บทที่ 4

วิธีการหาผลลัพธ์ของเกมส์

4.1 การหาผลลัพธ์ของแผนการผสมของเมตริกซ์เกมส์ขนาด 2×2

เมตริกซ์เกมส์ขนาด 2×2 จะหมายถึงเกมส์การแข่งขันที่มีผู้แข่งขัน 2 คน คือ A กับ B โดยที่ต่างฝ่ายมีแผนการที่จะใช้แข่งขันคนละ 2 แผนการ โดยแผนการของ A คือ A (x_1, x_2) ; A ใช้แผนการที่ 1 ด้วยความน่าจะเป็น x_1 ใช้แผนการที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น x_2

แผนการของ B คือ B (y_1, y_2) : B ใช้แผนการที่ 1 ด้วยความน่าจะเป็น y_1 ใช้แผนการที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น y_2

ผลลัพธ์ของเกมส์ขนาด 2×2 สามารถที่จะเขียนให้อยู่ในรูปสูตรง่าย ๆ ได้ดังนี้

พิจารณาเมตริกซ์เกมส์ต่อไปนี้

A \ B	y_1	y_2
x_1	a	b
x_2	c	d

การหาผลลัพธ์ของเกมส์นี้ ถ้ากำหนดเป็นเกมส์ที่มี จุดผลเท่ากัน เราก็หาได้ง่าย แต่ถ้าหากไม่มี จุดผลเท่ากัน ค่าของเกมส์นั้นจะเป็น

$$v = \frac{ad - bc}{r} \quad \text{โดยที่} \quad r = a + d - b - c$$

และแผนการที่เหมาะสม (Optimal Strategies) ของ A และ B เป็น (x_1, x_2) และ (y_1, y_2) ตามลำดับ คือ

$$A = (x_1, x_2) = \left(\frac{d-c}{r}, \frac{a-b}{r}\right)$$

$$B = (y_1, y_2) = \left(\frac{d-b}{r}, \frac{a-c}{r}\right)$$

<u>วิธีทำ</u> ถ้า A และ B เลือกแผนการของเขาด้วยความน่าจะเป็นดังนี้

ให้ A เลือกแผนการแรกด้วยความน่าจะเป็น x_1

A เลือกแผนการที่สองด้วยความน่าจะเป็น $x_2 = 1 - x_1$

และ $x_1 + x_2 = 1$

B เลือกแผนการแรกด้วยความน่าจะเป็น y_1

B เลือกแผนการที่สองด้วยความน่าจะเป็น $y_2 = 1 - y_1$

<u>พิจารณาการเลือกแผนการของ B</u>

สมมุติว่า B เลือกแผนการที่ 1 ด้วยความน่าจะเป็น y_1 ผลได้เฉลี่ยของ A (Expected Gain) ก็คือ $E = x_1a + x_2c$

$$= x_1a + (1-x_1)c$$

$$= x_1a + c - x_1c = v \qquad (1)$$

ถ้าหากว่า B เลือกแผนการที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น y_2 ผลได้เฉลี่ยของ A คือ $E = x_1b + x_2d$

$$= x_1b + (1-x_2)d$$

$$= x_1b + d - x_1d = v \qquad (2)$$

แต่ (1) = (2) ฉะนั้น $x_1a + c - x_1c = x_1b + d - x_1d$

$$x_1a + x_1d - x_1b - x_1c = d - c$$

$$x_1(a + d - b - c) = d - c$$

$$x_1 = \frac{d - c}{a + d - b - c}$$

$$x_1 = \frac{d - c}{r}$$

โดยที่ $r = a+d-b-c$ (3)

$$x_2 = 1 - x_1$$

$$= 1 - \frac{d - c}{a + d - b - c}$$

$$= \frac{a + d - b - c - d + c}{a + d - b - c}$$

$$= \frac{a - b}{a + d - b - c}$$

$x_2 = \frac{a - b}{r}$ โดยที่ $r = a+d-b-c$ (4)

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{d - c}{a - b}$$

<u>พิจารณาการเลือกแผนการของ A</u>

สมมุติว่า A เลือกแผนการที่ 1 ด้วยความน่าจะเป็น x_1 ∴ ผลเสียเฉลี่ยของ B (Expected Loss) ก็คือ $E = y_1a + y_2b$

$$= y_1a + (1-y_1)b$$

$$E = y_1a + b - y_1b \qquad (5)$$

และถ้า A เลือกแผนการที่ 2 ด้วยความน่าจะเป็น x_2 ผลเสียเฉลี่ยของ B ก็คือ

$$E = y_1c + y_2d$$

$$E = y_1c + (1-y_1)d \qquad (6)$$

แต่ (5) = (6) จะได้ว่า

$$y_1 = \frac{d-b}{a+d-b-c} \quad \text{หรือ} \quad \frac{d-b}{r} \qquad (7)$$

$$y_2 = \frac{a-c}{a+d-b-c} \quad \text{หรือ} \quad \frac{a-c}{r}$$

โดยที่ $r = a+d-b-c$ (8)

$$\therefore \frac{y_1}{y_2} = \frac{d-b}{a-c}$$

นั่นคือ ผลลัพธ์ที่เหมาะสม ของ A คือ $\left(\frac{d-c}{r}, \frac{a-b}{r}\right)$

และ ผลลัพธ์ที่เหมาะสม ของ B คือ $\left(\frac{d-b}{r}, \frac{a-c}{r}\right)$

โดยที่ $r = a+d-b-c$

พิจารณาการหาค่าของเกมส์ v (Value Of the Game)

จาก (1) จะได้ว่า $E = x_1a + c - x_1c = v$

$$v = x_1(a-c) + c$$

แต่ $$x_1 = \frac{d-c}{a+d-b-c}$$

แทนค่า x_1 $$v = \frac{(d-c)(a-c)}{a+d-b-c} + c$$

$$v = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}$$

นั่นคือ $$v = \frac{ad-bc}{r}$$

ซึ่งทำให้เราได้ผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์ขนาด 2 x 2 ตามต้องการ ฉะนั้น เมื่อโจทย์กำหนดค่ามาให้ เราสามารถแทนค่าเพื่อหาผลลัพธ์ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1 จงหาผลลัพธ์ของเกมส์ต่อไปนี้

