 = 0$ ดังนั้นจึงได้ว่า $f(z)$ มีจุดเอกฐาน

$z = 0$ และถ้าให้ $z = 2$ จะทำให้ $z(z-2)^3 = 0$ ดังนั้นจึงได้ว่า $f(z)$ มีจุดเอกฐานที่ $z = 2$

<u>เมื่อ $f(z)$ มีจุดเอกฐานที่จุด $z = 0$</u>

ในที่นี้ $p(z) = e^z$, $p(0) = e^0 = 1 \neq 0$

และ $q(z) = z(z-2)^3$, $q(0) = 0$

$q'(z) = (z-2)^3 + 3z(z-2)^2$, $q'(0) = -8 \neq 0$

ดังนั้นจาก (5.4) จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลเชิงเดียวและ

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

นั่นคือ $\mathrm{Res}(f(z),0) = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$

<u>เมื่อ $f(z)$ มีจุดเอกฐานที่จุด $z = 2$</u>

ในที่นี้ $p(z) = e^z$, $p(2) = e^2 \neq 0$

และ $q(z) = z(z-2)^3$, $q(2) = 0$

$q'(z) = (z-2)^3 + 3z(z-2)^2$, $q'(2) = 0$

$q''(z) = 6(z-2)^2 + 6z(z-2)$, $q''(2) = 0$

$$q'''(z) = 12(z-2) + 6(z-2) + 6z$$

$$= 18(z-2) + 6z$$

$$q'''(2) = 12 \neq 0$$

ดังนั้นจาก (5.4) จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สาม และ

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{3!}{q'''(z_0)}\right]^3 \begin{vmatrix} \frac{q'''(z_0)}{3!} & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{q'''(z_0)}{3!} & p'(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ $\quad p'(z) = e^{z} \quad , \quad p'(2) = e^{2}$

$\qquad\qquad p''(z) = e^{z} \quad , \quad p''(2) = e^{2}$

และ $\quad q^{IV}(z) = 24 \quad , \quad q^{IV}(2) = 24$

$\qquad\qquad q^{V}(z) = 0 \quad , \quad q^{V}(2) = 0$

ดังนั้น

$$\text{Res}(f(z),2) = \left[\frac{3!}{12}\right]^{3} \begin{vmatrix} \frac{12}{3!} & 0 & e^{2} \\ \frac{24}{4!} & \frac{12}{3!} & e^{2} \\ \frac{0}{5!} & \frac{24}{4!} & \frac{e^{2}}{2!} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 2 & 0 & e^{2} \\ 1 & 2 & e^{2} \\ 0 & 1 & \frac{e^{2}}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ 2 \begin{vmatrix} 2 & e^{2} \\ 1 & \frac{e^{2}}{2} \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & e^{2} \\ 1 & \frac{e^{2}}{2} \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{8}\left\{ (e^{2} - e^{2}) + e^{2} \right\}$$

$$= \frac{e^{2}}{8}$$

ดังนั้นจากทฤษฎีที่ 1 จะได้

$$\oint_C \frac{e^{z}}{z(z-2)^{3}}\,dz = 2\pi i\left\{\text{Res}(f(z),0) + \text{Res}(f(z),2)\right\}$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{1}{8} + \frac{e^{2}}{8}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{e^{2}-1}{8}\right)$$

$$\oint_C \frac{e^{z}}{z(z-2)^{3}}\,dz = \left(\frac{e^{2}-1}{4}\right)\pi i$$

6.4 เมื่อจุดเอกฐานของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน คือ ซีโร่อันดับที่สี่

(เมื่อ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = q'''(z_0) = 0$ แต่ $q^{IV}(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$)

ตัวอย่าง 9 จงหาค่าเรซิดิวของ $f(z) = \frac{e^z}{\sin^4 z}$ ที่จุด $z = 0$

วิธีทำ จากกำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{e^z}{\sin^4 z}$

