บทที่ 3

พื้นฐานของเกมส์ในการแข่งขัน

3.1 ความหมายของเกมส์

คำว่าเกมส์ในที่นี้ จะหมายถึง การแข่งขัน ซึ่งมีผลได้ผลเสียเป็นเดิมพัน ดังนั้น คำว่า เกมส์ จึงมีความหมายไปถึงการมีผลประโยชน์ขัดกันในระหว่างผู้แข่งขัน ทั้งนี้เพราะว่าการชนะหรือได้ของฝ่ายหนึ่ง ก็หมายถึงการแพ้หรือการเสียผลประโยชน์ของอีกฝ่ายหนึ่ง เมื่อผลประโยชน์ขัดกันในระหว่างผู้แข่งขัน จึงจำเป็นต้องมีการตกลงกันในกฎของการแข่งขัน เพื่อให้ทุกฝ่ายต้องเข้าแข่งกันในภายใต้ขอบเขตเดียวกัน หรือเกมส์เป็นเซตที่รวมขอบข่ายของกฎแห่งการตัดสินใจของปัญหาการแข่งขัน (competitive Problem)เกมส์กีฬาในร่มต่างก็เข้ากฎนี้ คือ มีกฎในการแข่งขันของแต่ละเกมส์โดยเฉพาะ เช่น หมากรุก หมากฮอส ปิงปอง แบดมินตัน เป็นต้น ซึ่งก็มีผลดีคือแต่ละฝ่ายสามารถวิเคราะห์การเล่นตามกฎ และข้อกำหนดที่วางไว้ ส่วนการแข่งขันในด้านสังคม และธุรกิจนั้น มีคุณลักษณะพิเศษหลายอย่างที่แตกต่างไปจากการแข่งขันกีฬาในร่ม

3.2 คุณสมบัติของเกมส์ในการแข่งขัน

เราจะเรียกสภาพการแห่งการแข่งขัน(competitive Situation) ว่าเป็นเกมส์การแข่งขัน (Competitive Games)ถ้ามีคุณสมบัติ 4 ข้อ ดังต่อไปนี้

1. มีผู้แข่งขัน (player or competitor) เป็นจำนวนที่นับได้ (Finite)

2. ผู้แข่งขันแต่ละคน มีแผนการของการแข่งขันของตนเป็นจำนวนที่นับได้ ซึ่งแผนการของแต่ละคนไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน และจำนวนแผนการแข่งขันของแต่ละคนก็ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน

3. การแข่งขันเริ่มขึ้นก็ต่อเมื่อผู้แข่งขันแต่ละคนเลือกแผนการของการแข่งขันอันใดอันหนึ่งของตน และการเลือกแผนการนั้นถือได้ว่ากระทำขึ้นพร้อม ๆ กัน โดยที่แต่ละฝ่ายไม่อาจทราบ การเลือกแผนการแข่งขันของกันและกันเลย ว่าคู่แข่งขันของตน จะใช้แผนการแข่งขันแบบไหน

4. ผลของเกมส์นั้น จะรู้ได้เมื่อผู้แข่งขันต่างก็เผยแผนการแข่งขันที่ตนเลือกออกแสดงพร้อม ๆ กัน ซึ่งจะสามารถบอกผลของเกมส์ได้เลยว่า ผู้ใดเป็นฝ่ายได้ ผู้ใดเป็นฝ่ายเสีย และผู้ใดไม่ได้ไม่เสียหรือเสมอตัว (positive, Negative or Zero)

การแข่งขันในระบบของเกมส์ ถ้าสมมุติว่ามีผู้เข้าแข่งขันทั้งสิ้น N คน และสมมุติว่าผู้แข่งขันคนที่ i ($i = 1, 2, \ldots, n$) มีแผนการที่ตนจะเลือกใช้ในการแข่งขันอยู่ n_i แผน ดังนั้นผลลัพธ์ในการเล่นเกมส์ที่อาจจะเกิดขึ้นได้มีจำนวนทั้งสิ้นเท่ากับ $n_1, n_2, \ldots, n_n$ สมมุติว่า θ เป็นผลลัพธ์อันหนึ่งของเกมส์ ในจำนวนผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นได้ทั้งหมด ดังนั้นจะยังผลให้ผู้แข่งขันคนที่ i ได้ผลตอบแทนเป็นจำนวนเท่ากับ $R(i, \theta)$ ซึ่งเป็นได้ทั้งค่าบวก , ค่าลบ หรือจำนวนศูนย์ และถ้า

$$\sum_{i=1}^{N} R(i, \theta) = 0$$

จะเรียกเกมส์การแข่งขันแบบนี้ว่า " เกมส์ที่มีผลรวมเป็นศูนย์ " (Zero Sum Game) นั่นคือในเกมส์ที่ผลรวมเป็นศูนย์นี้หมายความว่าผลได้หรือผลเสียของผู้เข้าแข่งขันทุก ๆ คน เมื่อเอามารวมกันเมื่อเกมส์สิ้นสุดลงจะมีผลลัพธ์เท่ากับศูนย์

3.3 <u>เกมส์ที่ผลรวมของสองฝ่ายเป็นศูนย์</u> (Two - Person Zero - Sum Games)

เป็นเกมส์ที่ประกอบด้วยผู้แข่งขันสองคน ซึ่งผลบวกของส่วนได้ส่วนเสียของผู้แข่งขันทั้งสองเป็นศูนย์ ผลประโยชน์ที่จะได้จากการแข่งขันของผู้แข่งขันทั้งคู่จะขัดกัน นั่นคือ ในการแข่งขันแต่ละครั้ง จำนวนผลประโยชน์ที่ผู้หนึ่งได้ ก็คือจำนวนผลประโยชน์ที่ผู้หนึ่งเสียไป เช่น หมากฮอส หมากรุก เป็นต้น โดยทั่วไปแล้วมักนิยมแสดงด้วยเมตริกซ์สองเมตริกซ์ สมมุติให้ผู้แข่งขันทั้งสองคนเป็น A และ B (เราจะสมมุติเช่นนี้ตลอดไป) เมตริกซ์หนึ่งเป็นผลได้ของ A ส่วนอีกเมตริกซ์หนึ่งแสดงผลได้ของ B โดยค่าตัวเลขในตารางเมตริกซ์เป็นจำนวนจริง ซึ่งบอกถึงผลประโยชน์ที่ได้รับ เนื่องจากการแข่งขันเกมส์ที่มีเพียงสองคน คือ A กับ B และผลรวมของการแข่งขันเกมส์นี้เท่ากับศูนย์ ดังนั้น จำนวนผลประโยชน์ที่ผู้แข่งขัน B ได้รับ คือ ค่าลบของจำนวนผลประโยชน์ที่ผู้แข่งขัน A ได้รับ เมตริกซ์ทั้งสองซึ่งแสดงถึงผลประโยชน์ที่ได้รับของผู้แข่งขันเกมส์ทั้งสองคนอาจแสดงได้ดังนี้

	A's \ B	1	2	n
	1	a_{11}	a_{12}	a_{1n}
A	2	a_{21}	a_{22}	a_{2n}
	m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mn}

เมตริกซ์ผลลัพธ์ของ A

	B's \ B	1	2	n
	1	$-a_{11}$	$-a_{12}$	$-a_{1n}$
A	2	$-a_{21}$	$-a_{22}$	$-a_{2n}$
	m	$-a_{m1}$	$-a_{m2}$	$-a_{mn}$

เมตริกซ์ผลลัพธ์ของ B

เกมส์ที่กล่าวนี้มีผู้แข่งขันสองคน คือ A กับ B เนื่องจากผลประโยชน์ที่ฝ่ายหนึ่งได้ก็คือผลประโยชน์ที่อีกฝ่ายหนึ่งเสียไป ซึ่งเป็นจำนวนเท่ากัน ดังนั้น เกมส์ที่มีผู้แข่งขันสองคน และผลรวมเท่ากับศูนย์ จึงนิยมแสดงเฉพาะเมตริกซ์ของผลลัพธ์ของผู้แข่งขัน A เพียงเมตริกซ์เดียว ส่วนเมตริกซ์ผลลัพธ์ของผู้แข่งขัน B ก็จะละทิ้งไปโดยละไว้ในฐานที่เข้าใจว่าเป็นค่าลบของเมตริกซ์ผลลัพธ์ของผู้แข่งขัน A นั่นเอง นั่นคือ เราจะบอกได้ว่าจำนวนแถวของเมตริกซ์ ก็คือแผนการที่ผู้แข่งขัน A มีอยู่ทั้งหมด ส่วนจำนวนหลักของเมตริกซ์ ก็คือแผนการที่ผู้แข่งขัน B มีอยู่ทั้งหมด

<u>หมายเหตุ</u> หนังสือบางเล่มแสดงตารางเมตริกซ์ แสดงดังนี้

A \ B	B_1	B_2	....	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}
A_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}

หรือใช้สัญญลักษณ์ $\|a_{ij}\|$ $(i = 1, 2, \ldots m$ และ $j = 1, 2, \ldots, n)$ แทนเมตริกซ์

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

เพื่อที่จะให้เข้าใจความหมายได้ดียิ่งขึ้นให้เรามาพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> เกมส์หนึ่งประกอบด้วยผู้แข่งขัน (player) 2 คน คือ A และ B ถ้า A เลือกตัวเลข s จากเซต $\{-1, 0, 1\}$ ในขณะที่ B เลือกตัวเลข t จากเซต $\{-1, 0, 1\}$ เมื่อทั้งสองฝ่ายเลือกเสร็จแล้ว B ต้องจ่ายให้ A เป็นจำนวน $\{s(t-s) + t(t+s)\}$ ซึ่งแทนผลลัพธ์ (outcome) ของผู้แข่งขันทั้งสองฝ่ายได้ตกลงกัน หมายความว่า B อาจจะเป็นผู้ได้หรือเสียก็ได้ ลองมาพิจารณาดูว่า A และ B ควรเลือกตัวเลขตัวไหน จึงจะทำให้แต่ละฝ่ายได้รับผลลัพธ์ที่ดีที่สุด ผลลัพธ์ที่ได้ไม่เป็นเพียงผลมาจากการเลือกของผู้เล่นคนใดคนหนึ่งเท่านั้น แต่ขึ้นอยู่กับคู่แข่งขันทั้ง 2 คน เพื่อที่จะดูผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้น เราจะสร้างตารางแสดงผลลัพธ์ (Pay off Matrix) มาช่วยอธิบาย กล่าวคือการสร้างตารางแสดงผลลัพธ์นั้นจะขึ้นอยู่กับการเลือกแผนการ (strategy) ของทุกฝ่าย ในที่นี้จะให้ A เลือกทางแถว ส่วน B เลือกทางหลัก โดยทางด้าน แถว ของเมตริกซ์ จะเป็นพฤติกรรมการกระทำของ A ส่วนทางด้านหลักจะเป็นพฤติกรรมการกระทำของ B สำหรับสมาชิกของเมตริกซ์นั้น จะแสดงผลลัพธ์ ซึ่งได้ตกลงกันไว้ ถ้าเครื่องหมายเป็นบวก A จะเป็นฝ่ายได้ (ซึ่งหมายถึง B เสีย) แต่ถ้าเครื่องหมายเป็นลบ B จะเป็นฝ่ายได้ (ซึ่งหมายถึง A เสีย) จะได้ตารางแสดงผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

		B (เลือก t)		
		-1	0	1
A (เลือก s)	-1	2	-1	-2
	0	1	0	1
	1	-2	-1	2

จากตารางแสดงผลลัพธ์นี้เรามาพิจารณาดูว่าใครได้หรือเสีย ถ้า A เลือก s = -1 ในขณะที่ B เลือก t = 1 ใครเป็นฝ่ายได้หรือเสียเท่าไร

จากข้อตกลงที่ว่า $\{s(t-s) + t(t+s)\}$ เมื่อ $s = -1$, $t = 1$ จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ $\{-1(1-(-1) + 1(1 + (-1))\} = -2 = a_{13}$ นั่นคือ B จะเป็นฝ่ายได้ 2 (เพราะเครื่องหมายเป็นลบ)