		B: y_1	B: y_2	ค่าต่ำสุดของแถว
A	x_1	4	-5	-5
A	x_2	-5	6	-5
ค่าสูงสุดของหลัก		4	6	

<u>วิธีทำ</u> $a = 4$, $b = -5$, $c = -5$, $d = 6$

จะเห็นว่าเมตริกซ์เกมส์นี้ไม่มี จุดผลเท่ากัน หรือเพราะว่า 4 และ 6 ทั้งคู่ มากกว่า -5 และ -5

$$x_1 = \frac{d - c}{a + d - b - c} = \frac{6 - (-5)}{4 + 6 - (-5) - (-5)}$$

$$x_1 = \frac{11}{20}$$

$$x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

$$y_1 = \frac{d - b}{a + d - b - c}$$

$$= \frac{6 - (-5)}{20} = \frac{11}{20}$$

$$y_2 = 1 - y_1 = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}$$

และ $v = \dfrac{ad - bc}{a + d - b - c}$

$$v = \frac{4 \times 6 - (-5)(-5)}{20} = -\frac{1}{20}$$

จะได้ผลลัพธ์ของเกมส์คือ

$x_1 = \frac{11}{20}$, $x_2 = \frac{9}{20}$ หรือ $A\left(\frac{11}{20}, \frac{9}{20}\right)$

$y_1 = \frac{11}{20}$, $y_2 = \frac{9}{20}$ หรือ $B\left(\frac{11}{20}, \frac{9}{20}\right)$

ค่าของเกมส์ $= -\frac{1}{20}$

นั่นคือ A จะใช้แผนการแรกด้วยความน่าจะเป็น $\frac{11}{20}$ และใช้แผนการที่สอง ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{9}{20}$

และ B จะใช้แผนการแรกด้วยความน่าจะเป็น $\frac{11}{20}$ และใช้แผนการที่สอง ด้วยความน่าจะเป็น $\frac{9}{20}$

<u>ตัวอย่าง 4.2</u> จงหาผลลัพธ์ที่เหมาะสมของเมตริกซ์เกมส์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> เมตริกซ์นี้ไม่มี จุดผลเท่ากัน เพราะว่า 1 และ 0 ทั้งคู่น้อยกว่า 3 และ 4 ดังนั้นเราสามารถหาได้ว่า $r = -6$ และ $v = \frac{-12}{-6} = 2$

และผลลัพธ์ที่เหมาะสมของ A คือ $\left(\frac{-4}{-6}, \frac{1-3}{-6}\right) = A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

และของ B คือ $\left(\frac{-3}{-6}, \frac{1-4}{-6}\right) = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

<u>ตัวอย่าง 4.3</u> เกมส์การโยนเหรียญ (Matching Coins)

<u>กติกา</u> ถ้าโยนเหรียญแล้วได้ หห แล้ว ก ได้จาก ข 1 หน่วย

ถ้าโยนเหรียญแล้วได้ กก แล้ว ก, ข ไม่ได้ไม่เสีย

ถ้าโยนเหรียญแล้วได้ หก หรือ กห แล้ว ก เสียให้ ข $\frac{1}{2}$ หน่วย

จากกติกานี้สามารถสร้าง ตารางของเมตริกซ์เกมส์ได้ดังนี้

ก \ ข	ห	ก	ค่าต่ำสุดของแถว
ห	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
ก	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
ค่าสูงสุดของหลัก	1	0	

จงหาผลลัพธ์ของเกมส์ที่ดีที่สุด (Optimal Solution of the Game)

<u>วิธีทำ</u> ค่าแมกซิมิน ($= -\frac{1}{2}$) $\neq$ ค่ามินนิแมกซ์ (= 0)
แสดงว่าไม่มี จุดผลเท่ากัน ดังนั้น ผลลัพธ์ของเกมส์

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{d - c}{a - b} = \frac{0 - (-\frac{1}{2})}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

จะยังผลให้ได้ A $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{d - b}{a - c} = \frac{0 - (-\frac{1}{2})}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{3}$$

จะยังผลให้ได้ B $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$$v = \frac{(1)(0) - (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{(1)+(0) - (-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})}$$

นั่นคือ ค่าของเกมส์ $= -\frac{1}{8}$

ผลลัพธ์ของเกมส์ที่ดีที่สุด คือ A $\left(\frac{1}{4} , \frac{3}{4} \right)$

B $\left(\frac{1}{4} , \frac{3}{4} \right)$

4.2 ลักษณะเด่นและลักษณะด้อยของแผนการ (Dominant and Recessive Strategies)

การคำนวณหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของเกมส์นั้นต้องอาศัยเมตริกซ์ ซึ่งแสดงผลได้ผลเสียของผู้แข่งขันทั้งสองเป็นหลัก การคำนวณหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของเกมส์ (Optimal Solution) อาจลดเวลาการคำนวณลงมาได้ ถ้านำความรู้ที่ได้จาก ลักษณะเด่น และ ลักษณะด้อย มาช่วยพิจารณาก่อนเริ่มการคำนวณ ซึ่งจะช่วยหาผลลัพธ์ของเกมส์ ที่มีแผนการมาก ๆ ได้ง่ายและสะดวกยิ่งขึ้น พิจารณาตารางผลตอบแทนต่อไปนี้

		B_1	B_2 .... B_n
		y_1	y_2 .... y_n
A_1	x_1	a_{11}	a_{12} .... a_{1n}
A_2	x_2	a_{21}	a_{22} .... a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$ $\quad$ $\vdots$
A_m	x_m	a_{m1}	a_{m2} .... a_{mn}

สำหรับผู้แข่งขันทางแถว (หมายถึง A)

แผนการ A_i ลักษณะเด่นกว่า A_j หมายความว่า สำหรับทุก ๆ สมาชิกในแถวของ A_i จะมากกว่าหรือเท่ากับสมาชิกของแถว A_j ที่สมนัยกัน ฉะนั้นถ้า $A_i \geqq A_j$

จะได้ว่า A_i เป็นแผนการที่เด่นกว่า (Dominance Strategy)

A_j เป็นแผนการที่ด้อยกว่า (Recessive Strategy)

ฉะนั้นผู้แข่งขันทางแถว (หมายถึง A) จะเลือกแผนการ A_i แทนที่จะเลือกแผนการ A_j ซึ่งเป็นแผนการที่ด้อยกว่า นั่นคือ เราสามารถที่จะตัด A_j ทิ้งไปได้ เพราะผลที่จะได้รับน้อยกว่า A_i

ในทำนองเดียวกันสำหรับผู้แข่งขันทางหลัก (หมายถึง B) แผนการ B_i ลักษณะเด่นกว่า B_j หมายความว่า สำหรับทุก ๆ สมาชิกในหลักของ B_i จะน้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกของหลัก B_j ที่สมนัยกันจะเรียกว่า

B_i เป็นแผนการที่เด่นกว่า

B_j เป็นแผนการที่ด้อยกว่า

ดังนั้น B จะเลือกใช้แต่แผนการ B_i เท่านั้น ส่วน B_j เขาจะตัดทิ้งไป

จะเห็นได้ว่า แถวที่มีลักษณะด้อยกว่า จะประกอบด้วยค่าของสมาชิกที่น้อยกว่าแถวอื่น ๆ ในขณะที่หลักที่มีลักษณะด้อยกว่าจะประกอบด้วยค่าของสมาชิกที่มากกว่าหลักอื่น ๆ

