บทที่ 2
พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

2.1 เมตริกซ์และดีเทอร์มินันต์ (Matrices and Determinants)

<u>นิยาม 2.1.1</u> เมตริกซ์ คือ กลุ่มของจำนวน mn จำนวนจัดเรียงกันเป็น m แถว (Row) และ n หลัก (Column) เขียนได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ a_{ij} เป็นสมาชิก (Element) ของเมตริกซ์ที่อยู่ในแถวที่ i และ หลัก ที่ j เราอาจแทนเมตริกซ์นี้ด้วย A หรือ (a_{ij}) นั่นคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

<u>นิยาม 2.1.2</u> เมตริกซ์ A จะเรียกว่า เมตริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) เมื่อจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน (m = n) และบอกได้ว่าเมตริกซ์มีขนาด (order) n.

<u>ตัวอย่าง 2.1</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด 3

<u>นิยาม 2.1.3</u> เวคเตอร์หลัก (Column Vector) คือ เมตริกซ์ที่มีเพียงหลักเดียว

<u>ตัวอย่าง 2.2</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A เป็น เวคเตอร์หลัก

<u>นิยาม 2.1.4</u> เวคเตอร์แถว (Row Vector) คือ เมตริกซ์ที่มีเพียงแถวเดียว

<u>ตัวอย่าง 2.3</u> $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

A เป็น เวคเตอร์แถว

<u>นิยาม 2.1.5</u> เมตริกซ์เฉียง (Diagonal Matrix) คือ เมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวทะแยงไม่เป็นศูนย์ทุกตัว แต่สมาชิกอื่น ๆ เป็นศูนย์หมด

<u>ตัวอย่าง 2.4</u>

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A เป็น เมตริกซ์เฉียง

<u>นิยาม 2.1.6</u> เมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์เรียกว่า เมตริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix) ใช้สัญลักษณ์ $\underset{\sim}{0}$ หรือ (0)

<u>นิยาม 2.1.7</u> เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) คือ เมตริกซ์เฉียง ที่มีสมาชิกในแนวทะแยงทุกตัวเป็น 1 เขียนแทนด้วย I_n หรือ (δ_{ij})

นั่นคือ $I_n = (\delta_{ij})$ ซึ่ง $\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & i = j \end{cases}$

ตัวอย่าง 2.5

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I_3 เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

นิยาม 2.1.8 ทรานสโพสเมตริกซ์ (Transpose Matrix) ของเมตริกซ์ A คือ เมตริกซ์ที่เกิดจากการสลับที่กันระหว่างแถวกับหลักของเมตริกซ์ A เขียนแทนด้วย A'

นั่นคือ ถ้า $A = (a_{ij})$ แล้ว $A' = (a_{ji})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \; \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \; \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \; \ldots\ldots\ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \; \ldots\ldots\ldots & a_{m2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \; \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 2.6 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>นิยาม 2.1.9</u> เมตริกซ์สองเมตริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อเมตริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน และสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากัน

นั่นคือ ให้ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

$A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots,m$

$j = 1,2,\ldots,n$

<u>ตัวอย่าง 2.7</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ฉะนั้น $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$

<u>นิยาม 2.1.10</u> เมตริกซ์ A จะเป็นเมตริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) ก็ต่อเมื่อ $A = A'$ หรือ $(a_{ij}) = (a_{ji})$

<u>ตัวอย่าง 2.8</u>

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

ฉะนั้น $A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ A เป็นเมตริกซ์สมมาตร

<u>นิยาม 2.1.11</u> เมตริกซ์ A จะเป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew - Symmetric Matrix) ก็ต่อเมื่อ $A = -A'$ หรือ $(a_{ij}) = (-a_{ji})$

ตัวอย่าง 2.9

ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

ฉะนั้น $A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $A = -A'$

นั่นคือ A เป็นเมตริกซ์เสมือนสมมาตร

2.2 คอนเวคเซต (Convex Sets)

นิยาม 2.2.1 ส่วนของเส้นตรงและคอนเวคเซต

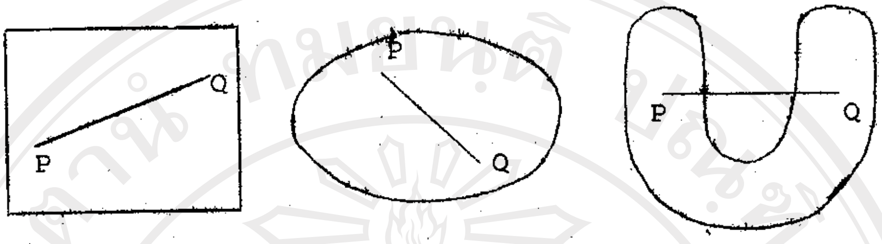
ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด 2 จุด $P = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $Q = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ใน E_n (สเปซที่มี n มิติ) จะเขียนแทนด้วย $\overline{PQ}$ ซึ่งเป็นเซตของจุดโดยที่

$$\overline{PQ} = tP + (1-t)Q = (ta_1 + (1-t)b_1,\ ta_2 + (1-t)b_2,\ \ldots,\ ta_n + (1-t)b_n)$$