แต่ถ้า A เลือก $s = 0$ B ก็ควรเลือก $t = 0$ ด้วยเพราะจะเสมอกัน คือไม่ได้ไม่เสีย ถ้าหาก B เลือก $t = -1$ หรือ $t = 0$ ขณะที่ A เลือก $s = 1$ แล้ว A จะเป็นฝ่ายเสียฝ่ายเดียวเท่านั้น

ในทำนองเดียวกันนี้ ถ้า A หรือ B เลือกค่า s หรือ t ตัวอื่น ๆ ก็มีหลักในการพิจารณาเหมือนเดิม ว่าใครได้หรือเสียโดยแทนค่าลงในข้อตกลงกัน ซึ่งทั้งหมดนี้ได้แสดงไว้ในสมาชิกของเมตริกซ์แล้ว

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า A ได้กำไรสูงสุดจะเรียก A ว่า เป็นผู้แข่งขันที่ได้มากที่สุด (Maximizing Player)และเรียก B ว่า เป็นผู้แข่งขันที่ได้น้อยที่สุด (Minimizing Player)

<u>ตัวอย่างที่ 3.2</u> พิจารณาเกมส์การโยนเหรียญ ซึ่งมีสองหน้าคือ หัว กับ ก้อย เกมส์นี้มีผู้แข่งขัน 2 คน คือ A และ B ต่างก็โยนเหรียญ 2 ครั้ง อิสระต่อกัน แล้วนำผลมาเปรียบเทียบกัน ถ้าผลการโยนเป็นหัวหรือก้อยทั้งคู่แล้ว A เป็นฝ่ายได้เงินจาก B และแทนตัวเลขในตารางด้วย +1 แต่ถ้าผลออกมาทั้งคู่เป็นหัวหรือก้อยอันใดอันหนึ่งแล้ว B เป็นฝ่ายได้เงินจาก A (ซึ่งหมายถึง A เสียเงิน) และแทนตัวเลขในตารางด้วย -1 ดังนั้น เกมส์นี้เราสามารถรวมและเขียนเป็นตารางได้ดังนี้

ผู้แข่งขัน B

B \ A	หัว	ก้อย
หัว	1	-1
ก้อย	-1	1

ผู้แข่งขัน A

หรือเขียนได้ว่า $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเรียกว่าตารางแสดงผลลัพธ์และสมาชิก

ในตารางแต่ละค่าเกิดจากผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ (หัว , หัว) , (หัว , ก้อย) , (ก้อย , หัว) , (ก้อย , ก้อย) ค่าลบในตารางแทนค่าที่ B ได้

3.4 <u>แผนการในการแข่งขัน</u>

แผนการ (Strategy) ในการแข่งขันของผู้หนึ่งผู้ใด คือกฎที่เขาใช้ในการตัดสินใจเลือกแผนการอันหนึ่งจากแผนการทั้งหมดที่เขามีอยู่ออกมาทำการแข่งขัน แผนการที่เขาตัดสินใจเลือกมาใช้แต่ละครั้งนั้น จะไม่ขึ้นอยู่กับการที่เขาสามารถรู้ล่วงหน้าว่าคู่แข่งขันจะเลือกแผนการไหนมาตอบโต้เขา และผลลัพธ์ของเกมส์จะปรากฏเมื่อคู่แข่งขันต่างเผยแผนการของตนเลือกออกมาพร้อม ๆ กัน ในที่นี้เราแบ่งแผนการออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. <u>แผนการบริสุทธิ์</u> (Pure Strategy) คือ แผนการหนึ่งในจำนวนแผนการทั้งหมดที่มีอยู่ ซึ่งผู้แข่งขันจะตัดสินใจเลือกแผนการนี้เท่านั้นในการแข่งขันทุกครั้ง ทั้งนี้ก็เพราะว่าเป็นแผนการที่ดีที่สุดของผู้แข่งขัน ซึ่งแผนการนี้จะประกันผลได้หรือผลเสียของคู่แข่งขันว่าจะไม่ด้อยไปกว่าที่เขาคาดประมาณไว้

2. แผนการผสม(Mixed Strategy) คือ แผนการหนึ่ง ๆ ในจำนวนแผนการทั้งหมดที่มีอยู่ ซึ่งผู้แข่งขันจะนำออกมาใช้ในการแข่งขันแต่ละครั้งจะขึ้นอยู่กับการแผกระจายความน่าจะเป็น(Probability Distribution) นั่นคือ ในแผนการผสมนั้น ผู้แข่งขันจะไม่ใช้แผนการเดียวตลอดทุก ๆ การแข่งขันเหมือนกับแผนการบริสุทธิ์ เพราะถ้าเขานำเอาแผนการผสมออกมาใช้แล้ว ค่าเฉลี่ยที่เขาจะได้จากการแข่งขันหลาย ๆ ครั้ง (Expected Value) จะมีค่ามากกว่าการที่เขานำแผนการบริสุทธิ์มาใช้ในการแข่งขัน ดังนั้นแผนการผสมนี้ เขาจะเลือกใช้มากกว่าหนึ่งแผนการตลอดการแข่งขัน ส่วนจะใช้แผนการใดมาก แผนการใดน้อยก็ขึ้นอยู่กับการแผกระจายความน่าจะเป็นที่กำหนดไว้สำหรับแผนการนั้น

หลักเกณฑ์แมกซิมินหรือมินนิแมกซ์ (Maximin or minimax Criteria)

ในเกมส์การแข่งขัน ผู้แข่งขันจะเลือกแผนการที่คิดว่าจะให้ผลประโยชน์แก่ตนได้หลายแบบ แต่ละแบบก็มีหลักเกณฑ์การเลือกแตกต่างกัน ในที่นี้จะกล่าวถึงหลักเกณฑ์แมกซิมินและหลักเกณฑ์มินนิแมกซ์เข้ามาช่วยคำนวณหาผลลัพธ์ของเกมส์ที่ดีที่สุด

หลักเกณฑ์แมกซิมินนั้น คือ การหาค่าที่มากที่สุดจากผลได้ที่น้อยที่สุด (Maximize the Minimum Gain) หลักเกณฑ์อันนี้ มาจากแนวความคิดของพวกหัวเก่า ที่มองในแง่ได้แง่เสียอย่างรอบคอบ หรืออีกนัยหนึ่ง คือ พวกมองโลกในแง่ร้ายไว้ก่อน โดยไม่คำนึงว่า ความน่าจะเป็นที่จะเกิดสิ่งเลวร้ายนี้จะมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงไร เมื่อผู้แข่งขันAใช้หลักเกณฑ์แมกซิมินในแต่ละแผนการ ผู้แข่งขัน A จะเลือกผลได้ที่น้อยที่สุดของแผนการนั้นออกมาก่อน ส่วนแผนการที่ผู้แข่งขัน A จะเลือกใช้ก็คือ แผนการที่ให้ค่าที่มากที่สุดของผลได้ที่น้อยที่สุดของทุก ๆ แผนการ หลักการอันนี้จะป้องกันผู้แข่งขันAจากการเสียผลประโยชน์ของการแข่งขันที่มีจำนวนมาก ๆ เอาไว้ หรือคือผู้แข่งขัน Aจะคิดมักน้อยไว้ก่อน

คือเอาสิ่งที่คิดว่าควรจะได้แน่นอนกว่าเลือกสิ่งอื่น ทั้งนี้โดยไม่คำนึงถึงว่าถ้าเลือกแผนการอื่นแล้ว เมื่อตนชนะอาจจะได้ผลประโยชน์มากมายกว่าแผนการที่ตัวเองยึดมั่นไว้

หลักเกณฑ์มินนิแมกซ์ คือ การหาค่าที่น้อยที่สุดจากผลเสียที่มากที่สุดของแต่ละแผนการที่มีอยู่ (Minimize the Maximum Loss) ผู้แข่งขัน B จะยึดหลักเกณฑ์มินนิแมกซ์เข้ามาช่วยในการตัดสินใจ ว่าจะเลือกแผนการใดเข้าแข่งขัน โดยที่ผู้แข่งขัน B จะเลือกผลเสียที่มากที่สุดของแต่ละแผนการของตนออกมา หลังจากนั้นแผนการที่ B จะเลือกใช้ ก็คือ แผนการที่ประกันว่า B จะเสียผลประโยชน์น้อยที่สุด ไม่ว่า A จะเลือกแผนการใดออกมาแข่งขัน

<u>จุดผลเท่ากันหรือจุดอานม้า</u> (Saddle Point)

ในการแข่งขันเกมส์ที่ผลรวมของสองฝ่ายเป็นศูนย์ นั้น จุดผลเท่ากันหรือจุดอานม้า (Saddle Point) คือ จุดที่ให้ค่ามากที่สุดของค่าน้อยที่สุดในแต่ละแถวของเมตริกซ์ มีค่าเท่ากับค่าที่น้อยที่สุดของค่าที่มากที่สุดของแต่ละหลัก

เกมส์การแข่งขันที่มีจุดผลเท่ากัน เราถือว่าเป็นแผนการที่ดีที่สุดของผู้แข่งขันทั้งสอง (Optimal Strategy) และจะเรียกค่าของจุดผลเท่ากันหรือผลตอบแทนของเกมส์ (Pay Off Matrix) นั้นว่า ค่าของเกมส์ที่ดีที่สุด (Optimal Value of the Game) สำหรับเกมส์ที่มีจุดผลเท่ากันบางทีเรียกว่า การตัดสินใจแน่นอน (Strictly Determined) เพื่อให้เข้าใจดีขึ้นเรามาพิจารณา

<u>ตัวอย่าง 3.3</u> ตัวอย่างนี้จะแสดงถึงการคำนวณหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของเกมส์ และแผนการที่ดีที่สุดของผู้แข่งขัน A และ B ในเมื่อเกมส์นั้นมีจุดผลเท่ากัน สมมุติเมตริกซ์แสดงผลได้ผลเสียของผู้แข่งขัน A และ B แสดงได้ดังนี้

B

		1	2	3	4
A	1	-3	0	-4	-6
	2	2	-2	5	-3
	3	4	1	3	5
	4	-1	-3	-7	11

<u>วิธีทำ</u> เพื่อความสะดวกและง่าย เราจะเพิ่มค่าต่ำสุดของแถว และค่าสูงสุดของหลักดังนี้

B

		1	2	3	4	ค่าต่ำสุดของแถว
A	1	-3	0	-4	-6	-6
	2	2	-2	5	-3	-3
	3	4	1	3	5	1 ค่าแมกซิมิน
	4	-1	-3	-7	11	-7
ค่าสูงสุดของหลัก		4	1	5	11	

ค่ามินนิแมกซ์

ถ้าผู้แข่งขัน A เลือกแผนการที่ 1 เข้าแข่งขัน เขาจะมีผลได้เท่ากับ -3, 0, -4, -6 และคู่แข่งขันคือ B เลือกแผนการ 1, 2, 3, หรือ 4 ออกมาใช้ตามลำดับแล้ว A สามารถประกันผลได้จากการแข่งขัน ถ้าเขาเลือกแผนการที่ 1 ออกมาใช้ เขาจะมีผลได้อย่างน้อยที่สุดเท่ากับค่าที่น้อยที่สุดของ -3, 0, -4, -6 ซึ่งเท่ากับ -6 โดยไม่คำนึงถึงว่าผู้แข่งขัน B จะเลือกแผนการใดออกมาใช้

ถ้าผู้แข่งขัน A เลือกแผนการที่ 2 เข้าแข่งขัน โดยไม่คำนึงถึงว่าผู้แข่งขัน B จะเลือกแผนการใดออกมาใช้ เขาก็สามารถประกันได้ว่าอย่างน้อยที่สุด ผลได้ของเขาจะเท่ากับค่าน้อยที่สุดของ 2, -2, 5, -3 ซึ่งเท่ากับ -3

ถ้า A เลือกแผนการที่ 3 ออกมาใช้ เขาก็สามารถประกันได้ว่าอย่างน้อยที่สุด ผลได้ของเขาจะเท่ากับค่าน้อยที่สุดของ 4, 1, 3, 5 ซึ่งเท่ากับ 1 และทำนองเดียวกันถ้าเขาเลือกแผนการที่ 4 ออกมาใช้ เขาก็สามารถประกันได้ว่า อย่างน้อยที่สุดผลได้ของเขาจะเท่ากับค่าน้อยที่สุดของ -1, -3, -7, 11 คือเท่ากับ -7