เพื่อให้เข้าใจเรื่องนี้ดีขึ้น ลองพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 4.4</u> ในการแข่งขันเกมส์ชนิดหนึ่ง A มีแผนการอยู่ 4 แผนการ ส่วน B มีแผนการเข้าใช้ในการต่อสู้อยู่ 3 แผนการ และเมตริกซ์ แสดงผลได้ของ A มีดังนี้

		1	2	3
	B \ A	y_1	y_2	y_3
1	x_1	1	8	5
2	x_2	6	5	4
3	x_3	0	1	2
4	x_4	7	5	1

จากเมตริกซ์ข้างบนจะเห็นว่า ถ้า A ใช้แผนการ 1 หรือแผนการ 2 จะมีผลได้จากการแข่งขันมากกว่าใช้แผนการ 3 โดยไม่คำนึงถึงว่าผู้แข่งขัน B จะเลือกใช้แผนการใดก็ตาม ด้วยเหตุนี้ผู้แข่งขัน A จะไม่เลือกแผนการ 3 มาเข้าแข่งขันเลย ในเมื่อยังมีแผนการ 1 และแผนการ 2 ที่ดีกว่า ในกรณีนี้กล่าวได้ว่า แผนการ 1 และแผนการ 2 ของผู้แข่งขัน A มีลักษณะเด่นกว่า (Dominance) แผนการ 3 เมื่อแผนการ 3 จะไม่ถูกผู้แข่งขัน A นำออกมาใช้ เราก็ตัดแผนการ 3 ของผู้แข่งขัน A ออกจากเมตริกซ์ได้ เมตริกซ์ผลลัพธ์ของเกมส์จะเป็นดังนี้

	A \ B	1 y_1	2 y_2	3 y_3
1	x_1	1	8	5
2	x_2	6	5	4
4	x_4	7	5	1

ขั้นต่อไปมาดูเมตริกซ์ผลเสียของผู้แข่งขัน B จะเห็นว่า ถ้าผู้แข่งขัน B เลือกแผนการ 3 เข้าแข่งขัน จะมีผลเสียจากการแข่งขันเกมส์น้อยกว่าเลือกเอาแผนการ 2 เข้าแข่งขัน โดยไม่คำนึงถึงว่าผู้แข่งขัน A จะเลือกแผนการใดออกมาแข่งขัน ด้วยเหตุนี้จึงกล่าวได้ว่า แผนการ 3 ของผู้แข่งขัน B มีลักษณะเด่นกว่าแผนการ 2 ของผู้แข่งขัน B และผู้แข่งขัน B จะเลือกแผนการ 3 เข้าแข่งขันตลอดเวลา โดยไม่เลือกแผนการ 2 เลย ด้วยเหตุนี้ เราสามารถตัดแผนการ 2 ของผู้แข่งขัน B ออกจากเมตริกซ์ได้ เมตริกซ์ผลลัพธ์ของคู่แข่งขันจะเป็นดังนี้

		1	3
	A \ B	y_1	y_3
1	x_1	1	5
2	x_2	6	4
4	x_4	7	1

เมื่อใช้กฎเกณฑ์ลักษณะเด่น (Dominance) มาพิจารณาเมตริกซ์ผลลัพธ์ของคู่แข่งขันแล้ว จะสามารถลดขนาดของเมตริกซ์ลงไปได้ จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า เมตริกซ์เดิมมีขนาด 4×3 เมื่อใช้กฎเกณฑ์ของลักษณะเด่นมาขจัดแถวหรือหลักออกไปแล้ว เมตริกซ์สุดท้ายจะมีขนาด 3×2 เมื่อขนาดของเมตริกซ์ลดลง เวลาที่ใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของเกมส์ก็จะลดลงด้วย

เมื่อเมตริกซ์ถูกลดขนาดลง (Reduce) จนถึงขั้นสุดท้าย ก็แสดงว่าไม่มีแผนการหนึ่งแผนการใดของผู้แข่งขันทั้งคู่ที่มีลักษณะเด่นกว่ากันอยู่อีก

<u>ตัวอย่าง 4.5</u> จงหาผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์ต่อไปนี้

		1	2	3
	A \ B	y_1	y_2	y_3
1	x_1	-5	-3	1
2	x_2	2	-1	2
3	x_3	-2	3	4

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาผู้แข่งขันทางแถว (A)

จะเห็นว่าแถวที่ 1 (-5, -3, 1) $\leq$ แถวที่ 2 (2, -1, 2)

แถวที่ 1 จะเป็นลักษณะด้อย ดังนั้น A จะไม่เลือกแผนการที่ 1 นี้เลย จึงตัดแถวที่ 1 นี้ทิ้งไปได้ (x_1 = 0) ทำให้ได้ตารางใหม่ดังนี้

	A \ B	1 y_1	2 y_2	3 y_3
2	x_2	2	-1	2
3	x_3	-2	3	4

พิจารณาผู้แข่งขันทางหลัก (B)

จะเห็นว่าหลักที่ 3 (2, 4) $\geq$ หลักที่ 2 (-1, 3)

$\therefore$ หลักที่ 3 จึงเป็น ลักษณะด้อย ซึ่ง B จะไม่เลือกแผนการ 3 นี้เข้าแข่งขัน จึงตัดทิ้งไปได้ (y_3 = 0) ทำให้ได้ตารางใหม่คือ

	A \ B	1 y_1	2 y_2
2	x_2	2	-1
3	x_3	-2	3

ตารางสุดท้ายนี้เป็น 2×2 เมตริกซ์เกมส์ ซึ่งง่ายแก่การหาผลลัพธ์ โดยใช้สูตร เราจะได้ว่า

$$x_2 = \frac{d - c}{a+d-b-c} = \frac{3 - (-2)}{2 + 3 - (-1) - (-2)} = \frac{5}{8}$$

$$x_3 = \frac{a - b}{a+d-b-c} = \frac{3}{8}$$

$$y_1 = \frac{d - b}{a+d-b-c} = \frac{3 - (-1)}{8} = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}$$

และ $$v = \frac{ad - bc}{a+d-b-c} = \frac{1}{2}$$

ผลลัพธ์ที่เหมาะสม คือ A $(0, \frac{5}{8}, \frac{3}{8})$

B $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

ค่าของเกมส์ $= \frac{1}{2}$

<u>ตัวอย่าง 4.6</u> จงหาผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์ขนาด 3×3 ต่อไปนี้