และ $0 \leq t \leq 1$

สับเซต X ของ E_n จะเรียกว่าคอนเวคก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการเชื่อมจุด P และ Q ซึ่งอยู่ใน X จะอยู่ใน X ด้วย นั่นคือ ถ้า $P, Q \in X$ แล้ว $\overline{PQ} \subset X$

ตัวอย่าง 2.10



(a) (b) (c)

จากบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใน (a) และอีลิปติค ใน (b) จะได้ว่าเป็น คอนเวคเพราะว่าส่วนของเส้นตรงเกิดจากการเชื่อมจุดภายใน จะอยู่ภายในรูปนั้นด้วย ส่วนบริเวณรูป U จะไม่เป็นคอนเวคเพราะว่าส่วนของเส้นตรงเกิดจากการเชื่อมจุด P และ Q และมีบางจุดของส่วนของเส้นตรงอยู่นอกบริเวณรูป U

นิยาม 2.2.2 คอนเวคคอมบิเนชั่น (Convex Combination) ของจุด $U_1, U_2, \ldots, U_n$ คือ จุด $U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \ldots + \alpha_n U_n$ เมื่อ α_i , $i = 1,2,\ldots,n$ เป็นสเกลาร์ ที่ $\alpha_i \geq 0$ และ $\sum_i \alpha_i = 1$

ตัวอย่าง 2.11 ให้ $U_1 = (3,3)$, $U_2 = (-1,1)$, $U_3 = (-3,-3)$

$(3,3)$ เป็นคอนเวคคอมบิเนชั่นของ U_1 , U_2, U_3 เพราะว่า

$(3,3) = 1U_1 + 0U_2 + 0U_3$ และ $1 + 0 + 0 = 1$

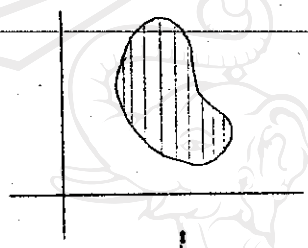
$(-1,-1)$ เป็นคอนเวคคอมบิเนชั่นของ U_1 , U_2 , U_3 เพราะว่า

$(-1,-1) = \frac{1}{3} U_1 + 0U_2 + \frac{2}{3}U_3$ และ $\frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 1$

$(\frac{1}{2},1)$ เป็นคอนเวคคอมบิเนชั่นของ U_1 , U_2 , U_3 เพราะว่า

$(\frac{1}{2},1) = \frac{1}{2}U_1 + \frac{1}{4}U_2 + \frac{1}{4}U_3$ และ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$

<u>นิยาม 2.2.3</u> สับเซต C ของ E_n (สเปซที่มี n มิติ) จะเรียกว่าคอนเวคเซตก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ คู่ ของ จุด U_1 , U_2 ที่อยู่ใน C , คอนเวคคอมบิเนชั่น $U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2$ จะอยู่ใน C ด้วย

<u>ตัวอย่าง 2.12</u>
1. สามเหลี่ยมและจุดภายในสามเหลี่ยมเป็นคอนเวคเซต
2. วงกลม , $X = \left\{ (x_1 , x_2) \;/\; x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \right\}$ จะเป็น คอนเวคเซต แต่เฉพาะขอบของวงกลมจะไม่เป็นคอนเวคเซต
3. 

รูปที่ 1 นี้ ไม่เป็นคอนเวคเซต

รูปที่ 1

4. รูปหลายเหลี่ยมในรูปที่ 2 เป็นคอนเวคเซต

รูปที่ 2

<u>ทฤษฎี 2.2.1</u> ถ้าให้ C เป็นคอนเวคเซตแล้ว คอนเวคคอมบิเนชั่น ของจุดทั้งหลายใน C จะอยู่ใน C ด้วย

<u>พิสูจน์</u> ให้ C เป็นคอนเวคเซต โดยนิยาม 2.2.3 จะได้ว่าสำหรับ 2 จุด U_1 และ U_2 ใน C , คอนเวคคอมบิเนชั่นของ U_1 , U_2 จะอยู่ใน C ด้วย

เราจะต้องพิสูจน์ว่า v ซึ่งเป็นคอนเวคคอมบิเนชั่นของ u_i , (i = 1,2,3) จะอยู่ใน C ด้วย

นั่นคือ $v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$ เมื่อ $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_i \alpha_i = 1$ อยู่ใน C

ให้ $$\alpha'_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

เมื่อ i = 1,2 , $\sum_i \alpha'_i = 1$ และ $\alpha'_i \geqslant 0$ เราจะได้

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha'_1 u_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\alpha'_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2) + \alpha_3 u_3 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2$ อยู่ใน C เพราะว่าเป็นคอนเวคคอมบิเนชั่นของ u_1 , u_2