ค่าที่น้อยที่สุดของแต่ละแถวคือ ค่าผลได้อย่างน้อยที่สุดที่ประกันว่าผู้แข่งขัน A จะต้องได้ผลได้จำนวนนี้ ซึ่งแสดงไว้ทางขวาสุดในรูปหลักของเมตริกซ์

ผู้เข้าแข่งขัน A สามารถเพิ่มผลได้ต่ำสุดของเขาได้ ถ้าเขาเลือกแผนการที่ให้ผลได้ต่ำสุดที่มีค่ามากที่สุด นั่นคือ เลือกแผนการที่ 3 ผลได้ต่ำสุดที่มีค่ามากที่สุดที่จะประกันผลได้ของเขาจะเท่ากับ 1 ซึ่งหามาได้จากการเลือกค่ามากที่สุดของ -6, -3, 1, -7 ซึ่งก็คือ ค่าแมกซิมิน นั่นเอง ในกรณีนี้ผู้แข่งขัน A ใช้แผนการแมกซิมินเข้ามาช่วยพิจารณาเลือกแผนการที่จะใช้ในการแข่งขัน

ซึ่งจะประกันผลได้ต่ำสุดที่ได้จากการแข่งขันทุกครั้งว่าจะมีค่ามากกว่าเลือกแผนการอื่นมาใช้ หรือกล่าวได้ว่าเขาเลือกแผนการบริสุทธิ์ คือแผนการที่ 3 เข้าแข่งขันทุกครั้ง

ถ้ามาพิจารณาคู่แข่งขัน B บ้าง ผู้เข้าแข่งขัน B พยายามจะลดจำนวนผลเสียของเขาให้น้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้ ผู้แข่งขัน B รู้ว่าถ้าเขาเลือกแผนการที่ 1 ออกแข่งขัน ผลเสียที่เขาจะเสียมากที่สุดก็คือ ค่ามากที่สุดของ -3, 2, 4, -1 ซึ่งเท่ากับ 4 โดยไม่คำนึงถึงว่าผู้เข้าแข่งขัน A จะใช้แผนการใดออกมาแข่งขัน

ในทำนองเดียวกัน ถ้าผู้แข่งขัน B เลือกใช้แผนการที่ 2, 3, 4 ออกมาใช้ ผลเสียที่เขาจะเสียมากที่สุดก็คือ 1, 5, และ 11 ตามลำดับ ค่ามากที่สุดของแต่ละหลักแสดงไว้ทางด้านล่างสุดในรูปแถวของเมตริกซ์ ค่าสูงสุดของหลักก็คือ ผลเสียที่มากที่สุดของผู้แข่งขัน B ผู้แข่งขัน B สามารถลดค่าผลเสียที่มากที่สุดลงได้ โดยการเลือกแผนการที่ให้ค่าผลเสียที่มากที่สุดน้อยกว่าแผนการอื่น ๆ นั่นคือผู้แข่งขัน B ควรเลือกแผนการที่ 2 ซึ่งผลเสียน้อยที่สุดของเขาจะเท่ากับ 1 ซึ่งหามาได้จาก 4, 1, 5, 11 เพราะถ้าเขาเลือกแผนการอื่นมาใช้ ผลเสียที่มากที่สุดจะต้องมากกว่า 1 เสมอ ในกรณีนี้ผู้แข่งขัน B ใช้แผนการมินนิแมกซ์ เข้ามาช่วยเขาพิจารณาเลือกแผนการบริสุทธิ์ คือ แผนการที่ 2 ซึ่ง ~ใช้ในการแข่งขันทุกครั้ง

สรุปได้ว่า A เลือกแผนการบริสุทธิ์คือแผนการที่ 3

B เลือกแผนการบริสุทธิ์คือแผนการที่ 2

Maximin Value = Minimax Value = 1

นั่นคือ ค่าจุดผลเท่ากันหาค่าได้ (Exist) และมีค่าเท่ากับ 1

และค่าจุดผลเท่ากันนี้จะเป็นค่าของเกมส์

<u>ตัวอย่าง 3.4</u> สมมุติว่าเรามีเกมส์ดังตารางนี้ จงหาแผนการที่ดีที่สุดและค่าของเกมส์

นาย ข.

นาย ก

ก \ ข	$ข_1$	$ข_2$	ค่าต่ำสุดของแถว
$ก_1$	4	4	4
$ก_2$	5	3	3
$ก_3$	6	5	5 ค่าแมกซิมิน
$ก_4$	1	3	1
$ก_5$	5	4	4
ค่าสูงสุดของหลัก	6	5 ค่ามินนิแมกซ์	

<u>วิธีทำ</u> จากตารางจะเห็นว่าค่าแมกซิมิน = ค่ามินนิแมกซ์ = 5 แสดงว่ามีจุดผลเท่ากัน (Saddle - Point) ดังนั้น นาย ก และ นาย ข วางแผนที่จะเข้าแข่งขันด้วยแผนการบริสุทธิ์ดังนี้

นาย ก แข่งขันด้วยแผนการ $ก_3$ และ
นาย ข แข่งขันด้วยแผนการ $ข_2$ ตลอดการแข่งขันทุกครั้ง

เพราะ นาย ก อยากได้กำไรมาก ๆ ในขณะที่ นาย ข ก็อยากเสียน้อย ๆ และค่าของเกมส์มีค่าเท่ากับ 5

<u>ตัวอย่าง 3.5</u> พิจารณาเกมส์ขนาด 4×4 ดังตารางต่อไปนี้ แล้วจงหาแผนการที่ดีที่สุด และค่าของเกมส์

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	ค่าต่ำสุดของแถว
A_1	0.4	0.5	0.9	0.3	0.3
A_2	0.8	0.4	0.3	0.7	0.3
A_3	0.7	0.6	0.8	0.9	0.6 ค่าแมกซิมิน
A_4	0.7	0.2	0.4	0.6	0.2
ค่าสูงสุดของหลัก	0.8	0.6	0.9	0.9	

ค่ามินนิแมกซ์

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่าค่าแมกซิมิน = 0.6 = ค่ามินนิแมกซ์

นั่นคือมีจุดผลเท่ากัน = 0.6

ผลลัพธ์ของเกมส์คือ A เลือกแผนการ A_3

B เลือกแผนการ B_2

โดยใช้แผนการบริสุทธิ์นี้ตลอดการแข่งขัน และค่าของเกมส์มีค่าเท่ากับ 0.6

จากตัวอย่างทั้ง 3 จะเห็นว่าเป็นเกมส์ที่มีจุดผลเท่ากันเพียงค่าเดียว จะให้ผลลัพธ์ได้ค่าเดียว แต่เกมส์บางเกมส์มีผลลัพธ์ (Solution) ได้หลายค่า ถ้าหากว่าเกมส์นั้นมีจุดผลเท่ากันปรากฏหลายแห่ง แต่ค่าของเกมส์ (Value of the Game) ยังคงมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.6</u> จงหาค่าของเกมส์ และแผนการทั้งหมดที่ดีที่สุดของ A และ B ของตารางข้างล่างนี้

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	ค่าต่ำสุดของแถว
A_1	4	1	0	3	0	0
A_2	2	3	-3	8	-5	-5
A_3	5	8	0	3	0	0
ค่าสูงสุดของหลัก	5	8	0	8	0	

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่าค่า แมกซิมิน = ค่ามินิแมกซ์ = 0

นั่นคือ มีจุดผลเท่ากันปรากฎ 4 แห่ง แต่ค่าของเกมส์ (Value of the Game) มีเพียงค่าเดียวคือเท่ากับ 0

ส่วนแผนการในการเลือกที่ดีที่สุดของ A และ B จะเลือกได้หลายแบบคือ

A เลือกแผนการที่ 1 , B เลือกแผนการที่ 3

A เลือกแผนการที่ 1 , B เลือกแผนการที่ 5

A เลือกแผนการที่ 3 , B เลือกแผนการที่ 3

A เลือกแผนการที่ 3 , B เลือกแผนการที่ 5

ผลลัพธ์ที่ได้ทั้ง 4 กรณีนี้เป็น แผนการบริสุทธิ์ เพราะมี จุดผลเท่ากัน แต่ถ้าจุดผลเท่ากันหาค่าไม่ได้ จะเป็นแผนการผสม

<u>แผนการผสม</u> (Mixed Strategy)

เกมส์ที่มีจุดผลเท่ากัน (Saddle Point) คู่แข่งขันทั้งคู่สามารถใช้แผนการบริสุทธิ์เพียงคนละแผนการทุก ๆ ครั้งที่แข่งขัน ก็จะได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดดังกล่าวแล้ว แต่ถ้าเกมส์ใดไม่มีจุดผลเท่ากันหรือค่าแมกซิมินไม่เท่ากับค่ามินนิแมกซ์แล้ว การหาผลลัพธ์ (Solution) ก็หาไม่ได้ง่ายนัก กล่าวคือผู้แข่งขัน A และ B ไม่มีแผนการที่แน่นอนในการแข่งขัน ลองพิจารณาตารางต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.7</u>

A \ B	1	2	3	ค่าต่ำสุดของแถว
1	1	-1	3	-1 ค่าแมกซิมิน
2	3	5	-3	-3
3	6	2	-2	-2
ค่าสูงสุดของหลัก	6	5	3 ค่ามินนิแมกซ์	

<u>อธิบาย</u> จากตารางนี้จะเห็นว่าค่าแมกซิมิน (= -1) ≠ ค่ามินนิแมกซ์ (=3) แสดงว่าไม่มีจุดผลเท่ากัน ดังนั้นผู้แข่งขัน A และ B ไม่สามารถจะใช้แผนการบริสุทธิ์ตลอดการแข่งขัน แล้วทำให้ตนได้ผลตอบแทนดีที่สุดในการแข่งขันทุกครั้งได้ เพราะถ้าผู้แข่งขัน A ใช้หลักเกณฑ์แมกซิมินในการเลือกแผนการบริสุทธิ์ เขาจะเลือกใช้แผนการที่ 1 เข้าแข่งขัน ซึ่งจะประกันได้ว่าอย่างน้อยที่สุด ผลตอบแทนที่เขาจะได้รับจากการเข้าแข่งขันจะเท่ากับ -1 ในทำนองเดียวกันถ้าผู้แข่งขัน B ใช้หลักเกณฑ์มินนิแมกซ์ในการเลือกแผนการบริสุทธิ์ เขาจะเลือกแผนการที่ 3 ซึ่งจะประกันได้ว่า เขาจะเสียเท่ากับ 3 ในการแข่งขันทุกครั้ง

ไม่ช้าไม่นาน B สังเกตพบว่า A ใช้แผนการที่ 1 อะกมาแข่งขันทุกครั้ง ดังนั้น B จะเปลี่ยนไปใช้แผน 2 เพื่อเขาจะได้ 1 พอแข่งขันต่อไปพักหนึ่ง A จะสังเกตพบว่าเมื่อเขาใช้แผนการที่ 1 แล้วผู้แข่งขัน B จะใช้แผนการที่ 2 ออกมาต่อสู้เสมอ ทำให้ตนเสีย 1 ดังนั้น A จะเปลี่ยนจากแผนที่ 1 มาใช้แผนการที่ 2 แทน เพื่อจะทำให้ตนได้ผลตอบแทนมากคือ 5 ต่อไป B ก็จะเปลี่ยนไปใช้แผนการที่ 3 อีก เพื่อที่จะทำให้เขาได้ 3 อีก เหตุการณ์จะดำเนินในรูปนี้ต่อไปเรื่อย ๆ

แผนการที่ทั้งคู่นำออกมาใช้ต่อสู้กันในเกมส์ จะไม่ถูกกำหนดตายตัว เหมือนกับกรณีที่มีจุดผลเท่ากัน ทั้งนี้เพราะว่าตราบใดที่ผู้แข่งขันทราบว่าคู่ต่อสู้ใช้แผนการบริสุทธิ์ แผนใดออกมาแข่งขันอยู่เขาก็จะเปลี่ยนแผนการเดิม โดยการนำเอาแผนการอื่นที่จะทำให้เขามีผลได้ดีกว่าเดิมออกมาต่อสู้ทันที เหตุการณ์เช่นนี้จะไม่เกิดขึ้นเลย ถ้าเกมส์นั้นมีจุดผลเท่ากัน ทั้งนี้เพราะว่าถ้าผู้แข่งขันผู้ใดเปลี่ยนแผนการโดยใช้แผนการที่ไม่ผ่านจุดผลเท่ากัน โดยที่คู่แข่งขันยังคงใช้แผนการบริสุทธิ์แผนเดิมที่ผ่านจุดผลเท่ากันเข้าต่อสู้แล้ว ผู้แข่งขันที่เปลี่ยนแผนการต่อสู้จะไม่ได้รับผลตอบแทนเพิ่มขึ้นเลย จะมีแต่เสียผลประโยชน์มากกว่าผลลัพธ์ที่จุดผลเท่ากันรับประกันเอาไว้