B

A		y_1	y_2	y_3
	x_1	1	-3	-2
	x_2	0	-4	2
	x_3	-5	2	3

วิธีทำ เมื่อโจทย์กำหนด เมตริกซ์เกมส์มาให้ จะใช้ข้อสรุปในการหาผลลัพธ์เป็นขั้น ๆ ได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 ตรวจดูว่ามี จุดผลเท่ากัน หรือไม่

			B		
		y_1	y_2	y_3	ค่าต่ำสุดของแถว
	x_1	1	-3	-2	-3 ค่าแมกซิมิน
A	x_2	0	-4	2	-4
	x_3	-5	2	3	-5
ค่าสูงสุดของหลัก		1	2	3	

ค่ามินนิแมกซ์

ปรากฏว่า ค่าแมกซิมิน = -3 $\neq$ ค่ามินนิแมกซ์ = 1
นั่นคือเกมส์นี้ไม่มี จุดผลเท่ากัน ฉะนั้น ทั้งคู่จะใช้แผนการผสมเข้าแข่งขัน

ขั้นที่ 2 ทำการตรวจดูว่ามี แถวหรือหลักลักษณะด้อย หรือไม่ ถ้ามีกำจัดลักษณะด้อยออกไป

จะเห็นได้ว่า หลัก ที่ 3 เป็น ลักษณะด้อย เพราะว่าสมาชิกแต่ละค่านั้นมีค่ามากกว่าสมาชิกของหลักที่ 2 แบบสมนัยกัน หรือ (-2, 2, 3) > (-3, -4, 2) ดังนั้น หลักที่ 3 จึงตัดทิ้งไปได้ ได้เมตริกซ์เกมส์ใหม่คือ

B

		y_1	y_2
A	x_1	1	-3
	x_2	0	-4
	x_3	-5	2

ตรวจดูทางด้านแถวบ้าง จะเห็นว่าแถวที่ 2 เป็นลักษณะด้อย เพราะแต่ละค่าของสมาชิกนั้นมีค่าน้อยกว่าสมาชิกของแถวแรก แบบสมนัยกันหรือ (0, -4) < (1, -3) ดังนั้นแถวที่ 2 จึงตัดทิ้งไปได้ ได้เมตริกซ์เกมส์ใหม่ ขนาด 2×2 คือ

B

		y_1	y_2
A	x_1	1	-3
	x_3	-5	2

ขั้นที่ 3 เนื่องจาก เมตริกซ์เกมส์นี้ ถูกลดขนาดลงมาอยู่ในรูปแบบของ 2×2 เมตริกซ์เกมส์ แล้ว เราจึงใช้สูตรหาค่าแผนการที่ดีที่สุด และค่าของเกมส์ดังนี้

ในที่นี้ $a = 1$, $b = -3$, $c = -5$, $d = 2$

$$x_1 = \frac{d - c}{a + d - b - c} = \frac{2 - (-5)}{1 + 2 - (-3) - (-5)} = \frac{7}{11}$$

$$x_3 = 1 - x_1 = 1 - \frac{7}{11} = \frac{4}{11}$$

$$y_1 = \frac{d - b}{a + d - b - c} = \frac{2 - (-3)}{11} = \frac{5}{11}$$

$$y_2 = 1 - y_1 = 1 - \frac{5}{11} = \frac{6}{11}$$

$$v = \frac{ad - bc}{a + d - b - c} = \frac{(1)(2) - (-3)(-5)}{11} = -\frac{13}{11}$$

แผนการที่ดีที่สุดของเกมส์คือ

$A\left(\frac{7}{11}, 0, \frac{4}{11}\right)$, $B\left(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}, 0\right)$

ค่าของเกมส์ที่ดีที่สุด $= -\frac{13}{11}$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาผลลัพธ์ของเกมส์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

วิธีทำ สังเกตเห็นว่า หลักที่ 1 มีลักษณะด้อยกว่า หลักที่ 4 จึงตัดหลักที่ 1 ทิ้งไป การหาผลลัพธ์ก็จะลดลงเหลือ เมตริกซ์เกมส์ ขนาด 3×3

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

ในเมตริกซ์เกมส์นี้ แถวที่ 3 มีลักษณะด้อยกว่าแถวที่ 2 เราจึงตัดแถวที่ 3 ทิ้ง แล้วพิจารณาเมตริกซ์เกมส์ที่เหลือ ซึ่งมีขนาด 2×3

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -1 \\ 5 & -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

ในเมตริกซ์เกมส์ขนาด 2×3 นี้ หลักที่ 3 ของเมตริกซ์เดิมมีลักษณะด้อยกว่าหลักที่ 2 ของเมตริกซ์เดิม เราจึงตัดหลักที่ 3 ทิ้ง เหลือที่จะพิจารณาเมตริกซ์เกมส์ ขนาด 2×2 จากนั้นจึงใช้สูตรหาผลลัพธ์ของเกมส์ ดังนี้

$$x_1 = \frac{d-c}{r} = \frac{-1-5}{-8} = \frac{3}{4} \quad ; r = a + d - b - c$$

$$x_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = \frac{d-b}{r} = \frac{1}{8}$$

$$y_4 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

ค่าของเกมส์ $v = \frac{ad - bc}{r} = -\frac{1}{4}$

แผนการที่เหมาะสม คือ $A(x_1, x_2, 0) = A(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$

$B(0, y_2, 0, y_4) = B(0, \frac{1}{8}, 0, \frac{7}{8})$

4.3 การหาผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์ขนาด $2 \times m$ หรือ $m \times 2$

(The Solution Of $2 \times m$ or $m \times 2$ Matrix Game)

โดยทั่วไปในเกมส์การแข่งขันที่ผลรวมของสองฝ่ายเป็นศูนย์ นั้น จะมีผู้แข่งขัน 2 คน คือ A กับ B และถ้าเกมส์มีจุดผลเท่ากัน การหาผลลัพธ์ของเกมส์ ก็จะไม่ยุ่งยาก ถ้านำหลักเกณฑ์ แมกซิมิน และ มินนิแมกซ์ เข้ามาช่วยหา ก็จะได้แผนการบริสุทธิ์ที่ดีที่สุดของผู้แข่งขัน แต่ถ้าเกมส์ไม่มีจุดผลเท่ากัน การคำนวณหาผลลัพธ์ของเกมส์ที่ดีที่สุดสำหรับคู่แข่งขันก็จะยุ่งยากขึ้น เพราะว่าคู่แข่งขันจะต้องเปลี่ยนมาใช้แผนการผสมและแผนการผสมจะใช้ได้ดีก็ต่อเมื่อผู้แข่งขันต้องรู้ความน่าจะเป็นที่ตนจะนำเอาแต่แผนการออกมาใช้

สำหรับ $2 \times m$ หรือ $m \times 2$ เมตริกซ์เกมส์ คือ เกมส์ที่ประกอบด้วยผู้แข่งขัน 2 คน ซึ่งคนหนึ่งคนใดมีเพียง 2 แผนการ แต่อีกคนหนึ่งมี m แผนการ