ให้ $u_4 = \alpha'_1 u_1 + \alpha'_2 u_2$

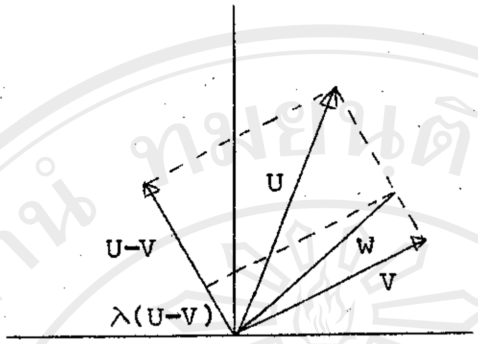
ดังนั้น $v = (\alpha_1 + \alpha_2) u_4 + \alpha_3 u_3$

เพราะว่า u_4 และ u_3 ต่างอยู่ใน C ฉะนั้น คอนเวคคอมบิเนชั่น v ของ u_4 , u_3 จะอยู่ใน C ด้วย

นั่นคือ v จะอยู่ใน C การพิสูจน์นี้จะเป็นจริงทุกค่าของ i

<u>ทฤษฎี 2.2.2</u> ถ้าจุดใด ๆ บนเส้นที่ลากเชื่อมต่อจุด 2 จุดใน E_n แล้ว จุดเหล่านั้นจะกระจายเป็นคอนเวคคอมบิเนชั่นของ 2 จุด นั้นได้

<u>พิสูจน์</u>



รูปที่ 3

ให้ u และ v เป็นจุด 2 จุด ใน E_n

w เป็นจุดอยู่บนเส้นที่ลากเชื่อมต่อ u และ v

จะเห็นว่าเส้นที่ลากเชื่อมต่อ u และ v จะขนานกับเส้นที่กำหนด โดยเวคเตอร์ $u-v$ ดังรูปที่ 3

โดยนิยามการบวกเวคเตอร์และการคูณเวคเตอร์ด้วยสเกลาร์ เราจะได้ว่ามีบางสเกลาร์ λ ซึ่ง $0 \leq \lambda \leq 1$

$$v + \lambda(u - v) = w$$

$$v + \lambda u - \lambda v = w$$

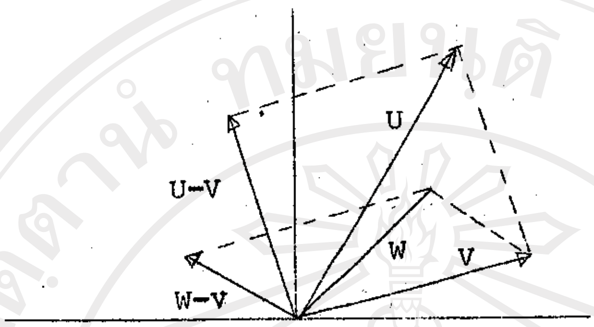
$$(1-\lambda)v + \lambda u = w$$

นั่นคือ w เป็นเวคเตอร์คอมบิเนชั่นของ v และ u

<u>ทฤษฎี 2.2.3</u> บทกลับของทฤษฎี 2.2.2

ถ้าจุดใด ๆ สามารถกระจายเป็นคอนเวคคอมบิเนชั่นของ 2 จุด ใน E_n แล้ว จุดเหล่านั้นจะอยู่บนเส้นที่เชื่อมต่อระหว่าง 2 จุด นั้น

<u>พิสูจน์</u>



รูปที่ 4

ให้ W เป็นจุดใด ๆ , U และ V เป็นจุด 2 จุดใน E_n และ W สามารถเขียนเป็นคอนเวคคอมบิเนชั่นของ U และ V

ดังนั้น $W = (1-\lambda)V + \lambda U$

$W = V - \lambda V + \lambda U$

$W - V = \lambda(U - V)$

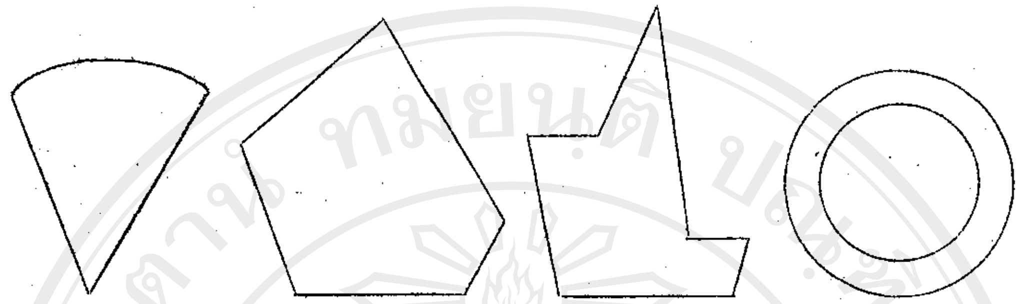
เมื่อ $0 \leq \lambda \leq 1$

จะได้ว่า เวคเตอร์ W − V เป็นเวคเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันกับเวคเตอร์ U − V ตามนิยามการคูณเวคเตอร์ด้วยสเกลาร์ที่เป็นบวก