สรุปแล้วเมื่อเกมส์ไม่มีจุดผลเท่ากัน ทั้งผู้แข่งขัน A และ B จะไม่สามารถกำหนดแผนการบริสุทธิ์ตายตัวที่จะนำไปแข่งขันทุก ๆ ครั้งได้ ทั้งนี้เพราะว่า ถ้าตราบใดที่ผู้แข่งขันคนใดคนหนึ่งรู้ว่าคู่ต่อสู้ใช้แผนการใดออกมาแข่งขันเป็นลำดับต่อเนื่องกัน เขาก็จะเปลี่ยนแผนการทันที โดยที่แผนการที่เขาเลือกใช้ใหม่จะทำให้เขาได้ผลตอบแทนดีกว่าเก่า การเปลี่ยนแปลงการแข่งขัน จะดำเนินเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ แบบลูกโซ่

จะเห็นได้ว่าเกมส์ที่หาค่าจุดผลเท่ากันไม่ได้นั้น การปกปิดแผนการในการเลือกไม่ให้อีกฝ่ายหนึ่งทราบนั้นมีความจำเป็นอย่างยิ่ง เพราะถ้าเปิดเผยแผนการแล้วก็จะเป็นฝ่ายเสียเปรียบฝ่ายเดียว ซึ่งไม่เหมือนกับเกมส์ที่มีจุดผลเท่ากัน เพราะเกมส์ที่มีจุดผลเท่ากันนั้น ผู้แข่งขันทั้งสองต่างก็มุ่งไปที่จุดเดียวกัน จึงไม่มีความจำเป็นที่จะรู้หรือไม่รู้ของการเลือกแผนการของแต่ละฝ่าย (ดังตัวอย่างที่ 3.3 A จะเลือกแถวที่ 3 และ B จะเลือกหลักที่ 2 เท่านั้น)

เมื่อเกมส์ไม่มีจุดผลเท่ากัน การเลือกแผนการเดี่ยว ๆ จึงเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นการเลือกแผนการอันไหน จึงขึ้นอยู่กับการกระจายความน่าจะเป็น (Probability Distribution) ที่แปรเปลี่ยนตามแผนการ โดยพิจารณาดูว่า ควรจะเลือกแผนการที่เหมาะสมเพื่อที่จะให้ได้ผลดีที่สุด และการเลือกแผนการโดยพิจารณาจากความน่าจะเป็นนี้ เรียกว่า " แผนการผสม "

ถ้าจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างการเลือกใช้แผนการบริสุทธิ์และแผนการผสมแล้ว การเลือกใช้แผนการบริสุทธิ์ตลอดเวลาเมื่อมีจุดผลเท่ากันก็คือ ส่วนหนึ่งของการใช้แผนการผสม นั่นคือ ถ้าเราใช้แผนการผสม ทุก ๆ แผนการจะมีโอกาสถูกนำออกมาใช้ไม่มากก็น้อยแล้วแต่ค่าความน่าจะเป็นที่กำกับอยู่ในแต่ละแผนการ แต่ในการเลือกใช้แผนการบริสุทธิ์นั้น จะถือว่าเฉพาะแผนการที่ทำให้เกิดจุดผลเท่ากันเท่านั้นที่จะมีความน่าจะเป็นเท่ากับ 1 พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.8</u> จากตารางต่อไปนี้ จงหาแผนการที่ดีที่สุดของเกมส์

A \ B		B_1	B_2	ค่าต่ำสุดของแถว	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
A_1	$\frac{1}{2}$	3	6	3	
A_2	$\frac{1}{2}$	5	4	4	ค่าแมกซิมิน
ค่าสูงสุดของหลัก		5	6		
		ค่ามินนิแมกซ์			

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาถ้า A แข่งขันด้วยแผนการบริสุทธิ์

1. ถ้า A ใช้แผนการ A_1 ตลอด เพราะฉะนั้น A จะได้ 3 และ B จะหันไปใช้แผนการ B_1 (1)
2. ถ้า A ใช้แผนการ A_2 ตลอด เพราะฉะนั้น A จะได้ 4 และ B จะหันไปใช้แผนการ B_2 (2)

แต่ถ้า A ใช้แผนการผสมโดยอัตราส่วน $A_1 : A_2 = 1:1$ หรือ ความน่าจะเป็น $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{1}{2}$

ให้ n เป็นจำนวนครั้งที่ A ใช้แผนการ ถ้า B ใช้แผนการ B_1 จะได้ว่า ผลได้เฉลี่ยของ A(Expected Gain) $= \frac{n \times \frac{1}{2} \times 3 + n \times \frac{1}{2} \times 5}{n} = 4$

นั่นคือถ้า B ใช้แผนการ B_1 ผลได้เฉลี่ยของ A = 4 ต่อเกมส์ (3)

ถ้า B ใช้แผนการ B_2 จะได้ว่าผลได้เฉลี่ยของ A = $\frac{n\times\frac{1}{2}\times 6+n\times\frac{1}{2}\times 4}{n} = 5$ (4)

จะเห็นได้ว่าจากสมการ (3) ถ้า A แข่งขันด้วยแผนการผสม โดยที่ B ใช้แผนการ B_1 A จะได้ผลได้เฉลี่ยต่อเกมส์เท่ากับ 4 ซึ่งมากกว่า แผนการบริสุทธิ์ของสมการ (1) เมื่อ A ใช้แผนการ A_1 ตลอด A จะได้ 3 เท่านั้น

และจากสมการ (4) A แข่งขันด้วยแผนการผสม โดยที่ B ใช้แผนการ B_2 A จะได้ผลได้เฉลี่ยต่อเกมส์เท่ากับ 5 ซึ่งมากกว่า แผนการบริสุทธิ์ของสมการ (2) ซึ่ง A จะได้ 4 เท่านั้น

ฉะนั้น แสดงให้เห็นว่า จากสมการที่ให้มานี้ ถ้าใช้แผนการผสมจะดีกว่าใช้แผนการบริสุทธิ์ ในเมื่อค่า แมกซิมิน $\neq$ ค่ามินนิแมกซ์

3.5 <u>ทฤษฎีเกมส์เชิงพีชคณิต</u> (Algebra of the Theory of Games)

เพื่อที่จะให้เข้าใจปัญหาและแนวคิดของทฤษฎีเกมส์ได้ง่ายขึ้น เราจะใช้วิธีการทางพีชคณิตเป็นตัวแสดงถึงความสัมพันธ์และยังจะเป็นแนวทางไปสู่การพิสูจน์ทฤษฎีมินนิแมกซ์ (The Minimax Theorem)อันเป็นทฤษฎีพื้นฐานที่สำคัญอย่างยิ่งของเกมส์

พิจารณาตารางเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccc|c|c|c|c|}
 & & & & B & & \\
 & & & 1 & 2 & \cdots & m \\
 & & & y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\
\hline
 & 1 & x_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\
\hline
A & 2 & x_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
\hline
 & n & x_n & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \\
\hline
\end{array}$$

เมตริกซ์เกมส์นี้แทนการแข่งขันเกมส์ของผู้แข่งขัน 2 คน คือ A และ B เมตริกซ์เกมส์นี้อาจแทนด้วย (a_{ij}) ซึ่ง a_{ij} เป็นเลขจำนวนจริง โดยที่ a_{ij} คือ ผลที่ผู้แข่งขัน A จะได้จากการแข่งขันเกมส์นี้โดยใช้แผนการ i และคู่แข่งขัน B ใช้แผนการ j $(i = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, m)$

นิยาม 3.5.1 สมมุติให้ A มี n แผนการ และ B มี m แผนการ

ให้ $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ แทนแผนการผสมของ A

$(y) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ แทนแผนการผสมของ B

1. ผลบวกแผนการบริสุทธิ์ของ A คือ

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ หรือ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$

2. ผลบวกแผนการบริสุทธิ์ของ B คือ

$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = 1$ หรือ $\sum_{j=1}^{m} y_j = 1$

3. $x_i \geqq 0$, $y_j \geqq 0$

นิยาม 3.5.2 ถ้า A และ B เลือกแผนการจากแผนการผสม (x)และ (y) ตามลำดับแล้ว ผลได้เฉลี่ยในการชนะของ A (Expected winning of A) หรือผลได้เฉลี่ย(Expected Value)คือ $E(x,y) = xAy^t = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$

โดยที่ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$

y^t = ทรานสโพสเมตริกซ์ของ y

ตัวอย่าง 3.9 พิจารณา เมตริกซ์เกมส์ต่อไปนี้

		B		
		y_1	y_2	y_3
A	x_1	0	-1	1
	x_2	1	0	-1
	x_3	-1	1	0

ถ้า A เลือกแผนการผสม $(x) = (x_1, x_2, x_3)$ และ
B เลือกแผนการผสม $(y) = (y_1, y_2, y_3)$ แล้ว

ผลได้เฉลี่ยในการชนะของ A, $E(x,y) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

หรือ $E(x,y) = (x_2 - x_3)y_1 + (-x_1+x_3)y_2 + (x_1 - x_2)y_3$

ถ้า $x = (0.1, 0.4, 0.5)$ และ $y = (0.3, 0.3, 0.4)$ แล้ว

$E(x, y) = -0.03$

นั่นคือ ผลได้เฉลี่ยในการชนะของ A = - 0.03

<u>ทฤษฎี 3.5.1</u> ให้ E เป็นค่าผลได้เฉลี่ย (Expected Value) ของการทดลอง ถ้าค่าคงที่ k ถูกบวกเข้าไปในแต่ละตัวของผลลัพธ์ของการทดลองแล้ว ค่าผลได้เฉลี่ย E^* ของการทดลองใหม่จะเท่ากับ $E + k$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_t$ เป็นผลลัพธ์ของการทดลองเดิม ซึ่งมีค่าความน่าจะเป็น คือ $p_1, p_2, \ldots, p_t$ ตามลำดับ โดยที่

$p_1 + p_2 + \ldots + p_t = 1$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
E^* &= (x_1 + k)p_1 + (x_2 + k)p_2 + \ldots + (x_t + k)p_t \\
&= x_1p_1 + kp_1 + x_2p_2 + kp_2 + \ldots + x_tp_t + kp_t \\
&= x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots x_tp_t + k(p_1 + p_2 + \ldots p_t) \\
&= E + k
\end{aligned}
$$

<u>ทฤษฎี 3.5.2</u> ให้ A และ B เป็นเซต , f เป็นฟังก์ชันของสองตัวแปร ซึ่ง $f(x,y)$ เป็นจำนวนจริง เมื่อ $x \in A$ และ $y \in B$ และสมมุติว่า

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x,y)$$

และ

$$\min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x,y)$$

หาค่าได้ ดังนั้น $\max\limits_{x \in A} \min\limits_{y \in B} f(x,y) \leq \min\limits_{y \in B} \max\limits_{x \in A} (x,y)$

<u>พิสูจน์</u> สำหรับจุดคงที่ x และ y ใด ๆ จากนิยามของค่าต่ำสุด (Minimum)

จะได้ว่า $\min_{y \in B} f(x,y) \leq f(x,y)$

และจากนิยามของค่าสูงสุด (Maximum) จะได้ว่า

$$f(x,y) \leq \max_{x \in A} f(x,y)$$

ดังนั้น $\min_{y \in B} f(x,y) \leq \max_{x \in A} f(x,y)$ (1)

เนื่องจากทางซ้ายมือของ (1) ไม่ขึ้น (Independent) กับ y

เราจึงได้ว่า $\min_{y \in B} f(x,y) \leq \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x,y)$ (2)