การหาผลลัพธ์ของ $2 \times m$ เมตริกซ์เกมส์ มีอยู่ 2 วิธี คือ

1. โดยการใช้เมตริกซ์เกมส์ย่อย (Sub - Matrix Game)
2. โดยวิธีกราฟ (Graphical)

<u>ตัวอย่าง 4.8</u> พิจารณา 2×4 เมตริกซ์เกมส์ ต่อไปนี้

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	ค่าต่ำสุดของแถว
A_1	1	7	0	3	0 ค่าแมกซิมิน
A_2	4	8	−1	6	−1
ค่าสูงสุดของหลัก	4	8	0 ค่ามินนิแมกซ์	6	

จะเห็นว่า ค่า แมกซิมิน = ค่ามินนิแมกซ์ = 0 ดังนั้น เกมส์นี้ จึงมี จุดผลเท่ากัน เกมส์นี้เรียกว่า เกมส์ยุติธรรม (Fair Game) เพราะว่า ค่าของเกมส์ มีค่าเป็นศูนย์ และแผนการที่ดีที่สุด คือ A ใช้แผนการ A_1 และ B ใช้แผนการ B_3

<u>การหาผลลัพธ์โดยใช้เมตริกซ์เกมส์ย่อย (Sub - Matrix Game)</u>

<u>ตัวอย่าง 4.9</u> พิจารณาเมตริกซ์เกมส์ ซึ่งไม่มี ลักษณะด้อย , ลักษณะเด่น และ จุดผลเท่ากัน ต่อไปนี้

			B: 1, y_1	2, y_2	3, y_3
A	1	x_1	0	3	2
	2	x_2	4	2	3

จะเห็นว่าทุก ๆ $2 \times m$ เมตริกซ์เกมส์ จะมี 2×2 เมตริกเกมส์ย่อย ที่เป็นตัวช่วยให้เราหาผลลัพธ์ของ $2 \times m$ เมตริกซ์เกมส์ได้ ซึ่งจำนวนเมตริกซ์ย่อย มีได้ทั้งหมด $\binom{m}{2} = m(m-1)/2$

จาก เมตริกซ์เกมส์ ในตัวอย่างนี้ จะแบ่งได้ออกเป็น 3 เมตริกซ์เกมส์ย่อย เท่านั้น คือ

	1 y_1	2 y_2
1 x_1	0	3
2 x_2	4	2

เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1

	1 y_1	3 y_3
1 x_1	0	2
2 x_2	4	3

เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 2

	2 y_2	3 y_3
1 x_1	3	2
2 x_2	2	3

เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 3

เมื่อแยกออกเป็นเมตริกซ์เกมส์ย่อย ดังนี้แล้ว เราก็หาค่าของเกมส์ของทั้ง 3 ได้โดยใช้สูตรของ 2×2 เมตริกซ์เกมส์ คือ

$$v_1 = \frac{ad - bc}{a + d - b - c} = \frac{(0)(2)-(3)(4)}{(0)+(2)-3-4} = \frac{-12}{-5} = \frac{12}{5}$$

v_1 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1 $= \frac{12}{5} = 2.4$

v_2 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 2 $= \frac{8}{3} = 2.6$

v_3 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 3 $= \frac{5}{2} = 2.5$

จะเห็นว่า ค่า v_1 มีค่าน้อยที่สุด หมายความว่า B จะเสียน้อยที่สุด ฉะนั้น B ย่อมจะเลือกใช้ เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1 คือ เลือกแผนการที่ 1, 2 เท่านั้น จะเห็นว่า 2×3 เมตริกซ์เกมส์นี้จะถูกลดขนาดลงมาเหลือเป็น 2×2 เมตริกซ์เกมส์ คือ เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1 แล้วใช้สูตรหาความน่าจะเป็น จะได้ดังนี้ $x_1 = \frac{d-c}{a+d-b-c} = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$

$$y_1 = \frac{d-b}{a+d-b-c} = \frac{-1}{-5} = \frac{1}{5} , \quad y_2 = \frac{4}{5}$$

$\therefore$ ผลลัพธ์ ของ เมตริกซ์เกมส์ นี้คือ

$x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$ หรือ A $\left(\frac{2}{5} , \frac{3}{5}\right)$

$y_1 = \frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{4}{5}$, $y_3 = 0$ หรือ B $\left(\frac{1}{5} , \frac{4}{5} , 0\right)$

ค่าของเกมส์ $= \frac{12}{5}$

ตัวอย่าง 4.10 พิจารณา 2×7 เมตริกซ์เกมส์ ต่อไปนี้

	A \ B	1 y_1	2 y_2	3 y_3	4 y_4	5 y_5	6 y_6	7 y_7	ค่าต่ำสุดของแถว
1	x_1	-6	-1	1	4	7	4	3	-6
2	x_2	7	-2	6	3	-2	-5	7	-5 ค่าแมกซิมิน
	ค่าสูงสุดของหลัก	7	-1 ค่ามินนิแมกซ์	6	4	7	4	7	

ค่าแมกซิมิน (-5) $\neq$ ค่ามินนิแมกซ์ (-1) ดังนั้นจึงไม่มีจุดผลเท่ากัน

เราจะสังเกตเห็นว่า แผนการที่ 3, 4, 5 และ 7 เป็นลักษณะด้อยกว่า แผนการที่ 2 ดังนั้นเราจึงตัด แผนการที่ 3, 4, 5 และ 7 ทิ้งได้ และเกมส์นี้จะถูกลดขนาดเหลือ 2×3 ดังนี้

		1	2	6	
	A \ B	y_1	y_2	y_6	ค่าต่ำสุดของแถว
1	x_1	-6	-1	4	-6
2	x_2	7	-2	-5	-5 ค่าแมกซิมิน
	ค่าสูงสุดของหลัก	7	-1	4	

ค่ามินนิแมกซ์

จากเมตริกซ์เกมส์ นี้ จะแบ่งออกได้เป็น 3 เมตริกซ์เกมส์ย่อย คือ

	y_1	y_2
x_1	-6	-1
x_2	7	-2

<u>เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1</u>

	y_1	y_6
x_1	-6	4
x_2	7	-5

<u>เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 2</u>

	y_2	y_6
x_1	-1	4
x_2	-2	-5

<u>เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 3</u>

ค่าของเกมส์ ก็จะเป็นดังนี้

v_1 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1 $= -\frac{19}{14} = -1.3$

v_2 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 2 $= \frac{2}{-22} = -\frac{1}{11} = -0.09$

v_3 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 3 $= \frac{13}{-8} = -1.6$