ฉะนั้น เวคเตอร์ W − V จะไม่สามารถเขียนเป็นโครงร่างดังในรูปที่ 4 เพราะว่าเส้นที่ลากเชื่อม U และ V ขนานกับเส้นที่นิยามโดยเวคเตอร์ U − V และเส้นที่ลากเชื่อม V และ W ขนานกับเส้นที่นิยามโดยเวคเตอร์ W − V ดังนั้น เสนที่เชื่อม V และ U กับเส้นที่เชื่อมด้วย W และ V จะอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

นั่นคือ W จะต้องอยู่บนเส้นเชื่อมต่อ U และ V

ตัวอย่าง 2.13



(a) (b) (c) (d)

รูปที่ 5

จากทฤษฎี 2.2.2 และ 2.2.3 เราจะได้ว่า รูปทรงเรขาคณิตที่เป็นคอนเวคเซต จะต้องถูกจำกัดเขตโดยเส้นเชื่อม 2 จุดใด ๆ ในเซต ดังนั้นในรูปที่ 5 จะเห็นได้ว่า

(a) และ (b) เป็นคอนเวคเซต

(c) และ (d) ไม่เป็นคอนเวคเซต

นิยาม 2.2.4 จุดวิกฤติ (Extreme- point)

จุด u ในคอนเวคเซต c จะเรียกว่าเป็นจุดวิกฤติก็ต่อเมื่อ u ไม่สามารถกระจายเป็นคอนเวคคอมบิเนชั่นของจุด 2 จุด ที่แตกต่างกันใน c

ตัวอย่าง 2.14

1. สามเหลี่ยมและจุดทั้งหลายภายในสามเหลี่ยมประกอบกันเป็นคอนเวคเซต และจุดวิกฤติ คือ จุดยอด (vertices) ทั้งสามของสามเหลี่ยม
2. วงกลม $X = \left\{(x_1, x_2) \,/\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$ เป็นคอนเวคเซต และทุก ๆ จุดบนเส้นรอบวงเป็นจุดวิกฤติ
3. รูปหลายเหลี่ยมที่เป็นคอนเวคเซต จะมีจุดยอดทั้งหลายของรูปหลายเหลี่ยมนั้นเป็นจุดวิกฤติ

2.3 การโปรแกรมเชิงเส้นตรง (Linear Programming)

นิยาม 2.3.1 การโปรแกรมเชิงเส้นตรง คือ ปัญหาที่เกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) f ซึ่ง $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$ โดยที่ $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$,...., $x_m \geq 0$ และฟังก์ชัน f นี้จะเรียกว่า สมการกำหนดเป้าหมาย (Objective Function)

นิยาม 2.3.2 ปัญหาควบคู่ (Dual Problem)

คือปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่เป็นค่าสูงสุดและมีความสัมพันธ์กับปัญหาที่เป็นค่าต่ำสุดและในทางกลับกันก็เช่นเดียวกัน

ทุก ๆ ปัญหาของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง จะมีปัญหาที่ควบคู่กันเหมือนกับฝาแฝด โดยมีลักษณะปัญหาหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าปัญหาเดิม (Primal Problem) เป็นการตั้งเป้าหมายสูงสุดและลักษณะปัญหาฝาแฝดอีกอันหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าปัญหาควบคู่ (Dual Problem) จะเป็นการตั้งเป้าหมายตรงข้ามกันคือต่ำสุด หรือในทางตรงกันข้ามคือปัญหาเดิมมีเป้าหมายต่ำสุด ปัญหาควบคู่จะมีเป้าหมายสูงสุดปัญหาทั้งสองต่อไปนี้จะเรียกว่าเป็นปัญหาควบคู่ของกันและกัน

(i) ปัญหาสูงสุด (ปัญหาของ B)

หาค่าสูงสุดของ $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$

ภายใต้เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &\leq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &\leq b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &\leq b_n
\end{aligned}
$$

โดยที่ $x_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$

(ii) ปัญหาต่ำสุด (ปัญหาของ A)

หาค่าต่ำสุดของ $f = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 + \cdots + b_ny_n$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots\cdots + a_{n1}y_n \geqslant c_1$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots\cdots + a_{n2}y_n \geqslant c_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \cdots\cdots + a_{nm}y_n \geqslant c_m$$

โดยที่ $y_j \geqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

เราสามารถเขียนสัมประสิทธิ์ของ อสมการ เหล่านี้ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

(i) ปัญหาสูงสุด

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & * \end{pmatrix}$$

(ii) ปัญหาต่ำสุด

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} & c_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & * \end{pmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 2.15</u> การเปรียบเทียบรูปแบบปัญหาควบคู่ และปัญหาเดิม

<u>ปัญหาเดิม</u> (Primal Problem)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 16 \\ 1 & 2 & 11 \\ 1 & 3 & 15 \\ 30 & 50 & * \end{pmatrix}$$