เนื่องทางขวามือของ (2) ไม่ขึ้นกับ x เราจึงได้ว่า

$$\max_{x \in A} \min_{y \in B} f(x,y) \qquad \min_{y \in B} \max_{x \in A} f(x,y)$$

<u>หมายเหตุ</u> จากทฤษฎี 3.5.2 นี้ เราสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ โดยให้ $f(i,j) = a_{ij}$ ($i=1,2,\ldots,m$, และ $j = 1, 2, \ldots, n$) แล้ว $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$

ต่อไปจะพิจารณาว่า แผนการของ A และ B จะถูกเลือกอย่างไร

สมมุติว่า A เลือกแผนการ ($\overline{x}$)

จะได้ผลได้เฉลี่ยเท่ากับ $\sum_i \sum_j \overline{x}_i y_j a_{ij}$

เมื่อ A เลือก $(\overline{x})$ แล้วแน่นอนว่า B จะเลือกแผนการ (y) เพื่อที่จะทำให้ $\sum_i \sum_j \overline{x}_i y_j a_{ij}$ มีค่าน้อยที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ และอย่างน้อยที่สุดจะเลือกได้ 1 แผนการบริสุทธิ์

สมมุติ A เลือก $(\overline{x})$ แล้ว B เลือก (y) ทำให้ผล(outcome)มีค่าออกมาน้อยที่สุด เราจะเขียนแทนดังนี้

$$\min_j \sum_i a_{ij} \overline{x}_i = \sum_i a_{ij(\overline{x})} \overline{x}_i \qquad (1)$$

โดยที่ j $(\overline{x})$ แทน แผนการใด ๆ ของ B ที่ให้ค่าน้อยที่สุดเมื่อ A เลือก ($\overline{x}$)

จะเห็นได้ว่าเมื่อ B ทำให้ (1) มีค่าน้อยที่สุดนั้นแน่นอนว่า A ก็ต้องการที่จะทำค่าที่น้อยที่สุดนี้ ให้มีค่ามากที่สุดเท่าที่จะมากได้ (Maximum) คือ A จะเลือกแผนการจาก (x) ของเขานั่นคือ A จะได้รับดังนี้

$$\max_{(x)} \min_j \sum_i a_{ij} \overline{x}_i = \max_{(x)} \sum_i a_{ij(\overline{x})} \overline{x}_i = v_1 \qquad (2)$$

โดยที่ v_1 คือค่ามากที่สุด ซึ่งเป็นค่าเฉพาะแมกซิมิน (Pure Maximin) และเมื่อพิจารณาดูจะเห็นได้ว่า $\max_i \min_j a_{ij} \leq v_1$

ในทำนองเดียวกัน ในกรณีของ B สมมุติว่า B เลือก $(\overline{y})$ และ A เลือกแผนการบริสุทธิ์จาก (x) ของเขาแล้ว จะได้ผลออกมาดังนี้

$$\max_i \sum_j a_{ij} \overline{y}_j = \sum_j a_{i(\overline{y})j} \overline{y}_j \qquad (3)$$

เมื่อได้ดังนี้แล้ว B ก็จะเลือกแผนการของเขาคือ ($\dot{y}$) เพื่อที่จะให้ผลตอบแทนนี้กลายเป็น

$$\min_{(y)} \max_{i} \sum_{j} a_{ij}\bar{y}_j = \min_{(y)} \sum_{j} a_{i(\bar{y})j}\bar{y}_j = v_2 \qquad (4)$$

โดยที่ v_2 แทนค่าที่น้อยที่สุด ซึ่งเป็นค่าเฉพาะมินนิแมกซ์ และจะเห็นว่า

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij} \geq v_2$$

<u>หมายเหตุ</u> ขอทำความเข้าใจ ณ ที่นี้ก่อนว่า เมื่อกล่าวถึงค่าที่น้อยที่สุด หรือค่าที่มากที่สุด นั้น อาจจะมีมากกว่า 1 แผนการบริสุทธิ์ ก็ได้ที่ให้ผลเช่นนั้น (ดังในตัวอย่าง 3.6) แต่เมื่อกล่าวถึงแผนการที่เหมาะสม(The optimal strategy) เราจะหมายถึงเพียง 1 แผนการ ในจำนวนนั้นเท่านั้น เราจะใช้ข้อตกลงนี้ในโอกาสต่อไป

เราจะเห็นได้ว่าจาก (2) และ (4) นั้น $v_1 \leq v_2$ เสมอ หมายความว่า ค่าแมกซิมิน มีค่าน้อยกว่า หรือ เท่ากับค่ามินนิแมกซ์เสมอ

ฉะนั้น เราสามารถ นิยาม ($\bar{x}$) ได้โดย

$$v_1 = \max_{(x)} \min_{j} \sum_{i} \bar{x}_i a_{ij}$$

และนิยาม ($\bar{y}$) โดย

$$v_2 = \min_{(y)} \max_{i} \sum_{j} \bar{y}_j a_{ij}$$

ดังนั้น $v_1 \leq \sum_{i}\sum_{j} \bar{x}_i\bar{y}_j a_{ij}$ และ

$$v_2 \geq \sum_{i}\sum_{j} \bar{x}_i\bar{y}_j a_{ij}$$

จะเห็นว่า ทางด้านขวามือของ อสมการ นั้นเท่ากัน ฉะนั้นจะได้ว่า $v_1 \leq v_2$ เสมอ

จากความจริงข้อนี้ หมายความว่า เมตริกซ์เกมส์ นั้นไม่มีจุดผลเท่ากัน

แต่ถ้าเป็นเกมส์ที่มีจุดผลเท่ากัน จะได้ว่า $v_1=v_2$ คือ ค่าเฉพาะแมกซิมิน (Pure Maximin) = ค่าเฉพาะมินนิแมกซ์ (Pure Minimax)

ซึ่งเราจะพิสูจน์ในหัวข้อที่ว่าด้วย ทฤษฎีมินนิแมกซ์ (The Minimax Theorem) ถ้าเราสมมุติว่า $v_1 = v_2$ เป็นจริงจะได้ว่า

$$\sum_{i}\sum_{j} a_{ij}\bar{x}_i\bar{y}_j = \max_{(x)} \sum_{i} a_{ij(\bar{x})}\bar{x}_i = \min_{(y)} \sum_{j} a_{i(\bar{y})j}\bar{y}_j$$

หมายความว่า ทั้ง A และ B ควรจะเลือกแผนการ $(\bar{x})$ และ แผนการ $(\bar{y})$ ตามลำดับ เพราะเป็นแผนการที่ดีที่สุด ของทั้งสองฝ่าย

แต่นี้เป็นในแง่ทฤษฎี เพราะทั้ง A และ B อาจจะไม่เลือก $(\bar{x})$ และ $(\bar{y})$ ก็ได้ หมายความว่า อาจจะเลือกแผนการอื่น ๆ โดยการเดาสุ่มหรือเสี่ยงเอา ซึ่งทั้งสองฝ่ายคาดว่าเขาอาจจะได้รับกำไรสูงสุดก็เป็นได้ แต่การเลือกแผนการโดยวิธีเดาสุ่มนี้ ไม่อยู่ขอบเขตของทฤษฎีเกมส์ (Theory of Games) ซึ่งเราจะไม่พิจารณาถึงเพราะไม่มีกฎเกณฑ์อะไรเลย

3.6 <u>ทฤษฎีเกมส์</u> (Theory of Games)

เราได้มาถึงทฤษฎีที่สำคัญของ ทฤษฎีเกมส์ คือ ทฤษฎีมินนิแมกซ์ ซึ่งได้อ้างถึงทฤษฎีนี้มาบ้างแล้วในหัวข้อที่ผ่าน ๆ มา เราสามารถที่จะนำ ทฤษฎีมินนิแมกซ์นี้ ไปประยุกต์เข้ากับวิธีการทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น การโปรแกรมเชิงเส้นตรง เป็นต้น อันจะเป็นวิธีซึ่งนำไปสู่การหาผลลัพธ์ของเกมส์

ฟอน นอยมันน์ (Von Neumann) ได้กล่าวไว้ในทฤษฎีเกมส์ (The Minimax Theorem) ว่า " <u>ในเกมส์ที่ผลรวมของสองฝ่ายเป็นศูนย์นั้น ค่า v_1 และ v_2 ที่คู่แข่งขันตั้งเป้าหมายไว้นั้น จะมีค่าเท่ากัน แต่เครื่องหมายทางพีชคณิตที่นำหน้าทั้งคู่จะต่างกัน</u> นั่นคือ $v = v_1 = v_2$

<u>หมายเหตุ</u> ค่าของ v_1และ v_2 ในที่นี้ หมายถึงค่าของ v_1 และ v_2 ในหัวข้อที่ 3.5 ที่ว่าด้วย ทฤษฎีเกมส์เชิงพีชคณิต

การพิสูจน์ทฤษฎีนี้ ก็คือ ต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า $v_1=v_2$ แต่จากหัวข้อที่ 3.5 เราได้หาแล้วว่า $v_1 \leq v_2$ เสมอ ฉะนั้น ถ้าเราพิสูจน์ได้ว่า $v_1 \geq v_2$ เราก็สรุปได้ว่า $v_1 = v_2$

<u>ไฮเปอร์เพน</u> (Hyperplanes)

กำหนดค่า a_{ij} ซึ่ง $i = 1,2,\ldots, n$ และ $j = 1,2,\ldots, m$ มาให้เซตของ$(a_{ij},\ldots, a_{nj})$ เหมือนกับจุด A_j ใน n มิติ และให้จุด $A = (a_1,\ldots, a_n)$ อยู่ในคอนเวค ฮอลล์ (Convex Hall) ของ $A_1,\ldots, A_m$ และ ถ้าเราหาค่าที่ไม่เป็นลบ(Nor-Negative)คือ $t_1,t_2, \ldots, t_m$ บวกเข้าไปจะได้ว่า $a_i= t_1 a_{i1}+\cdots+ t_m a_{im}$

สำหรับทุกค่าของ $i = 1, 2, \ldots , n$

<u>หมายเหตุ</u> คอนเวค ฮอลล์ (Convex Hall)

ในการหาผลลัพธ์ของเกมส์นั้น เราอาจหาได้โดยวิธีกราฟ (ซึ่งจะกล่าวถึงในโอกาสต่อไป) ซึ่งโดยปกติแล้ว วิธีกราฟจะใช้หาผลลัพธ์เฉพาะแต่ที่เป็น 2 มิติ โดยแต่ละคู่ของ แผนการบริสุทธิ์ จะแทนโดยเส้นตรง (Line)

ในกรณีที่เป็น 3 มิติ หรือมากกว่า เราจะหาโดยวิธีกราฟที่แทนด้วยเส้นตรงไม่ได้ ฉะนั้นเราจึงต้องใช้วิธีใหม่ โดยกำหนดให้ แผนการของผู้แข่งขันทั้งคู่แทนด้วย จุด (Point) และ โคออร์ดิเนต(Co-ordinate)ของแต่ละจุด จะแทนแผนการของผู้แข่งขันทั้งสองคน ดังตัวอย่างง่าย ๆ ต่อไปนี้

B

A	4	1	3
	2	3	4

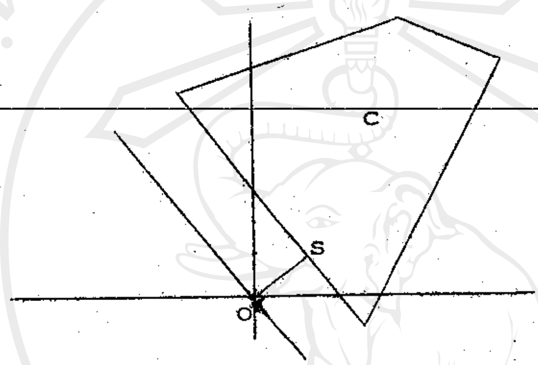
โคออร์ดิเนต (4, 2) , (3, 4) , (1, 3) เหล่านี้จะแทนแผนการของ A และ B และจุดเหล่านี้สามารถเขียนเป็นภาพออกมาได้ และจะเป็นภาพของรูปหลายเหลี่ยม เรียกว่า รูปหลายเหลี่ยมของแผนการ (Strategy Polygon) และทุกจุดในรูปหลายเหลี่ยมนี้ สามารถลากเส้นตรงถึงกันได้ เพราะมันเป็น บริเวณคอนเวค ซึ่งเรียกว่า "คอนเวค ฮอลล์" ของจุดที่กำหนดให้