จะเห็นว่าค่า v_3 มีค่าน้อยที่สุด คือ -1.6 ซึ่งหมายความว่า B จะเลือกแผนการที่ 2 และ 6 เพื่อที่จะให้ได้ผลตอบแทนดีที่สุดและเราจะได้ว่า

$$x_1 = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}, \quad x_2 = \frac{5}{8}$$

$$y_2 = \frac{-9}{-8} = \frac{9}{8}, \quad y_6 = -\frac{1}{8}$$

แต่ค่า $y_6 = -\frac{1}{8}$ ค่าความน่าจะเป็นติดลบเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น B จะเลือกค่า v_1 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1 ซึ่งจะให้ผลลัพธ์ดีที่สุดคือ

$$x_1 = \frac{9}{14}, \quad x_2 = \frac{5}{14}$$

$$y_1 = \frac{1}{14}, \quad y_2 = \frac{13}{14}$$

ค่าของเกมส์ $= -\frac{19}{14}$

<u>ตัวอย่าง 4.11</u> จงหาผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์ 3 × 2 ต่อไปนี้

		B: y_1	y_2	ค่าต่ำสุดของแถว
A	x_1	-3	6	-3
	x_2	6	3	3 ค่าแมกซิมิน
	x_3	8	-2	-2
ค่าสูงสุดของหลัก		8	6 ค่ามินิแมกซ์	

จะสังเกตเห็นว่าค่าแมกซิมิน (= 3) $\neq$ ค่ามินิแมกซ์ (= 6) ดังนั้นเกมส์นี้จะไม่มีจุดผลเท่ากัน คู่แข่งขันทั้งคู่จะเปลี่ยนไปใช้แผนการผสม

จากเมตริกซ์เกมส์นี้ จะแบ่งออกได้เป็น 3 เมตริกซ์เกมส์ย่อยคือ

	y_1	y_2
x_1	-3	6
x_2	6	3

เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1

	y_1	y_2
x_1	-3	6
x_3	8	-2

เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 2

	y_1	y_2
x_2	6	3
x_3	8	-2

เมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 3

ค่าของเกมส์จะเป็นดังนี้

v_1 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1 $= \frac{-45}{-12} = 3.75$

v_2 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 2 $= \frac{-42}{-19} = 2.21$

v_3 ของเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 3 $= \frac{-36}{-7} = 5.14$

จะเห็นว่าค่า v_3 มีค่ามากที่สุด คือ 5.14 ซึ่งหมายความว่า A จะเลือกแผนการที่ 2 และที่ 3 เพื่อที่จะให้ได้ผลตอบแทนดีที่สุด ซึ่งจะได้

$$x_2 = \frac{-2-8}{-7} = \frac{10}{7} > 1 \quad \text{เป็นไปไม่ได้}$$

ดังนั้น A จะเลือกเมตริกซ์เกมส์ย่อยที่ 1 จะได้ผลลัพธ์ดีที่สุด คือ

$$x_1 = \frac{3-6}{-12} = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{4}$$

$$y_1 = \frac{3-6}{-12} = \frac{1}{4}, \quad y_2 = \frac{3}{4}$$

ค่าของเกมส์ $= 3.75$

4.4 วิธีการหาผลลัพธ์ของเกมส์ที่ดีที่สุดเมื่อคู่แข่งขันใช้แผนการผสม

ในการคำนวณหาค่าเฉลี่ยที่ดีที่สุดของเกมส์ที่ผลรวมของสองฝ่ายเป็นศูนย์ และความน่าจะเป็นที่ให้ผลต่อผู้แข่งขันที่ดีที่สุดในการแข่งขันเกมส์นั้น มีวิธีการหาผลลัพธ์หลายวิธีด้วยกัน มีอยู่ 4 วิธี ที่มีผู้นำไปใช้ในการคำนวณนี้อยู่เสมอ คือ

1. วิธีทางพีชคณิต (Algebraic Solution)
2. วิธีการโปรแกรมเชิงเส้นตรง (Linear Programming Solution)
3. วิธีกราฟ (Graphic Solution)
4. วิธีการประมาณ (Approximate Solution)

4.4.1 วิธีทางพีชคณิต

เราอาศัยนิยามค่าเฉลี่ยที่ดีที่สุดของเกมส์

$$v = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, x_i \, y_j$$

มาเป็นหลักในการคำนวณดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.12 ตัวอย่างที่จะแสดงต่อไปนี้ จะแสดงวิธีหาโดยวิธีทางพีชคณิต ในตัวอย่างนี้ เมตริกซ์ของผลตอบแทนที่จะให้ แก่ผู้แข่งขัน A และผู้แข่งขัน B รวมทั้งความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขัน A และผู้แข่งขัน B ให้ไว้กับแต่ละแผนการของตน ดังแสดงไว้ในตาราง จงหาแผนการผสมที่ดีที่สุดของ A และ B และหาค่าเฉลี่ยที่ดีที่สุดของเกมส์นี้ด้วย

		B			
		y_1	y_2	y_3	ค่าต่ำสุดของแถว
	x_1	−1	2	1	−1 ค่าแมกซิมิน
A	x_2	1	−2	2	−2
	x_3	3	4	−3	−3
ค่าสูงสุดของหลัก		3	4	2	
				ค่ามินนิแมกซ์	

วิธีทำ จะเห็นว่า ค่ามินนิแมกซ์ไม่เท่ากับค่าแมกซิมิน ดังนั้นผู้แข่งขันทั้งสองจะหันไปใช้แผนการผสมจากค่าเฉลี่ยที่ดีที่สุดของเกมส์

$$v = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, x_i\, y_j$$

เมื่อค่า x_i และ y_j คือ ความน่าจะเป็น ที่จะทำให้ A และ B ได้รับผลตอบแทนจากเกมส์ดีที่สุด แทนค่าตัวเลขของ a_{ij} จากตารางลงไปใน v จะได้

$$v = y_1(-x_1+x_2+3x_3) + y_2(2x_1-2x_2+4x_3) + y_3(x_1+2x_2-3x_3)$$

เนื่องจากสมการข้างบนนี้จะเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่า ของ y_j ซึ่งก็หมายความว่า สมการข้างบนนี้ก็ยังคงเป็นความจริงในกรณีที่ค่าใดค่าหนึ่งของ y_j มีค่าเท่ากับ 1 ส่วน y_j ที่เหลือ (ในตัวอย่างนี้อีก 2 ค่า) มีค่าเท่ากับศูนย์