<u>ปัญหาควบคู่</u> (Dual Problem)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 30 \\ 1 & 2 & 3 & 50 \\ 16 & 11 & 15 & * \end{pmatrix}$$

<u>ปัญหาเดิม</u>	<u>ปัญหาควบคู่</u>
หาค่าสูงสุดของ $z = 30x_1 + 50x_2$	หาค่าต่ำสุดของ $z' = 16y_1 + 11y_2 + 15y_3$
ภายใต้เงื่อนไข $2x_1 + x_2 \leq 16$	ภายใต้เงื่อนไข $2y_1 + y_2 + y_3 \geq 30$
$x_1 + 2x_2 \leq 11$	$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 50$
$x_1 + 3x_2 \leq 15$	$y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0$, $y_1 \geq 0$	

จากคุณสมบัติควบคู่ของปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง (Duality Property)

พบว่า การหาค่าสูงสุดของ z = การหาค่าต่ำสุดของ z'

โดยที่ z คือ ผลลัพธ์เป้าหมายของปัญหาเดิม

z' คือ ผลลัพธ์เป้าหมายของปัญหาควบคู่

<u>นิยาม 2.3.3</u> วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method)

เป็นวิธีทางพีชคณิตที่อาศัยทฤษฎีของเมตริกซ์ช่วยจัดรูปแบบปัญหาให้มีระบบยิ่งขึ้น ช่วยให้สังเกตความเปลี่ยนแปลงของตัวแปรได้ง่าย และสามารถเข้าใจแนวทางที่ตัวแปร แต่ละตัวจะเปลี่ยนไปอย่างมีเหตุมีผล

ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพล็กซ์

ขั้นตอนที่ 1 จากรูปแบบการโปรแกรมเชิงเส้นตรงจัดรูปแบบสมการขยายใหม่ แล้วเข้าสู่ตารางดังต่อไปนี้

หาค่าสูงสุดของ $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$

ภายใต้เงื่อนไข

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$

สมการขยายจะเป็น

$$Z - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 = 0$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + x_4 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + x_5 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + x_6 = b_3$$

ตารางเพื่อหาผลลัพธ์เบื้องต้น (Initial basic feasible solution) จะเป็นดังนี้

ค่าตัวแปรของผลลัพธ์ (Basic Variable)	ค่าเป้าหมาย (Objective Value)	ค่าตัวแปรเปลี่ยนฺ (Decision Variable)			ค่าตัวแปรเพิ่ม (Slack, Artificial Variable)			ค่าผลลัพธ์ (Solution)	
	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
Z	1	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	0	0	0	0	สมการเป้าหมาย
x_4	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1	สมการขอบขาย
x_5	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	b_2	
x_6	0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3	

ภายในตารางจะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรโดยมีหลักเกณฑ์ของวิธีซิมเพล็กซ์ กำหนดไว้ว่าตัวแปรเพิ่มขึ้นต้องเป็น เมตริกซ์เอกลักษณ์

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> พิจารณาจากค่าต่าง ๆ บนตารางในขั้นตอนที่ 1 ซึ่งถือว่าเป็นผลลัพธ์เบื้องต้นได้ดังนี้

(1) เริ่มค่าตัวแปรเปลี่ยน (Non-basic Variable) เป็นศูนย์หมดคือ x_1 , x_2 , $x_3 = 0$ อันนี้เป็นจุดเริ่มต้นที่มั่นใจได้ว่าตัวแปรทุกตัวต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

(2) ค่าของสมการเป้าหมายซึ่งได้จาก $z - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 = 0$ จะมีค่า $z = 0$ ด้วย

(3) ค่าตัวแปรเพิ่มต่าง ๆ อ่านจากผลลัพธ์ของค่าตัวแปรของผลลัพธ์ (Basic Variable) ได้ดังนี้

$$x_4 = b_1$$

$$x_5 = b_2$$

$$x_6 = b_3$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> พิจารณาทดสอบผลลัพธ์ว่าดีที่สุดแล้วหรือยัง การทดสอบผลลัพธ์ในขั้นตอนนี้ เรียกว่าทดสอบหลักเกณฑ์ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

.ราจะรู้ได้อย่างไรว่า ผลลัพธ์ที่ได้จะดีที่สุดแล้วหรื .ยัง ? ลองมาวิเคราะห์สมการเป้าหมาย $z - c_1x_1 - c_2x_2 - c_3x_3 = 0$ โดยการแทน x_1 , x_2 , $x_3 = 0$ มีผลทำให้ $z = 0$ จะเห็นว่าถ้าเราเพิ่มค่าของตัวแปร x_1 , x_2 , x_3 ตัวหนึ่งตัวใด จะมีผลทำให้ค่า z สูงขึ้น เช่น $z - c_1x_1 - c_2x_2 = c_3x_3$ นั่นคือ ถ้าเพิ่มค่า x_3 เพียงค่าเดียวจะมีผลทำให