เพื่อที่จะพิสูจน์ ทฤษฎีมินิแมกซ์ นี้ต้องอาศัย ทฤษฎีนำ 2 ทฤษฎีดังนี้

<u>ทฤษฎีนำ 1</u>

ถ้าจุด $o = (0, 0, \ldots, 0)$ ไม่อยู่ในคอนเวค ฮอลล์ ของ $A_1, \ldots, A_m$ แล้วเราจะหาค่า $s_1, \ldots, s_n$ ซึ่งทุก ๆ จุดใด ๆ ของ A อยู่ในคอนเวค ฮอลล์ ได้เสมอ นั่นคือจะได้ว่า $s_1a_1+\ldots+s_na_n > 0$

สมมุติว่า $n = 2$ หรือ 3 เราสามารถแทนด้วยภาพได้ดังนี้



รูปที่ 6

<u>พิสูจน์</u> เราจะต้องพิสูจน์ว่า $s_1a_1 + \ldots + s_na_n > 0$

ถ้า o ไม่อยู่ในคอนเวค ฮอลล์ c

$\therefore$ จะมีจุดใน c ซึ่งแตกต่างไปจาก o

ฉะนั้น ผลบวกของค่ากำลังสองของ c โคออร์ดิเนต ซึ่งเป็นกำลังของระยะทางจาก o จะเล็กที่สุด สมมุติว่ามันคือจุด $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$

พิจารณาจุดใด ๆ ของ A ซึ่งแทนด้วย $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ แล้ว สำหรับทุก ๆ ค่าของ t (ซึ่งอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1) ซึ่งจุดที่มีโคออร์ดิเนต เป็น $ta_i+(1-t)s_i$ ก็จะอยู่ใน c ด้วย และยังเป็นระยะทางที่น้อยที่สุดจาก o ถึง s ด้วย นั่นคือ

$$\sum_i \left[ta_i + (1 - t)s_i \right]^2 \geq \sum_i s_i^2$$

ถ้า $t > 0$ จะได้ว่า

$$2 \sum_i s_i(a_i - s_i) + \sum_i (a_i - s_i)^2 t \geqslant 0$$

ถ้า t เข้าใกล้ศูนย์ อสมการจะกลายเป็น

$$\sum_i s_i (a_i - s_i) \geq 0$$

นั่นคือ $\sum_i s_i a_i \geq {}_i\, s_i^2 > 0$

หรือเขียนว่า $s_1 a_1 + s_2 a_2 + \cdots\cdots + s_n a_n > 0$ เสมอ

(เพราะว่า s คือ ระยะทางจาก 0)

<u>ทฤษฎีนำ 2</u> ในทฤษฎีนำ 1 จะมีบางค่า (y) ซึ่ง

$$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{im}y_m \leq 0, \text{ ทุก ๆ ค่าของ } i \qquad \text{(I)}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

และ จะมีบางค่าของ (x) ซึ่ง

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \cdots + a_{nj}x_n \geq 0, \text{ ทุก ๆ ค่าของ } j \qquad \text{(II)}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m)$$

ทั้งสองกรณีไม่ขึ้นต่อกัน ถ้าคูณ (I) ด้วย x_i และคูณ (II) ด้วย x_j ก็จะทำให้การพิสูจน์ได้ง่ายขึ้น

กำหนดค่า a_{ij} มาให้ลองพิจารณา คอนเวค ฮอลล์ c ของจุด $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (ซึ่งได้นิยามมาแล้ว) และจุด (1, 0, ... , 0) (0, 1, 0, ... , 0) , ... (0, 0, ... , 0, 1) โดยที่ o จะอยู่ใน c หรือไม่ก็ได้

<u>พิสูจน์</u> การพิสูจน์จะแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้คือ

1. เมื่อจุด o อยู่ใน c
2. เมื่อจุด o ไม่อยู่ใน c

<u>พิสูจน์</u>

<u>กรณีที่ 1</u> เมื่อจุด o อยู่ใน c

เพราะเหตุว่าจุด $o \in c$

จะมีค่า $t_1, t_2, \ldots, t_{m+n}$ ซึ่งทุกตัวไม่เป็นลบ ฉะนั้น เมื่อบวกกันแล้วจะต้องไม่น้อยกว่าศูนย์

$$t_1a_{i1}+t_2a_{i2}+\cdots+t_ma_{im}+t_{m+i} = 0$$

$$t_1a_{i1}+t_2a_{i2}+\cdots+t_ma_{im} = -t_{m+i}$$

นั่นคือจะได้ว่า

$$t_1a_{i1}+t_2a_{i2}+\cdots+t_ma_{im} \leq 0$$

แต่เพราะว่า $t_1+t_2+\cdots+t_m > 0$ หรือหมายความว่า $t_i (i = 1, 2, \ldots, m+n)$ จะเป็นศูนย์และบวกกันแล้วไม่ได้หนึ่ง ฉะนั้น ผลที่ตามก็คือ

เราให้ $y_1 = \dfrac{t_1}{t_1 + t_2 + \dots + t_m}$

$$y_2 = \frac{t_2}{t_1 + t_2 + \dots + t_m}$$

$$\vdots$$

$$y_m = \frac{t_m}{t_1 + t_2 + \dots + t_m}$$

จะสอดคล้องกับ (I) นั่นคือ

$a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{im}y_m \leq 0$ ทุก ๆ ค่าของ i,

$i = 1, 2, \dots , n$

<u>กรณีที่ 2</u> เมื่อจุด 0 ไม่อยู่ใน c

$$0 \notin c$$

โดยทฤษฎีนำ 1 จะได้ว่า $(s_1 , s_2 , \dots , s_n)$ ซึ่ง
$s_1a_{1j} + s_2a_{2j} + \dots + s_na_{nj} > 0$ ทุกค่าของ
j $(j = 1,2, \dots, m)$ และ $s_1 > 0, s_2 > 0, \dots , s_n > 0$
(เพราะว่าจุด $(1, 0, \dots , 0)$, $(0, 1, 0, \dots , 0)$,
$\dots$, $(0, 0, \dots , 0, 1)$ อยู่ใน c ด้วย)

ดังนั้น ถ้าให้ค่าของ $x_1 = \dfrac{s_1}{s_1 + s_2 + \dots + s_n}$

$$x_2 = \frac{s_2}{s_1 + s_2 + \dots + s_n}$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{s_n}{s_1 + s_2 + \dots + s_n}$$

จะสอดคล้องกับ (II)

นั่นคือ $a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{nj}x_n > 0$ ทุกค่าของ j (j = 1, 2, ..., m) จากนี้ด้วยเหตุผลยิ่งขึ้น (A Fortiori)จะได้

$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{nj}x_n \geqq 0$

จากการพิสูจน์ ทฤษฎีนำ 1 ทำให้ได้ ทฤษฎีนำ 2 ซึ่ง ทฤษฎีนำ 2 นี้ จะช่วยให้เราพิสูจน์ ทฤษฎีมินนิแมกซ์ ได้ดังนี้

<u>ในกรณีที่ 1</u> เรามี (y) ซึ่งสำหรับทุก ๆ ค่าของ i จะได้ว่า

$$\sum_j a_{ij}y_j \leqq 0$$

ทำให้เราได้ว่า $\max_i \sum_j a_{ij} y_j \leqq 0$ ด้วย

$$\therefore v_2 = \min_{(y)} \max_i \sum_i a_{ij} y_j \leqq 0$$

<u>ในกรณีที่ 2</u> เรามี (x) ซึ่งสำหรับทุก ๆ ค่าของ j จะได้ว่า

$$\sum_i a_{ij} x_i \geqq 0$$

$$\therefore \min_j \sum_i a_{ij} x_i \geqq 0$$ ด้วย

นั่นคือ $v_1 = \max_{(x)} \min_j \sum_i a_{ij} x_i \geqq 0$

จะเห็นได้ว่า เป็นไปไม่ได้ที่ $v_1 < 0$ ในขณะเดียวกันที่ $v_2 > 0$ หรือ $v_1 < 0 < v_2$

ที่นี้เรามาพิจารณาตารางผลตอบแทน ซึ่งมีสมาชิก เป็น $a_{ij}-k$ โดยที่ k เป็น ค่าคงที่ เป็นบวก หรือลบ ดังนั้นเมื่อเราพิจารณาจะเห็นได้ว่ามันเป็นไปไม่ได้ที่ $v_1 < k < v_2$ ไม่ว่า k เป็นเลขใด ๆ ก็ตาม

$$\therefore \quad v_1 \geqslant v_2$$

แต่จากหัวข้อที่ 3.5 เราพิสูจน์มาแล้วว่า $v_1 \leqslant v_2$ จากอสมการทั้งสองข้อนี้ ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$v_1 = v_2$$

ซึ่งเป็นการพิสูจน์ ทฤษฎีมินนิแมกซ์

3.7 การวิเคราะห์หาผลลัพธ์(solution) ของเกมส์ที่มี จุดผลเท่ากัน

ในหัวข้อที่ 3.4 เราได้กล่าวถึงการหาผลลัพธ์ของเกมส์มาอย่างย่อ ๆ ในหัวข้อนี้ เราจะวิเคราะห์การหาผลลัพธ์ของเกมส์

จากหัวข้อที่ 3.3 เรากล่าวถึงผู้แข่งขัน 2 คน คือ ผู้แข่งขันที่ได้มากที่สุด และ ผู้แข่งขันที่ได้น้อยที่สุด เมื่อผู้แข่งขันทั้งสองเลือกแผนการเสร็จแล้ว จะเห็นว่า ค่าของเกมส์ที่ได้ออกมานั้น จะเป็นค่าที่น้อยที่สุดในแถว และ ขณะเดียวกันก็มากที่สุดในหลัก ซึ่งค่านี้ คือ จุดผลเท่ากัน (saddle point) ในแง่ของทฤษฎีจะเป็นดังนี้

<u>นิยาม 3.7.1</u> คู่ของ $(\bar{x})$ และ $(\bar{y})$ ใด ๆ จะเป็นผลลัพธ์ของเกมส์ (a_{ij})

ถ้า $\sum_i \sum_j a_{ij}\bar{x}_i\bar{y}_j = \max_{(x)} \min_{(y)} \sum_i \sum_j a_{ij}x_iy_j = \min_{(y)} \max_{(x)} \sum_i \sum_j a_{ij}x_iy_j$

จากคำจำกัดความนี้ทำให้เราทราบว่า ผลลัพธ์ของเกมส์ ไม่จำเป็นต้องมีเพียง ผลลัพธ์เดียว เพราะอาจจะมีหลายผลลัพธ์ก็ได้ แต่ค่าของเกมส์(value Of the Game) นั้น จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น คือ $v = v_1 = v_2$ ดังเช่นตัวอย่างที่ 3.6

สมมุติให้คู่ของ แผนการ คือ $(\bar{x})$, $(\bar{y})$ และ $(\bar{\bar{x}})$, $(\bar{\bar{y}})$ เป็นผลลัพธ์ของเกมส์ ฉะนั้น คู่ของ $(\bar{x})$, $(\bar{\bar{y}})$ หรือ $(\bar{\bar{x}})$, $(\bar{y})$ ก็จะเป็นผลลัพธ์ของเกมส์ด้วย เพราะโดยคำจำกัดความของผลลัพธ์ ที่ว่า

$$\sum_i \sum_j a_{ij}\bar{x}_i\bar{\bar{y}}_j \geq \sum_i \sum_j a_{ij}\bar{x}_i\bar{y}_j \geq \sum_i \sum_j a_{ij}\bar{\bar{x}}_i\bar{y}_j$$

และ $$\sum_i \sum_j a_{ij}\bar{\bar{x}}_i\bar{y}_j \geq \sum_i \sum_j a_{ij}\bar{x}_i\bar{y}_j \geq \sum_i \sum_j a_{ij}\bar{x}_i\bar{\bar{y}}_j$$

นั่นคือ ทุก ๆ ค่าใน อสมการ เหล่านี้จะต้องมีค่าเท่ากัน ที่นี้ก็ถึงปัญหาสำคัญที่ว่า ถ้าโจทย์กำหนดคู่ของแผนการ (x') และ (y') มาให้ เราจะทดสอบได้อย่างไรว่า แผนการคู่นั้นเป็นผลลัพธ์ของเกมส์ พิจารณา ถ้า (x') และ (y') เป็น ผลลัพธ์ของเกมส์แล้ว ดังนั้นจะได้ว่า