สมมุติให้ y_1 มีค่าเท่ากับ 1 ส่วน y_2 และ y_3 มีค่าเท่ากับศูนย์ทั้งคู่ เราจะได้

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = v \qquad (1)$$

ต่อไป ถ้าสมมุติให้ y_2 และ y_3 มีค่าเท่ากับ 1 ส่วน y_j ตัวอื่นมีค่าเท่ากับศูนย์ เราก็จะได้สมการอีกสองสมการตามลำดับดังนี้

$$2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = v \qquad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = v \qquad (3)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับผู้แข่งขัน A ค่า x_1 อาจจะมีค่าเท่าใดก็ได้ และขณะเดียวกัน สมการของ v ที่กล่าวข้างบนนี้ ก็ยังคงเป็นความจริง ถ้าค่าใดค่าหนึ่งของ x_i มีค่าเท่ากับ 1 และค่า x_i ตัวอื่น ๆ มีค่าเท่ากับศูนย์

ถ้าสมมุติให้ x_1 , x_2 และ x_3 มีค่าเท่ากับ 1 ที่ละครั้ง ส่วนค่า x_i ที่เหลือมีค่าเท่ากับศูนย์ เราก็จะได้สมการเพิ่มอีก 3 สมการ ตามลำดับดังนี้

$$-y_1 + 2y_2 + y_3 = v \qquad (4)$$

$$y_1 - 2y_2 + 2y_3 = v \qquad (5)$$

$$3y_1 + 4y_2 - 3y_3 = v \qquad (6)$$

ตามกฎของความน่าจะเป็น จะมีสมการเพิ่มขึ้นอีก 2 สมการ จากหลักการที่ว่าผลรวมของความน่าจะเป็นของผู้แข่งขัน A หรือผู้แข่งขัน B ในทุก ๆ แผนการที่เขามีอยู่จะต้องเท่ากับ 1 นั่นคือ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad (7)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1 \qquad (8)$$

จากนั้นจึงแก้สมการโดยวิธีพีชคณิตธรรมดา จะได้ค่า x_i และ y_j ซึ่งทุก ๆ ค่าของ x_i และ y_j จะต้องมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ผลลัพธ์ของสมการข้างบนนี้ก็คือ

$$x_1 = \frac{17}{46} \quad , \quad y_1 = \frac{14}{46}$$

$$x_2 = \frac{20}{46} \quad , \quad y_2 = \frac{12}{46}$$

$$x_3 = \frac{9}{46} \quad , \quad y_3 = \frac{20}{46}$$

นั่นคือแผนการที่เหมาะสมของ A คือ $A\left(\frac{17}{46}, \frac{20}{46}, \frac{9}{46}\right)$

ของ B คือ $B\left(\frac{14}{46}, \frac{12}{46}, \frac{20}{46}\right)$

ค่าของเกมส์ $= \frac{30}{46}$

ในการใช้แผนการผสมเข้าแข่งขันนี้ ผู้แข่งขัน A จะได้ผลได้จากการเล่นเกมส์โดยเฉลี่ยเท่ากับ $\frac{30}{46}$ เมื่อเปรียบเทียบกับการที่เขาใช้แผนการบริสุทธิ์เข้าแข่งขัน ซึ่งเขาสามารถประกันผลเสียจากการเล่นเกมส์นี้ไม่มากกว่า 1 ในด้านผู้แข่งขัน B เมื่อใช้แผนการผสมนี้แล้ว จะพบว่าโดยเฉลี่ยเขาจะเสียเท่ากับ $-\frac{30}{46}$ ในการเล่นเกมส์นี้ ซึ่งถ้าเปรียบเทียบกับการที่เขาใช้แผนการบริสุทธิ์เข้าแข่งขันแล้ว เขาไม่สามารถจะมั่นใจได้ว่า เขาจะเสียผลประโยชน์จากการเล่นเกมส์นี้น้อยกว่า 2

4.4.2 การหาผลลัพธ์ของเกมส์โดยวิธีการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

(The Solution Of Matrix Game by Linear Programming)

จากที่ผ่าน ๆ มา เราทราบแล้วว่าเมตริกซ์เกมส์ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของ ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงได้ และจัดให้อยู่ในรูปของตาราง ซิมเพล็กซ์ ได้

ในหัวข้อนี้จะแสดงวิธีหาผลลัพธ์ของเกมส์โดยวิธี ซิมเพล็กซ์ เข้าช่วยคำนวณ ซึ่งเป็นวิธีที่ใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับเกมส์ที่สำคัญยิ่ง เพราะใช้แก้ปัญหาได้เสมอ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.13 จงหาผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์ต่อไปนี้ โดยวิธี ซิมเพล็กซ์

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & y_1 & y_2 \\ & & \\ A \quad x_1 & 1 & 4 \\ x_2 & 2 & 0 \\ x_3 & -1 & 2 \end{array}$$

วิธีหาผลลัพธ์

เนื่องจากสมาชิกบางตัวของเมตริกซ์เกมส์ (Cell Entries) เป็นลบ เพื่อที่จะให้ทุกตัวเป็นบวก จึงต้องบวกด้วย k=1 เข้าไปในสมาชิกของเมตริกซ์ทุกตัว ทำให้ได้ เมตริกซ์ ใหม่ดังนี้

			y_1	y_2
		x_1	2	5
	A	x_2	3	1
		x_3	0	3

(B: columns y_1, y_2)

ให้แผนการสำหรับ A เป็น A (x_1, x_2,x_3) และ B เป็น B(y_1,y_2) จากข้อกำหนดที่ว่า

$$x_1 , x_2 , x_3 \geqq 0$$

และ $$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$y_1 , y_2 \geqq 0$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

หาผลลัพธ์ของปัญหา B

จาก $y_1 \geqq 0$, $y_2 \geqq 0$ (1)

$y_1 + y_2 = 1$ (2)

เมื่อ A เลือกแผนการบริสุทธิ์แต่ละแผนการของเขาแล้ว B คาดว่าจะต้องเสียดังนี้ $2y_1 + 5y_2$ เมื่อ A เลือกแผนการที่ 1

$3y_1 + 1y_2$ เมื่อ A เลือกแผนการที่ 2

$0y_1 + 3y_2$ เมื่อ A เลือกแผนการที่ 3

ให้ v_2 ซึ่ง $v_2 \geq 0$ เป็นค่าสูงสุด จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 + 5y_2 &\leq v_2 \\ 2y_1 + 1y_2 &\leq v_2 \\ 0y_1 + 3y_2 &\leq v_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

หารสมการ (1) , (2) และ (3) ด้วย v_2 จะได้

$$\frac{y_1}{v_2} \geq 0 \quad , \quad \frac{y_2}{v_2} \geq 0 \qquad (4)$$

$$\frac{y_1}{v_2} + \frac{y_2}{v_2} = \frac{1}{v_2} \qquad (5)$$

และ

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{y_1}{v_2} + 5\frac{y_2}{v_2} &\leq 1 \\ 3\frac{y_1}{v_2} + 1\frac{y_2}{v_2} &\leq 1 \\ 0\frac{y_1}{v_2} + 3\frac{y_2}{v_2} &\leq 1 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