ในที่นี้ $p(z) = e^z$, $p(0) = e^0 = 1 \neq 0$

และ $q(z) = \sin^4 z$, $q(0) = 0$

$$q'(z) = 4\sin^3 z\cos z \quad , \quad q'(0) = 0$$

$$q''(z) = 12\sin^2 z\cos^2 z - 4\sin^4 z \quad , \quad q''(0) = 0$$

$$q'''(z) = 24\sin z\cos^3 z - 24\sin^3 z\cos z - 16\sin^3 z\cos z$$

$$= 24\sin z\cos^3 z - 40\sin^3 z\cos z$$

$$q'''(0) = 0$$

$$q^{IV}(z) = 40\sin^4 z - 192\sin^2 z\cos^2 z + 24\cos^4 z$$

$$q^{IV}(0) = 24 \neq 0$$

ดังนั้นจาก (5.5) จะได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่สี่ และ

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^4 \begin{vmatrix} \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}$$

และในที่นี้ $q^{V}(z) = 160 \sin^3 z \cos z + 384 \sin^3 z \cos z -$

$384 \sin z \cos^3 z - 96 \sin z \cos^3 z$

$= 544 \sin^3 z \cos z - 480 \sin z \cos^3 z$

$q^{V}(0) = 0$

$q^{VI}(z) = -544 \sin^4 z + 1632 \sin^2 z \cos^2 z + 1440 \sin^2 z \cos^2 z$

$- 480 \cos^4 z$

$= -544 \sin^4 z + 3072 \sin^2 z \cos^2 z - 480 \cos^4 z$

$q^{VI}(0) = -480$

$q^{VII}(z) = -2176 \sin^3 z \cos z - 6144 \sin^3 z \cos z +$

$6144 \sin z \cos^3 z + 1920 \sin z \cos^3 z$

$= -8320 \sin^3 z \cos z + 8064 \sin z \cos^3 z$

$q^{VII}(0) = 0$

และ $p'(z) = e^z \quad , \quad p'(0) = 1$

$p''(z) = e^z \quad , \quad p''(0) = 1$

$p'''(z) = e^z \quad , \quad p'''(0) = 1$

ดังนั้น

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \left[\frac{4!}{24}\right]^4 \begin{vmatrix} \frac{24}{4!} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{0}{5!} & \frac{24}{4!} & 0 & 1 \\ \frac{-480}{6!} & \frac{0}{5!} & \frac{24}{4!} & \frac{1}{2!} \\ \frac{0}{7!} & \frac{-480}{6!} & \frac{0}{5!} & \frac{1}{3!} \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \left[\frac{4!}{24}\right]^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} - 0 - \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} - 0$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} - 0 - \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - \frac{2}{3}\left\{0 - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix} - \frac{2}{3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{Res}(f(z),0) = \frac{5}{6}$$

นั่นคือค่าเรซิดิของ $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin^4 z}$ ที่จุด $z = 0$ คือ $\frac{5}{6}$

<u>ตัวอย่าง 10</u> จงหาค่าของ $\oint_C \dfrac{(1 + e^z)}{z^4}\,dz$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 1$

<u>วิธีทำ</u> จากกำหนดให้ $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{(1 + e^z)}{z^4}$

ถ้า $z = 0$ จะได้ $z^4 = 0$ ดังนั้นจึงได้ว่า $f(z)$ มีจุดเอกฐานที่ $z = 0$

ในที่นี้ $p(z) = (1 + e^z)$, $p(0) = 1 + e^0 = 1 + 1 = 2 \neq 0$

และ $q(z) = z^4$, $q(0) = 0$

$q'(z) = 4z^3$, $q'(0) = 0$

$$q''(z) = 12z^2 \quad , \quad q''(0) = 0$$
$$q'''(z) = 24z \quad , \quad q'''(0) = 0$$
$$q^{IV}(z) = 24 \quad , \quad q^{IV}(0) = 24 \neq 0$$

ดังนั้นจาก (5.5) จึงได้ว่า f(z) มีโพลอันดับที่สี่ และ

$$\operatorname{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{4!}{q^{IV}(z_0)}\right]^4 \begin{vmatrix} \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{q^{IV}(z_0)}{4!} & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ $p'(z) = e^z \quad , \quad p'(0) = e^0 = 1$

$$p''(z) = e^z \quad , \quad p''(0) = e^0 = 1$$
$$p'''(z) = e^z \quad , \quad p'''(0) = e^0 = 1$$

และ $q^{V}(z) = 0 \quad , \quad q^{V}(0) = 0$

$$q^{VI}(z) = 0 \quad , \quad q^{VI}(0) = 0$$
$$q^{VII}(z) = 0 \quad , \quad q^{VII}(0) = 0$$