(a) $\sum_i \sum_j a_{ij}x'_i y'_j \leq \sum_i \sum_j a_{ij}x'_i y_j$ สำหรับทุกค่าของ (y)

และ (b) $\sum_i \sum_j a_{ij}x'_i y'_j \geq \sum_i \sum_j a_{ij}x_i y'_j$ สำหรับทุกค่าของ (x)

ดังนั้น ถ้า (x') และ (y') เป็น ผลลัพธ์ของเกมส์แล้ว มันจะต้องสอดคล้องกับ 2 อสมการ ใน (a) และ (b) จึงเป็นการเพียงพอ

ถ้าผู้แข่งขันทั้งสองเลือกแผนการที่ดีที่สุด (x') และ (y') เราจะพิสูจน์ว่า (x') และ (y') เป็นผลลัพธ์ของเกมส์ด้วยดังนี้

(c) $$\max_{(x)} \sum_i \sum_j a_{ij}x_i y'_j = \sum_i \sum_j a_{ij}x'_i y'_j = \min_{(y)} \sum_i \sum_j a_{ij}x'_i y_j$$

แต่เรารู้มาแล้วว่า

$$\text{(d)}\quad \min_{(y)} \max_{(x)} \sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i\, y_j \leq \max_{(x)} \sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i\, y_j'$$

และ

$$\text{(e)}\quad \max_{(x)} \min_{(y)} \sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i\, y_j \geq \min_{(y)} \sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i'\, y_j$$

จาก (c),(d),(e) จะได้ว่าเทอมซ้ายมือของ (d) และ (e) เท่ากับ $\sum_i \sum_j a_{ij}\, x_i'\, y_j'$ นั่นคือ เราจะได้ว่าคู่ของ (x') และ (y') เป็นผลลัพธ์ของเกมส์ด้วย

เท่าที่ได้พิสูจน์มานี้ จะเห็นว่า มันสอดคล้องกับวิธีการหาผลลัพธ์ของเกมส์อย่างง่าย ๆ ในหัวข้อที่ 3.4

<u>สรุปได้ว่า</u>

1. ถ้าเกมส์มีจุดผลเท่ากัน เราจะหาแผนการบริสุทธิ์ (x'),(y') ซึ่งสอดคล้องกับ (a)และ (b) ออกมาได้เสมอ และค่าของเกมส์ที่ได้จะเป็นค่ามากที่สุดของสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดในแต่ละแถว และเป็นค่าที่น้อยที่สุดของสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดในแต่ละหลัก

2. ผลลัพธ์ ที่สมบูรณ์ของเกมส์ จะประกอบด้วย
   - แผนการที่เหมาะสมทั้งหมด
   - ค่าของเกมส์

3. เมตริกซ์เกมส์ สามารถหาค่าของเกมส์ ได้เสมอ

ทั้งหมดที่กล่าวมานี้ เป็นการวิเคราะห์หาผลลัพธ์ของเกมส์ ที่มีจุดผลเท่ากัน แต่ถ้าหากเกมส์นั้น ไม่มีจุดผลเท่ากันแล้ว การหาผลลัพธ์ของเกมส์ ก็หาไม่ได้ง่าย ๆ เพราะต้องใช้วิธีทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ ประยุกต์เข้าไปจึงจะหาได้

<u>ตัวอย่าง 3.10</u> จงแสดงว่า ถ้า a และ b เป็นจุดผลเท่ากัน (saddle point) ของเมตริกซ์ A แล้ว $a = b$

<u>วิธีทำ</u> เราแบ่งการพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือ

<u>กรณีที่ 1</u> ถ้า a และ b อยู่ในแถวเดียวกัน เมื่อ a และ b อยู่ในแถวเดียวกัน เราจะเห็นได้ว่าทั้ง a และ b ต่างก็เป็นค่าต่ำสุดของแถวนั้น นั่นคือ $a = b$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า a และ b ต่างก็อยู่ในหลักเดียวกัน ดังนั้น ทั้ง a และ b ต่างก็เป็นค่าสูงสุดของหลักนั้น นั่นคือ $a = b$

<u>กรณีที่ 2</u> ถ้า a และ b อยู่ในแถวที่แตกต่างกันและหลักที่แตกต่างกัน ดังนี้

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & a & * & d & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & c & * & b & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก a เป็นจุดผลเท่ากัน ดังนั้น $a \leqq d$ และ $c \leqq a$
และเพราะว่า b เป็นจุดผลเท่ากัน ดังนั้น $b \leqq c$ และ $d \leqq b$
นั่นคือ $a \leqq d \leqq b \leqq c \leqq a$

โดยคุณสมบัติของความสัมพันธ์ของการเท่ากัน (Equality Relation)

จะได้ว่า $a = d = b = c$

ตัวอย่าง 3.11 จงแสดงว่าเกมส์ A =

a	a
b	c

เป็นเกมส์ที่มีจุดผลเท่ากัน

วิธีทำ จะสังเกตเห็นว่า แต่ละ a ต่างก็เป็นค่าต่ำสุดของแถวแรก ถ้า $a \ngtr b$ แล้ว a ตัวแรก (a_{11}) จะเป็นจุดผลเท่ากัน และถ้า $a \ngtr c$ แล้ว a ตัวที่สอง (a_{12}) จะเป็นจุดผลเท่ากันด้วย แต่ถ้า $b > a$ และ $c > a$ หมายความว่า b และ c เป็นค่าสูงสุดของแต่ละหลักตามลำดับ

ดังนั้น ถ้า $b \nleq c$ แล้ว b จะเป็นจุดผลเท่ากัน

และ ถ้า $b \ngeq c$ แล้ว c จะเป็นจุดผลเท่ากัน

จะเห็นได้ว่าในทุก ๆ กรณีแล้ว เมตริกซ์เกมส์ของ A จะมี จุดผลเท่ากันเสมอ

ตัวอย่าง 3.12 เมตริกซ์เกมส์ A =

a	b
c	d

จะเป็นเกมส์ที่ไม่มีจุดผลเท่ากัน ก็ต่อเมื่อสมาชิกในแนวทะแยงมีค่ามากกว่าสมาชิกที่เหลือ นั่นคือ

1. $a, d > b$ และ $a, d > c$ หรือ
2. $b, c > a$ และ $b, c > d$

วิธีทำ จากโจทย์หมายความว่า ถ้า (1) และ (2) เป็นจริงแล้ว ดังนั้น เกมส์นั้นจะเป็น เกมส์ที่ไม่มีจุดผลเท่ากัน

สมมุติให้ A เป็น เกมส์ที่ไม่มีจุดผลเท่ากัน ฉะนั้น $a \neq b$ (จากตัวอย่าง 3.10) ซึ่งเราจะแบ่งพิจารณาออกเป็น 2 กรณี คือ

<u>กรณีที่ 1</u> $a < b$

ถ้า $a \geq c$ เราจะเห็นได้ว่า a เป็นจุดผลเท่ากัน นั่นคือ เราจะได้ว่า ถ้า $a < c$ แล้ว a จะไม่เป็น จุดผลเท่ากัน

นั่นคือ เราจะได้ว่า $b, c > a$ ไม่เป็น จุดผลเท่ากัน เราต้องหาอีกว่า ถ้า $b > d$ และ $c > d$ (คือ $b, c > d$) แล้ว $b, c > d$ ไม่เป็นจุดผลเท่ากัน

สมมุติให้ $d \geq b$ หมายความว่า $d > c$ หรือ $d < c$ ถ้า $d < c$ แล้ว d จะเป็น จุดผลเท่ากัน ดังนั้นเราก็ไม่ต้องพิจารณา เมื่อ $d > c$

เมื่อ $a < c$ และ $d > c$ แล้ว จะได้ว่า c เป็น จุดผลเท่ากัน ซึ่งขัดแย้ง (contradict) ที่ว่าเกมส์นี้ไม่มี จุดผลเท่ากัน

ฉะนั้นที่สมมุติว่า $d \geq b$ จึงไม่จริง นั่นคือ $d < b$

ในทำนองเดียวกัน เราสมมุติให้ $d \geq c$ แล้ว เราก็จะพิสูจน์ได้ว่า $d \geq c$ นั้นไม่จริง คือ เราจะได้ว่า $d < c$ นั่นคือ เราจะได้ว่า

$$b, c > a \quad \text{และ} \quad b, c > d \tag{1}$$

ซึ่งจะทำให้ เมตริกซ์ A ไม่เป็น จุดผลเท่ากัน

<u>กรณีที่ 2</u> $a > b$

การพิสูจน์กรณีที่ 2 นี้เราก็พิจารณาเหมือนกรณีที่ 1 เราจะได้ว่า

$$a, d > b \quad \text{และ} \quad a, d > c \tag{2}$$

3.8 ความสัมพันธ์ระหว่างเมตริกซ์เกมส์กับการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

นิยาม 3.8.1 ผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์ (Solution) คือ คู่ของแผนการผสม

$$(\bar{x}) = (\bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \ldots , \bar{x}_n)$$

$$(\bar{y}) = (\bar{y}_1 , \bar{y}_2 , \ldots , \bar{y}_m)$$

และจำนวนจริง v ซึ่ง

$E(\bar{x}, y) \geq v$ สำหรับแผนการบริสุทธิ์ $j = 1, 2, \ldots, m$

$E(i, \bar{y}) \leq v$ สำหรับแผนการบริสุทธิ์ $i = 1, 2, \ldots, n$

$\bar{x}$ และ $\bar{y}$ จะเรียกว่า แผนการที่เหมาะสม (Optimal Strategies) และจำนวน v จะเรียกว่า ค่าของเกมส์ (Value Of the Game)

ที่นี้มาพิจารณาถึงความสัมพันธ์ ระหว่างเมตริกซ์เกมส์กับการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

สมมุติว่า (a_{ij}) เป็นผลตอบแทน ซึ่งแทนด้วยเมตริกซ์อันหนึ่ง ถ้า A เลือกแผนการผสม $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ด้วยความน่าจะเป็นทางแถวแล้ว ดังนั้น เขาจะได้รับอย่างน้อยที่สุด (At Least) คือ

$$\min_{j} \sum_{i} a_{ij} x_i \geq v_1$$

นั่นคือ จากนิยาม 3.5.2 และ นิยาม 3.8.1 จะได้ว่า

$$a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \cdots + a_{n1} x_n \geqq v_1$$

$$a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{n2} x_n \geqq v_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{1m} x_1 + a_{2m} x_2 + \cdots + a_{nm} x_n \geqq v_1$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

โดยที่ $x_1 , x_2 , \ldots , x_n \geqq 0$

A ต้องการทำให้ ค่าของเกมส์ v_1 มีค่ามากที่สุดเท่าที่จะทำได้

แต่รูปแบบข้างบนนี้ยังไม่อยู่ในรูปแบบของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ที่สมบูรณ์ เพราะว่าค่า v_1 ไม่จำเป็นจะต้องเป็นบวก แต่เพื่อความสะดวก เราจะเพิ่มค่าคงที่ ที่ใหญ่เพียงพอลงไปใน a_{ij} เพื่อที่จะทำให้ v_1 มีค่าเป็นบวกได้ และการเพิ่มค่าคงที่นี้ก็ไม่ทำให้ แผนการที่เหมาะสม เปลี่ยนแปลงในขณะที่ค่าของ v_1 เพิ่มขึ้นด้วยตัวคงที่ ที่เราได้บวกเข้าไปนั้น เราสามารถหักออกได้ เมื่อได้ค่าของเกมส์ ออกมา นั่นคือ ค่าคงที่จะไม่ทำให้ ผลลัพธ์ เปลี่ยนแปลง

ดังนั้น เมื่อ v_1 เป็นบวกแล้ว หาร อสมการ ด้วย v_1 จะได้

$$a_{ij} \frac{x_1}{v_1} + a_{2j} \frac{x_2}{v_1} + \cdots\cdots + a_{nj} \frac{x_n}{v_1} \geqq 1 , \; j = 1, 2, \ldots, m$$