$z = c_3x_3$ มีค่าสูงขึ้นเท่ากับ c_3x_3 จากข้อสังเกตนี้เองจะเห็นได้ว่า ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ในตารางที่เป็นสมการเป้าหมาย ยังมีค่าเป็นลบอยู่ในตาราง การเพิ่มค่าตัวแปรของสัมประสิทธิ์นั้น ๆ จะมีผลทำให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มขึ้น หรืออีกนัยหนึ่ง ถ้าค่า c_1 , c_2 และ c_3 ดังกล่าว ยังติดเครื่องหมายลบอยู่ การดำเนินการเพื่อหาผลลัพธ์ที่ดีขึ้นยังต้องทำกันต่อไป

<u>หมายเหตุ</u> กรณีดังกล่าวข้างต้นใช้กับปัญหาเพื่อได้ผลสูงสุดเท่านั้น ถ้าให้ได้ผลต่ำสุดการใช้เครื่องหมายในทางตรงข้ามกับข้างต้น เป็นหลักเกณฑ์ของผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> (ก) พิจารณาหาตัวแปรที่จะเพิ่มค่า ซึ่งมีผลทำให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มขึ้น การเพิ่มค่าตัวแปรพิจารณาจากค่าตัวแปรที่ให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มได้มากที่สุด สังเกตได้จากสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเปลี่ยนมีค่าลบสูงสุด ซึ่งเมื่อย้ายข้างมาด้านขวาของสมการเป้าหมายในตารางจะเป็นสัมประสิทธิ์บวกสูงสุด จากตาราง ถ้า c_2 มีค่าลบสูงสุด x_2 จะเป็นตัวแปรที่เราเพิ่มค่าให้ก่อน

(ข) พิจารณาตัวแปรเพื่อลดค่าจากตัวแปรเพิ่ม ซึ่งมีค่า $x_4 = b_1$, $x_5 = b_2$, $x_6 = b_3$

การพิจารณาหาตัวลดค่าเพื่อเพิ่มค่า x_2 นั้น จะต้องลดค่าตัวแปรเพิ่มให้มากที่สุด ภายใต้เงื่อนไขขอบข่าย โดยพิจารณาจากผลหารตามแนวนอนตัวต่อตัว ดังนี้ $\frac{b_1}{a_{12}}$, $\frac{b_2}{a_{22}}$, $\frac{b_3}{a_{32}}$ เลือกค่าผลหารน้อยที่สุด เช่น ถ้า $\frac{b_2}{a_{22}}$ น้อยที่สุด ตัวแปรที่จะลดค่า คือ x_5

ตัวแปรเข้า

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
z	1	c_1	c_2	c_3	0	0	0	0
x_4	0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	0	b_1
x_5	0	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	0	b_2
x_6	0	a_{31}	a_{32}	a_{33}	0	0	1	b_3

เราเรียกตัวที่เพิ่มค่าของตัวแปรในตารางว่า " ตัวแปรเข้า " (x_2) และตัวแปรที่ลดค่าว่า " ตัวแปรออก " (x_5)

พิจารณาจากแถวนอนของตัวแปรออกจะได้สมการ

$$a_{22}x_2 + x_5 = b_2 \quad \text{โดยที่} \quad x_1 , x_3 = 0$$

เมื่อลดค่า $x_5 = 0$, $x_2 = \frac{b_2}{a_{22}}$

เราแทนค่า x_2 เป็นตัวแปรเข้ามีค่า $\frac{b_2}{a_{22}}$ ในตารางโดยวิธีหารแถวนอนของตัวแปรลดค่าหรือตัวแปรออกด้วย a_{22} ดังนั้น สัมประสิทธิ์ในช่องที่เกิดจากการตัดกันของแนวตั้งของตัวแปรเข้าและแถวนอนของตัวแปรออกจะมีค่าเป็น 1 และเราเรียกจุดนี้ว่า " จุดหมุน " (Pivot Point)

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> จากจุดหมุน เราใช้วิธีทางพีชคณิตทำสัมประสิทธิ์อื่น ๆ ในหลักนั้น ให้เป็นศูนย์ ผลที่ได้จะทำให้ค่า z มีผลลัพธ์สูงขึ้นดังนี้

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
z	1	$-c'_1$	0	$-c'_3$	0	c'_5	0	$c_2b'_2$
x_4	0	a'_{11}	0	a'_{13}	1	a_{15}	0	b'_1
x_2	0	a'_{21}	1	a'_{23}	0	a_{25}	0	b'_2
x_6	0	a'_{31}	0	a'_{33}	0	a_{35}	1	b'_3

<u>ตัวอย่าง 2.16</u> หาค่าสูงสุดของ $z = x_1 - 3x_2 + x_3$

ภายใต้เงื่อนไข

$$2x_1 + 4x_2 \leq 7$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 12$$
$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, 3$$

<u>วิธีทำ</u> (1) รูปแบบสมการขยาย คือ

$$z - x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_4 = 7$$
$$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_5 = 12$$
$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_6 = 10$$