ดังนั้น $\operatorname{Res}(f(z),0) = \left[\frac{4!}{24}\right]^4 \begin{vmatrix} \frac{24}{4!} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{0}{5!} & \frac{24}{4!} & 0 & 1 \\ \frac{0}{6!} & \frac{0}{5!} & \frac{24}{4!} & \frac{1}{2!} \\ \frac{0}{7!} & \frac{0}{6!} & \frac{0}{5!} & \frac{1}{3!} \end{vmatrix}$

$$\mathrm{Res}(f(z),0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{Res}(f(z),0) = \frac{1}{6}$$

และจาก $\displaystyle\oint_C \frac{(1+e^z)}{z^4}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f(z),0)$

$$= 2\pi i \times \frac{1}{6}$$

$$\oint_C \frac{(1+e^z)}{z^4}\,dz = \frac{\pi i}{3}$$

<u>6.5</u> <u>เมื่อจุดเอกฐานของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน คือ ซีโร่อันดับที่ห้า</u>

(เมื่อ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z)$, $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = q'''(z_0) = q^{IV}(z_0) = 0$ แต่ $q^{V}(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$)

<u>ตัวอย่าง 11</u> จงหาค่าเรซิดิวของฟังก์ชัน $f(z) = \dfrac{e^z}{z^5(z+4)}$ ที่จุดเอกฐาน $z=0$

<u>วิธีทำ</u> จากกำหนดให้ $\quad f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{e^{z}}{z^{5}(z+4)}$

ในที่นี้ $\quad p(z) = e^{z} \;,\; p(0) = e^{0} = 1 \neq 0$

และ $\quad q(z) = z^{5}(z+4) = z^{6} + 4z^{5} \;,\; q(0) = 0$

$$q'(z) = 6z^{5} + 20z^{4} \;,\; q'(0) = 0$$

$$q''(z) = 30z^{4} + 80z^{3} \;,\; q''(0) = 0$$

$$q'''(z) = 120z^{3} + 240z^{2} \;,\; q'''(0) = 0$$

$$q^{IV}(z) = 360z^{2} + 480z \;,\; q^{IV}(0) = 0$$

$$q^{V}(z) = 720z + 480 \;,\; q^{V}(0) = 480 \neq 0$$

ดังนั้นจาก (5.6) จึงได้ว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่ ห้า และ

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^{5} \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & p'(z_0) \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{IX}(z_0)}{9!} & \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ $\quad p'(z) = e^{z} \;,\; p'(0) = e^{0} = 1$

$$p''(z) = e^{z} \;,\; p''(0) = e^{0} = 1$$

$$p'''(z) = e^{z} \;,\; p'''(0) = e^{0} = 1$$

$$p^{IV}(z) = e^{z} \;,\; p^{IV}(0) = e^{0} = 1$$

และ $\quad q^{VI}(z) = 720 \;,\; q^{VI}(0) = 720$

$$q^{VII}(z) = 0 \quad , \quad q^{VII}(0) = 0$$
$$q^{VIII}(z) = 0 \quad , \quad q^{VIII}(0) = 0$$
$$q^{IX}(z) = 0 \quad , \quad q^{IX}(0) = 0$$

$$\mathrm{Res}(f(z),0) = \left[\frac{5!}{480}\right]^{5} \begin{vmatrix} \frac{480}{5!} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{720}{6!} & \frac{480}{5!} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{0}{7!} & \frac{720}{6!} & \frac{480}{5!} & 0 & \frac{1}{2!} \\ \frac{0}{8!} & \frac{0}{7!} & \frac{720}{6!} & \frac{480}{5!} & \frac{1}{3!} \\ \frac{0}{9!} & \frac{0}{8!} & \frac{0}{7!} & \frac{720}{6!} & \frac{1}{4!} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1024} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{1024} \left\{ 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{24} \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{1024} \left[4 \left\{ 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 4 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \end{vmatrix} \right\} - 1 \left\{ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \end{vmatrix} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{1024}\left[16\left\{4\begin{vmatrix}4 & \frac{1}{6}\\ 1 & \frac{1}{24}\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{24}\end{vmatrix}\right\} - 4\left\{-1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & \frac{1}{24}\end{vmatrix}\right\} + \left\{-1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & \frac{1}{24}\end{vmatrix}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{1024}\left[16\left\{4\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\right\} + 4(-1) - 1(-1)\right]$$

$$= \frac{1}{1024}(8 - 4 + 1)$$

$$= \frac{5}{1024}$$

$$\text{Res}(f(z),0) = \frac{5}{1024}$$

<u>ตัวอย่าง 12</u> จงหาค่าของ $\oint_C \frac{e^z}{(1-z)^5}\,dz$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 1$