ให้ $X_i = \dfrac{x_i}{v_1}$ แทนลงไปในสมการจะได้

$$a_{1j} X_1 + a_{2j} X_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{nj} X_n \geqq 1 , \; j = 1, 2, \ldots, m$$

หรือเขียนว่า

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} X_i \geqq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \qquad (1)$$

และจาก $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ จะได้ว่า

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \frac{1}{v_1}$$

หรือ

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{v_1} = m \qquad (2)$$

นั่นคือ ค่าของ v_1 มากที่สุด ก็ต้องทำให้ $\frac{1}{v_1}$ หรือ m มีค่าน้อยที่สุดนั่นเอง

ในทำนองเดียวกัน ปัญหาของ B ให้ $Y_j = \frac{y_j}{v_2}$ จะได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} Y_j \leqq 1 \qquad (3)$$

และ

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j = \frac{1}{v_2} = M \qquad (4)$$

โดยที่ $\frac{1}{v_2}$ หรือ M จะเป็นค่ามากที่สุด เพราะว่า v_2 เป็นค่าน้อยที่สุด

นั่นคือ จากสมการ (1), (2), (3) และ (4) เราได้แปลงเมตริกซ์เกมส์ ให้อยู่ในรูปของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงแล้ว

<u>หมายเหตุ</u> ถ้าให้ a_{ij} , b_j และ c_i เป็นค่าคงที่ โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, n$ และ $j = 1, 2, \ldots, m$ เราจะหาค่าของ x_i และ y_i ที่ไม่เป็นลบได้ซึ่ง

$\sum_i a_{ij} x_i \geqq b_j$ ทำให้ $\sum_i c_i x_i$ มีค่าน้อยที่สุด

และ $\sum_j a_{ij} y_j \leqq c_i$ ทำให้ $\sum_j b_j y_j$ มีค่ามากที่สุด

จะเห็นว่า ปัญหา ทั้งสองนี้ ซึ่งแทนโดย ปัญหาของ A และปัญหาของ B เป็นปัญหาควบคู่ ของกันและกัน ซึ่งสามารถแก้ปัญหาออกมาได้ โดยคุณสมบัติของปัญหาควบคู่ กล่าวคือ

$$\max \sum_j b_j y_j = \min \sum_i c_i x_i$$

3.9 <u>การวิเคราะห์หาผลลัพธ์ (solution) ของเกมส์ที่ไม่มีจุดผลเท่ากัน</u>

จากหัวข้อที่ 3.7 และ 3.8 เราจะได้แนวทางสำหรับการหาผลลัพธ์ของเกมส์มาบ้างแล้ว โดยเฉพาะอย่างยิ่งสมการที่ (1) , (2) , (3) และ (4) ในหัวข้อที่ 3.8 เราจะนำความรู้ที่ได้จากการโปรแกรมเชิงเส้นตรง มาวิเคราะห์หาผลลัพธ์ของเกมส์ที่ไม่มี จุดผลเท่ากัน

เราได้รู้มาบ้างแล้วว่า แต่ละเกมส์ที่ประกอบด้วยผู้แข่งขัน 2 คน นั้น แต่ละคน จะเป็นปัญหาควบคู่ของกันและกัน คือ ปัญหาของ A และ ปัญหาของ B

พิจารณาปัญหาของ B

จากสมการ (3) และ (4) ในหัวข้อ 3.8

หาค่าสูงสุดของ $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m = \frac{1}{v_2} = M$

โดยที่ $a_{i1}Y_1 + a_{i2}Y_2 + \dots + a_{im}Y_m \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$

หรือเขียนว่า

$$\begin{aligned} a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + \dots + a_{1m} Y_m &\leq 1 \\ a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2 + \dots + a_{2m} Y_m &\leq 1 \\ &\cdots\cdots \\ a_{n1} Y_1 + a_{n2} Y_2 + \dots + a_{nm} Y_m &\leq 1 \end{aligned}$$

ทำ อสมการ เหล่านี้ให้เป็น สมการ โดยเติมตัวแปรเพิ่ม Y_{m+i} ลงไปในแต่ละ อสมการ จะได้ว่า

$$\left.\begin{array}{lr} a_{11} Y_1 + a_{12} Y_2 + \dots + a_{1m} Y_m + Y_{m+1} & = 1 \\ a_{21} Y_1 + a_{22} Y_2 + \dots + a_{2m} Y_m \qquad + Y_{m+2} & = 1 \\ \cdots\cdots & \\ a_{n1} Y_1 + a_{n2} Y_2 + \dots + a_{nm} Y_m \qquad\qquad + Y_{m+n} & = 1 \\ \text{และ} \quad - Y_1 - Y_2 - \dots - Y_m \qquad\qquad + M & = 0 \end{array}\right\} (1)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ ตารางซิมเพล็กซ์ ได้ดังนี้

Y_1	Y_2 .... Y_m	Y_{m+1}	Y_{m+2}	....	Y_{m+n}	M	
a_{11}	a_{12} ...... a_{1m}	1	0	....	0	0	1
a_{21}	a_{22} ...... a_{2m}	0	1	....	0	0	1
....	....	....	....	....	....	....	....
a_{n1}	a_{n2} ...... a_{nm}	0	0	....	1	0	1
-1	-1 ...... -1	0	0	....	0	1	0

จากตารางนี้สามารถแก้สมการได้โดยวิธี ซิมเพล็กซ์ หาค่า $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, v_2 และ M ได้แล้วใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า

$$Y_j v_2 = y_j \quad \text{และ} \quad M = \frac{1}{v_2}$$

เมื่อแก้ปัญหาหาค่า $y_1, y_2, \ldots, y_m$ และ v_2 (หรือ M) ออกมาได้ ทำให้เราได้ผลลัพธ์ของปัญหาของ B

<u>พิจารณาปัญหาของ A</u>

จากสมการที่ (2) ในหัวข้อที่ 3.8 ได้ว่า

หาค่าต่ำสุดของ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \frac{1}{v_1}$

ถ้าให้ $\frac{1}{v_1} = m$ ดังนั้น จะได้ว่า

หาค่าต่ำสุดของ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$

และถ้าให้ $m = -M''$ ก็จะกลายเป็นปัญหาการหาค่าสูงสุดของ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m = -M''$$

นั่นคือ หาค่าสูงสุดของ $M'' = -x_1 - x_2 - \ldots - x_n$

หรือ $M'' + x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$

นั่นคือ เพื่อที่จะทำให้ m มีค่าต่ำสุด เราต้องทำให้ M'' มีค่าสูงสุดนั่นเอง และจากเงื่อนไข

$$a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + \ldots + a_{nj} x_n \geq 1 \quad ; j = 1, 2, \ldots, m$$

สามารถเขียนได้ว่า

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n \geq 1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{n2} x_n \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m} x_1 + a_{2m} x_2 + \ldots + a_{nm} x_n \geq 1 \end{array}\right\} \quad (2)$$

ทำ อสมการ ใน (2) ให้เป็น สมการ โดยเติมตัวแปรเพิ่มที่ไม่เป็นลบ x_{n+j} ลงไปในแต่ละ อสมการ ดังนี้

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{n1} x_n - x_{n+1} = 1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{n2} x_n \quad - x_{n+2} = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m} x_1 + a_{2m} x_2 + \ldots + a_{nm} x_n \quad\quad - x_{n+m} = 1 \end{array}\right\} (3)$$

โดยที่ทำให้ $M'' = - x_1 - x_2 - \ldots - x_n$ เป็นค่าสูงสุด

เนื่องจากตัวแปรบางตัวเป็นลบ เช่น x_{n+1} เราจะยังไม่สามารถแก้สมการหาผลลัพธ์ที่เหมาะสมได้ ดังนั้นจึงต้องเติมตัวแปรเทียม b_j ตัวใหม่ลงไปในสมการที่เหมาะสม เพราะตัวแปรเทียมที่เติมลงไปนั้น ช่วยให้เราแก้สมการได้ง่ายขึ้น และจะไม่มีผลกระทบกระเทือนต่อสมการเดิมแต่อย่างใดอีก (ภายหลังที่กลายเป็นศูนย์ไปแล้ว) และจะถูกตัดทิ้งไป

ฉะนั้น จาก (3) เมื่อเติม ตัวแปรเทียมที่เหมาะสมลงไปจะได้สมการใหม่ดังนี้

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n - x_{n+1} \quad + b_1 = 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n \quad - x_{n+2} \quad + b_2 = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n \quad\quad - x_{n+m} \quad + b_m = 1 \end{array}\right\} (4)$$

และ $M'' = -x_1 -x_2 - \ldots\ldots - x_n$ เป็นค่าสูงสุด (5)

สมการที่ (4) , (5) สามารถแก้ปัญหาหาค่าออกมาได้ แต่เพื่อความสะดวกในการแก้ปัญหา เราจะขจัดสมการนี้ต่อไปอีก โดยใช้ค่า

$$pb_1 + pb_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + pb_m$$

ลบออกจากสมการที่ (5) จะได้

$$M' = M'' - pb_1 - pb_2 - \ldots\ldots\ldots - pb_m$$

$$= -x_1 - x_2 \ldots\ldots\ldots - x_n - pb_1 - pb_2 - \ldots\ldots - pb_m$$

หรือ $x_1 + x_2 + \ldots + x_n + pb_1 + pb_2 + \ldots + pb_m + M' = 0$

ฉะนั้น เราจะได้ปัญหาการหาค่าสูงสุดของ M' แทน M'' และ สมการที่เป็นปัญหาตัวแปรเทียม จะเป็นดังนี้

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{n1}x_n - x_{n+1} + b_1 = 1 \\
a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{n2}x_n - x_{n+2} + b_2 = 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \ldots + a_{nm}x_n - x_{n+m} + b_m = 1 \\
\text{และ} \quad x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n + pb_1 + pb_2 + \ldots + pb_m + M' = 0
\end{array}\right\} \quad (6)$$

ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปของ ตารางซิมเพล็กซ์ ได้ คือ

x_1	$x_2 \cdots x_n$	x_{n+1}	$x_{n+2} \cdots x_{n+m}$	b_1	$b_2 \cdots b_m$	M'	
a_{11}	$a_{21} \cdots a_{n1}$	-1	$0 \cdots 0$	1	$0 \cdots 0$	0	1
a_{12}	$a_{22} \cdots a_{n2}$	0	$-1 \cdots 0$	0	$1 \cdots 0$	0	1
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
a_{1m}	$a_{2m} \cdots a_{nm}$	0	$0 \cdots -1$	0	$0 \cdots 1$	0	1
1	$1 \cdots 1$	0	0	0	$0 \cdots 0$	1	0
				p	$p \cdots p$		

ในตารางนี้ยังไม่มี ผลลัพธ์ที่เหมาะสม ปรากฏ ฉะนั้นเพื่อที่จะให้ได้ผลลัพธ์ที่เหมาะสม ตัวหนึ่ง เราทำได้โดยคูณแถวแรกด้วย (-p) และบวกสองสมการเหล่านี้ ไว้ที่แถวล่างสุด จะทำให้เราได้ตารางใหม่ ซึ่งมี ผลลัพธ์ที่เหมาะสม ซึ่งรวม ตัวแปรเทียมด้วย

จากตารางนี้เราแก้ปัญหาโจทย์โดยวิธี ซิมเพล็กซ์ จะได้ค่า M' ; $x_1 , x_2 , \ldots , x_n$ ออกมา และใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า

$$m = -M'$$

$$v_1 = \frac{1}{m}$$

และ $$X_i = \frac{x_i}{v_1}$$

แล้วจะหาค่าแผนการผสม (Mixed Strategies) $x_1, x_2, \ldots , x_n$ และ v_1 ออกมาได้ นั่นคือ เราจะได้ ผลลัพธ์ ของ ปัญหาของ A ออกมา

เมื่อเราหาผลลัพธ์ของปัญหาของ A และของปัญหาของ B ออกมาได้ ก็เป็นอันว่า เราแก้ปัญหาหาค่าผลลัพธ์ของ เมตริกซ์เกมส์ โดยสมบูรณ์และค่าของ v_1 , v_2 ที่ได้ออกมาจะมีค่าเท่ากันซึ่งตรงกับ ทฤษฎีมินนิแมกซ์ เราจะแสดงการหา ผลลัพธ์ของเกมส์ ในบทต่อไป