บทที่ 7

บทสรุป

การหาสูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน ที่ได้กล่าวไปแล้วในบทที่ 5 นั้น พบว่าจะต้องอาศัยความรู้พื้นฐานในบทที่ 2 คือเรื่องฟังก์ชันวิเคราะห์ บทที่ 3 คือเรื่อง การอินทิเกรตเชิงซ้อน และบทที่ 4 คือเรื่อง อนุกรมของเทย์เลอร์ และอนุกรมของโลรองต์ ดังนั้นผู้ที่จะศึกษาการหาสูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อนที่ผู้เขียนได้เขียนขึ้นมานี้ ควรจะศึกษาเรื่องต่างๆ ในบทที่ 2 , 3 และ 4 ให้เข้าใจเสียก่อน

สูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อน $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ที่ได้ในบทที่ 5 นั้น สามารถหาได้โดยกระจาย $p(z)$, $q(z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ แบบอนุกรมของเทย์เลอร์ และกระจายฟังก์ชัน $f(z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในย่านจุดของ z_0 ยกเว้นที่จุด $z = z_0$ แบบอนุกรมของโลรองต์ เนื่องจาก $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ดังนั้นจะได้ว่า $f(z)q(z) = p(z)$ จากนี้ทำการหาสูตรเรซิดิวโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ แล้วในที่สุดจะเขียนสูตรเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อนที่หาได้ในรูปของดีเทอร์มินันต์ของเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ดังต่อไปนี้

ถ้ากำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = z_0$ ซึ่ง $p(z)$ และ $q(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $q(z_0) = q'(z_0) = q''(z_0) = q'''(z_0) = \dots = q^{(n-1)}(z_0) = 0$ แต่ $q^{(n)}(z_0) \neq 0$ และ $p(z_0) \neq 0$ แล้วฟังก์ชัน $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่ n ที่จุด $z = z_0$ และเรซิดิวของ $f(z)$ จะมีค่าดังนี้

$$\mathrm{Res}(f(z),z_0) = \left[\frac{n!}{q^{(n)}(z_0)}\right]^m \times$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & p(z_0) \\
\frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & 0 & \cdots\cdots & 0 & p'(z_0) \\
\frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & \cdots\cdots & 0 & \frac{p''(z_0)}{2!} \\
\frac{q^{(n+3)}(z_0)}{(n+3)!} & \frac{q^{(n+2)}(z_0)}{(n+2)!} & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \cdots\cdots & 0 & \frac{p'''(z_0)}{3!} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} & \frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} & \frac{q^{(2n-4)}(z_0)}{(2n-4)!} & \cdots\cdots & \frac{q^{(n)}(z_0)}{n!} & \frac{p^{(n-2)}(z_0)}{(n-2)!} \\
\frac{q^{(2n-1)}(z_0)}{(2n-1)!} & \frac{q^{(2n-2)}(z_0)}{(2n-2)!} & \frac{q^{(2n-3)}(z_0)}{(2n-3)!} & \cdots\cdots & \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} & \frac{p^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}
\end{vmatrix} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7.1)$$

วิธีใช้สูตรการหาค่าเรซิดิวที่ได้ใน (7.1) มีขั้นตอนในการใช้ดังนี้ ถ้ากำหนดให้ $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ โดยที่ $p(z)$, $q(z)$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

<u>ในการหาค่าเรซิดิวของ $f(z)$ ให้ทำดังนี้</u>

1. ถ้าไม่กำหนดจุดเอกฐานมาให้ จะต้องหาเอง ซึ่งสามารถหาได้โดยการแทนค่า $z = z_0$ ลงใน $q(z)$ **ถ้าแทนค่า** $z = z_0$ ลงใน $q(z)$ แล้วทำให้

$q(z_0) = 0$ แสดงว่า $z = z_0$ เป็นจุดเอกฐาน และจุดเอกฐานนี้อาจจะมีได้มากกว่าหนึ่งจุดก็ได้ ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อนที่กำหนดมาให้

2. พิจารณา $p(z_0) \neq 0$

3. หาว่า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ที่กำหนดมาให้ $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่เท่าไร และ $f(z)$ มีโพลอันดับที่เท่าไร โดยการดิฟเฟอร์เรนทิเอต $q(z)$ ได้ $q'(z)$ แล้วแทนค่า $z = z_0$ ได้ $q'(z_0)$ ถ้า $q'(z_0) \neq 0$ จะได้ว่า $q(z)$ มีซีโร่เชิงเดียวตามนิยามที่ 4 บทที่ 4 แล้ว $f(z)$ จะมีโพลเชิงเดียว ตามทฤษฎีที่ 4 บทที่ 4 แต่ถ้า $q'(z_0) = 0$ ให้ดิฟเฟอร์เรนทิเอต $q'(z)$ ต่อไปอีกได้ $q''(z)$ แทนค่า $z = z_0$ ได้ $q''(z_0)$ ถ้า $q''(z_0) \neq 0$ จะได้ว่า $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่สอง ตามนิยามที่ 4 บทที่ 4 แล้ว $f(z)$ จะมีโพลอันดับที่สองตามทฤษฎีที่ 4 บทที่ 4 แต่ถ้า $q''(z_0) = 0$ ให้ดิฟเฟอร์เรนทิเอต $q''(z)$ ต่อไปอีก ทำในทำนองเดียวกันนี้ไปเรื่อยๆ จนกระทั่งได้ว่า $q^{(n-1)}(z_0) = 0$ แต่ $q^{(n)}(z_0) \neq 0$ จึงได้ว่า $q(z)$ มี ซีโร่อันดับที่ m แล้ว $f(z)$ มีโพลอันดับที่ n ตามนิยามที่ 4 บทที่ 4 และ ทฤษฎีที่ 4 บทที่ 4 ตามลำดับ

4. เมื่อหาได้ว่า $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ ที่กำหนดมาให้นั้น $q(z)$ มีซีโร่อันดับที่เท่าไร และ $f(z)$ มีโพลอันดับที่เท่าไร แล้วให้แทนค่าอันดับที่ของซีโร่ของ $q(z)$ ที่หาได้ลงไปในสูตรที่ (7.1)

จากขั้นตอนทั้งสี่ขั้นดังกล่าวมาแล้วนี้ ก็สามารถหาค่าเรซิดิวของฟังก์ชันเศษส่วนเชิงซ้อนที่กำหนดมาให้ได้

ในกรณีที่โจทย์ให้หา $\oint_C f(z)dz$ ก็ให้แทนค่าเรซิดิวที่หาได้ลงไปในทฤษฎีเรซิดิวของโคชี จากทฤษฎีที่ 1 บทที่ 6 ได้คือ

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Res}(f(z), z_m) \quad \text{(ดูตัวอย่างการหาได้ในบทที่ 6)}$$

....