<u>วิธีทำ</u> จากกำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{e^z}{(1-z)^5}$

ถ้า $z = 1$ จะได้ว่า $(1-z)^5 = 0$ ดังนั้นจึงได้ว่า $f(z)$ มีจุดเอกฐานที่ $z=1$

ในที่นี้ $p(z) = e^z$, $p(1) = e^1 = e \neq 0$

และ $q(z) = (1-z)^5$, $q(1) = 0$

$q^{I}(z) = 5(1-z)^4$, $q^{I}(1) = 0$

$q^{II}(z) = 20(1-z)^3$, $q^{II}(1) = 0$

$q^{III}(z) = 60(1-z)^2$, $q^{III}(1) = 0$

$q^{IV}(z) = 120(1-z)$, $q^{IV}(1) = 0$

$q^{V}(z) = -120$, $q^{V}(1) = -120 \neq 0$

ดังนั้นจาก (5.6) จึงได้ว่า $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่ห้า และ

$$\operatorname{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{5!}{q^{V}(z_0)}\right]^5 \begin{vmatrix} \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & 0 & p(z_0) \\ \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & 0 & p^{\prime}(z_0) \\ \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & 0 & \frac{p^{\prime\prime}(z_0)}{2!} \\ \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{q^{V}(z_0)}{5!} & \frac{p^{\prime\prime\prime}(z_0)}{3!} \\ \frac{q^{IX}(z_0)}{9!} & \frac{q^{VIII}(z_0)}{8!} & \frac{q^{VII}(z_0)}{7!} & \frac{q^{VI}(z_0)}{6!} & \frac{p^{IV}(z_0)}{4!} \end{vmatrix}$$

ในที่นี้ $p^{\prime}(z) = e^z \quad , \quad p^{\prime}(1) = e$

$p^{\prime\prime}(z) = e^z \quad , \quad p^{\prime\prime}(1) = e$

$p^{\prime\prime\prime}(z) = e^z \quad , \quad p^{\prime\prime\prime}(1) = e$

$p^{IV}(z) = e^z \quad , \quad p^{IV}(1) = e$

และ $q^{VI}(z) = 0 \quad , \quad q^{VI}(1) = 0$

$q^{VII}(z) = 0 \quad , \quad q^{VII}(1) = 0$

$q^{VIII}(z) = 0 \quad , \quad q^{VIII}(1) = 0$

$q^{IX}(z) = 0 \quad , \quad q^{IX}(1) = 0$

$$\operatorname{Res}(f(z),1) = \left[\frac{5!}{-120}\right]^5 \begin{vmatrix} \frac{-120}{5!} & 0 & 0 & 0 & e \\ \frac{0}{6!} & \frac{-120}{5!} & 0 & 0 & e \\ \frac{0}{7!} & \frac{0}{6!} & \frac{-120}{5!} & 0 & \frac{e}{2!} \\ \frac{0}{8!} & \frac{0}{7!} & \frac{0}{6!} & \frac{-120}{5!} & \frac{e}{3!} \\ \frac{0}{9!} & \frac{0}{8!} & \frac{0}{7!} & \frac{0}{6!} & \frac{e}{4!} \end{vmatrix}$$

$$= -1\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & -1 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{e}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{e}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{e}{24} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & e \\ 0 & -1 & 0 & \frac{e}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{e}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e}{24} \end{vmatrix}$$

$$= -1\begin{vmatrix} -1 & 0 & \frac{e}{2} \\ 0 & -1 & \frac{e}{6} \\ 0 & 0 & \frac{e}{24} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & \frac{e}{6} \\ 0 & \frac{e}{24} \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{Res}(f(z),1) = -\frac{e}{24}$$

และจาก $\oint_C \frac{e^z}{(1-z)^5}\,dz = 2\pi i \times \operatorname{Res}(f(z),1)$

$$= 2\pi i \times \left(-\frac{e}{24}\right)$$

$$\therefore \oint_C \frac{e^z}{(1-z)^5}\,dz = -\frac{\pi i e}{12}$$

....