จะเขียนเป็นตารางผลลัพธ์เบื้องต้นได้ดังนี้

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
z	1	-1	3	-1	0	0	0	0
x_4	0	2	4	0	1	0	0	7
x_5	0	4	3	8	0	1	0	12
x_6	0	3	-2	2	0	0	1	10

(2) $x_1 , x_2 , x_3 = 0 , z = 0$

$x_4 = 7 , x_5 = 12 , x_6 = 10$

(3) สัมประสิทธิ์จากสมการเป้าหมายยังเป็น -1 สำหรับ x_1 และ -1 สำหรับ x_3

(4) ตัวแปรเพิ่มจะเป็น x_1 หรือ x_3 ตัวใดตัวหนึ่งในที่นี้ใช้ x_1 ตัวแปรลดคือ x_5 โดยการคิดค่าน้อยที่สุดระหว่าง $\left\{\frac{7}{2}, \frac{12}{4}, \frac{10}{3}\right\}$ จุดหมุนคือ $a_{21} = 4$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
z	1	0	15/4	1	0	1/4	0	3
x_4	0	0	5/2	-4	1	-1/2	0	1
x_1	0	1	3/4	2	0	1/4	0	3
x_6	0	0	-17/4	-4	0	-3/4	1	1

เมื่อพิจารณาตารางผลลัพธ์รอบที่ 1 แล้วปรากฏว่า ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสมการเป้าหมายในตารางเป็นบวกหมด ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้จากตารางนี้จึงเป็นคำตอบที่ต้องการ

ฉะนั้น ผลลัพธ์ คือ $x_1 = 3$, $x_4 = 1$, $x_6 = 1$ และ $z = 3$

x_2 , x_3 , $x_5 = 0$

จากตัวอย่างวิธีทางซิมเพล็กซ์ที่แสดงมา เป็นปัญหาที่มีเงื่อนไขของอสมการ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ ($\leq$) ซึ่งจะทำให้เกิดสมการขอบข่ายได้โดยเพียงแต่เพิ่มค่าตัวแปรเพิ่ม (Slack Variable)

ยังมีอีกสองกรณีซึ่งจะต้องเพิ่มค่าตัวแปร ซึ่งเป็นค่าที่ไม่มีความหมายในเชิงตัวเลข โดยเป็นเพียงตัวแปรที่จัดเข้ามาเพื่อช่วยในการคำนวณหาผลลัพธ์ได้ถูกต้องยิ่งขึ้น กรณีของอสมการขอบข่ายทั้งสองกรณี คือ กรณีที่อยู่ในรูปมากกว่า

หรือเท่ากับ ($\geqq$) ซึ่งตัวแปรที่ไม่มีความหมายในเชิงตัวเลขเรียกว่า ตัวแปรเทียม (Artificial Variable) ซึ่งจะถูกนำมาเข้าตารางประกอบเป็นส่วนเมตริกซ์เอกลักษณ์ ช่วยให้ขั้นตอนในการผลลัพธ์เป็นไปตามที่กล่าวมาแล้ว อย่างไรก็ตาม ถ้าเราใช้วิธีการซิมเพล็กซ์เหมือนอย่างที่ทำมา จะไม่สามารถหาผลลัพธ์ออกมาได้ จึงจำเป็นต้องอาศัยวิธีการที่พัฒนามาใช้หาโดยเฉพาะ

การใช้ตัวแปรเทียม (The Use Of Artificial Variable) จะแสดงให้เห็นว่า คำตอบพื้นฐานเริ่มต้นที่เป็นไปได้ (Starting Basic Feasible Solution) หามาได้อย่างไร เมื่อตัวแปรเพิ่ม (Slack Variables) ไม่ได้เป็นคำตอบพื้นฐาน ข้อสังเกตโดยทั่วไปของกรณีนี้ก็คือจะมีข้อจำกัดอย่างน้อยหนึ่งข้อจำกัดที่อยู่ในรูปของเครื่องหมาย (=) หรือ ($\geqq$) เราจะเสนอวิธีเทคนิค M (The M - Technique)

เทคนิค M

ขั้นที่ 1 เปลี่ยนการโปรแกรมเชิงเส้นตรงให้อยู่ในแบบมาตรฐาน

ขั้นที่ 2 บวกตัวแปร ที่ไม่เป็นลบ (Nonnegative) ลงไปทางซ้ายมือของสมการข้อจำกัดที่มีอยู่ในรูปของเครื่องหมาย ($\geq$) และ (=) ตัวแปรที่บวกเข้าไปนี้เรียกว่า " ตัวแปรเทียม " (Artificial) ความยุ่งยากของตอนนี้ก็คือ ต้องแน่ใจว่าตัวแปรเทียม จะเป็นศูนย์ในคำตอบขั้นสุดท้าย (ถ้าปัญหาไม่มีคำตอบ จะมีตัวแปรเทียมอย่างน้อยหนึ่งตัวมีค่าเป็นบวกในขั้นสุดท้าย) ซึ่งจะทำได้โดยการสร้างจำนวนที่ใหญ่มากต่อหน่วยขึ้นมาสำหรับตัวแปรเทียม ในสมการเป้าหมาย ซึ่งค่านี้จะเป็น $-M$ สำหรับการหาค่าสูงสุด และเป็น $+M$ สำหรับการหาค่าต่ำสุด โดยที่ $M > 0$

ขั้นที่ 3 ใช้ตัวแปรเทียมเป็นคำตอบพื้นฐานเริ่มต้น เพื่อสะดวกในการนำค่าต่าง ๆ ไปลงตาราง และจะต้องทำสมการเป้าหมายสูงสุดให้อยู่ในเทอมของตัวแปรเปลี่ยน (Nonbasic Variable) เท่านั้น หมายความว่า สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเทียมจะต้องเป็นศูนย์ใช้วิธีซิมเพล็กซ์ธรรมดา

ตัวอย่าง 2.17

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{Subject to} \quad 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

แปลงเป็นแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{Subject to} \quad 3x_1 + x_2 &= 3 && (1) \\ 4x_1 + 3x_2 - s_1 &= 6 && (2) \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 3 && (3) \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

สมการ (1) และ (2) ยังหาตัวแปรพื้นฐานเริ่มต้นที่เป็นไปได้ไม่ได้ แต่ s_2 ใช้เป็นตัวแปรพื้นฐานเริ่มต้นของ (3) ได้ ดังนั้นจะต้องบวกตัวแปรเทียมเข้าไปใน (1) และ (2) และเปลี่ยนแปลงสมการเปาหมายสูงสุดให้สอดคล้องกันได้ดังนี้

$$\text{Minimize} \quad z = 4x_1 + x_2 + MR_1 + MR_2$$

$$\begin{aligned} \text{Subject to} \quad & 3x_1 + x_2 + R_1 = 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6 \\ & x_1 + 2x_2 + s_2 = 3 \end{aligned}$$

x_1 , x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 ≥ 0 และ M เป็นค่าบวกที่ใหญ่มาก เขียนตารางได้ดังนี้

Basic	z	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Solution
z	1	-4	-1	0	-M	-M	0	0
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	0	1	2	0	0	0	1	3

ตารางที่ 2.3.1

สมการเป้าหมายสูงสุดจะต้องอยู่ในเทอมของตัวแปรเปลี่ยน เพื่อที่จะได้ค่าต่อหน่วยของตัวแปรแต่ละตัว กล่าวได้ว่า ตารางจะอยู่ในแบบที่ถูกต้อง ถ้าสัมประสิทธิ์แต่ละตัวของตัวแปรพื้นฐานเริ่มต้น (Starting Basic Variable)ในสมการ z เป็นศูนย์

ดังนั้น ในตารางที่ 2.3.1 จะต้องมีการเปลี่ยนแปลงค่าสัมประสิทธิ์ของ R_1 และ R_2 ในสมการ z ซึ่งจะหาได้โดยวิธีการดังนี้

สมการ z ใหม่ = สมการ z เดิม + M สมการ R_1 + M สมการ R_2 ซึ่งจะได้ผลดังตารางที่ 2.3.2

Basic	z	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Solution
z	1	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	9M
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6
s_2	0	1	2	0	0	0	1	3

ตารางที่ 2.3.2

มีข้อสังเกตว่า ปัญหาในข้อนี้เป็นการหาค่าต่ำสุด ตัวแปรเข้าจะต้องมีสัมประสิทธิ์ในสมการ z เป็นบวกมากที่สุด ดังนั้น จะได้การกระทำครั้งที่ 1 มี x_1 เป็นตัวแปรเข้า และ R_1 เป็นตัวแปรออก

<u>การกระทำครั้งที่ 1</u>

Basic	z	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Solution
z	1	0	$\frac{1+5M}{3}$	$-M$	$\frac{4-7M}{3}$	0	0	$4+2M$
x_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1
R_2	0	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{4}{3}$	1	0	2
s_2	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	2

ตารางที่ 2.3.3

การกระทำครั้งที่ 2 ได้ x_2 เป็นตัวแปรเข้า และ R_2 เป็นตัวแปรออก

Basic	z	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Solution
z	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}-M$	$-\frac{1}{5}-M$	0	$\frac{18}{5}$
x_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
s_2	0	0	0	1	1	-1	1	0

ตารางที่ 2.3.4

การกระทำครั้งที่ 3 ได้ s_1 เป็นตัวแปรเข้า และ s_2 เป็นตัวแปรออก

Basic	z	x_1	x_2	s_1	R_1	R_2	s_2	Solution
z	1	0	0	0	$\frac{7}{5}-M$	$-M$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{18}{5}$
x_1	0	1	0	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
s_1	0	0	0	1	1	-1	1	0

ตารางที่ 2.3.5

จากตารางที่ 2.3.4 จะเห็นว่าได้คำตอบที่ดีที่สุด คือ $x_1 = \frac{3}{5}$

$x_2 = \frac{6}{5}$ และ $z = \frac{18}{5}$