แต่ B ต้องการเลือกแผนการ (y_1 , y_2) เพื่อที่จะให้ v_2 มีค่าต่ำสุด นั่นคือ ก็จะต้องทำให้ $\frac{1}{v_2}$ มีค่าสูงสุด

ให้ $Y_1 = \frac{y_1}{v_2}$, $Y_2 = \frac{y_2}{v_2}$ และ $M = \frac{1}{v_2}$ แทนลงในสมการ (4) , (5) , (6) จะได้ $Y_1 \geq 0$, $Y_2 \geq 0$ (7)

$$\left.\begin{aligned} 2Y_1 + 5Y_2 &\leq 1 \\ 3Y_1 + 1Y_2 &\leq 1 \\ 0Y_1 + 3Y_2 &\leq 1 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

และ $Y_1 + Y_2 = M$ เมื่อต้องการ M เป็นค่าสูงสุด

หรือ $-Y_1 - Y_2 + M = 0$ (9)

ทำ อสมการ (8) ให้เป็นสมการโดยเติม ตัวแปรเพิ่ม Y_3, Y_4, Y_5 ลงไปตามลำดับ จะได้

$$Y_1 \geqq 0 \;,\; Y_2 \geqq 0 \;,\; Y_3 \geqq 0 \;,\; Y_4 \geqq 0 \;,\; Y_5 \geqq 0$$

$$\left.\begin{aligned} 2Y_1 + 5Y_2 + Y_3 \qquad\qquad &= 1 \\ 3Y_1 + 1Y_2 \qquad + Y_4 \qquad &= 1 \\ 0Y_1 + 3Y_2 \qquad\qquad + Y_5 &= 1 \\ \text{และ} \quad -Y_1 - Y_2 \qquad\qquad + M &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

เขียนให้อยู่ในรูปแบบของตารางซิมเพล็กซ์ ได้ดังนี้

ตารางที่ 1

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	M		
$1 \div 2 = \frac{1}{2}$	2	5	1	0	0	0	1	Y_3
$1 \div 3 = \frac{1}{3}$	3	1	0	1	0	0	1	Y_4
	0	3	0	0	1	0	1	Y_5
	−1	−1	0	0	0	1	0	M
	↑							

ดูค่าที่เป็นลบมากที่สุดในแถวสุดท้ายในที่นี้คือ −1, −1 เป็นค่าลบที่มากที่สุด ซึ่งจะเลือกตัวไหนก็ได้ ในที่นี้จะเลือก −1 ตัวแรก คือหลักแรกเป็นตัวยืน และใช้สมาชิกในหลักนี้ที่ไม่เป็นศูนย์หาร หลักสุดท้าย ซึ่งแต่ละแถว สมนัยกันจะได้

$$a_{11} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$a_{21} = 3 \Rightarrow \frac{1}{3}$$

ใช้ผลหารที่มีค่าน้อยที่สุดในที่นี้คือ $\frac{1}{3}$ นั่นคือ $a_{21} = 3$ จะเรียกว่า จุดหมุน (Pivot) ส่วนการใส่ใน ตารางซิมเพล็กซ์ ถัดไปในการทำซ้ำ ๆ กัน (Iteration) ทำดังนี้

1. แทนที่จุดหมุน (Pivot) ด้วยส่วนกลับของมัน เช่น 3 แทนด้วย $\frac{1}{3}$
2. แถวของจุดหมุน(Pivotal Row) หารตลอดด้วยจุดหมุน (Pivot)
3. หลักของจุดหมุน (Pivotal Column)หารตลอดด้วยค่าลบของจุดหมุน (Negative Pivot)
4. สำหรับที่เหลือใช้ค่าเดิมตั้งลบด้วยผลคูณของ a กับ b

โดย a คือค่าใน ตารางเดิมที่อยู่เหนือหรือใต้จุดหมุนในแถวเดียวกัน ตัวที่จะหา

b คือ ค่าในตารางใหม่ที่อยู่ในแถวของจุดหมุนและหลักเดียวกับตัวที่กำลังหา

เช่น $1 - 2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, $1 - 0 \times \frac{1}{3} = 1$

$$0 - (-1) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

สังเกตตัวแปรเข้าและตัวแปรออก ซึ่งทำให้ได้ตารางใหม่ (ดูตัวอย่างในความรู้พื้นฐาน)

ตารางที่ 2

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	M		
$\frac{1}{3} / \frac{13}{3} = \frac{1}{13}$	0	$\frac{13}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	Y_3
$\frac{1}{3} / \frac{1}{3} = 1$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	Y_1
$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	0	3	0	0	1	0	1	Y_5
	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	M

ทำโดยวิธีเดียวกันได้

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{13} = \frac{4}{13}$$

$$1 - 3 \times \frac{1}{13} = \frac{10}{13}$$

$$\frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{13} = \frac{5}{13}$$

ตารางที่ 3

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	M		
0	1	$\frac{3}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0	0	$\frac{1}{13}$	Y_2
1	0	$-\frac{1}{13}$	$\frac{5}{13}$	0	0	$\frac{4}{13}$	Y_1
0	0	$-\frac{9}{13}$	$\frac{6}{13}$	1	0	$\frac{10}{13}$	Y_5
0	0	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	1	$\frac{5}{13}$	M

ในแถวสุดท้ายของตารางนี้ จะเห็นว่าทุก ๆ ค่าเป็นบวกหรือเท่ากับศูนย์ทั้งหมด ซึ่งก็เป็นอันสิ้นสุดของขบวนการหาโดย วิธีซิมเพล็กซ์ สำหรับ ปัญหาของ B ซึ่ง ผลลัพธ์ที่เหมาะสมของ B มีดังนี้

$$M = \frac{5}{13} \;; \qquad v_2 = \frac{1}{M} = \frac{13}{5}$$

$$Y_1 = \frac{4}{13} \;; \qquad y_1 = v_2 Y_1 = \frac{4}{13} \times \frac{13}{5} = \frac{4}{5}$$

$$Y_2 = \frac{1}{13} \;; \qquad y_2 = v_2 Y_2 = \frac{1}{13} \times \frac{13}{5} = \frac{1}{5}$$

นั่นคือ ค่า แผนการที่ .เหมาะสมของ B คือ $B\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$ และ B คาดว่าจะต้องจ่ายให้ A $= \frac{13}{5} - 1 = \frac{8}{5}$

<u>หมายเหตุ</u> กระบวนการ วิธีซิมเพล็กซ์ ที่ใช้แก้สมการนั้น มีหลายวิธี ซึ่งให้คำตอบตรงกัน ซึ่งวิธีปัจจุบันจะบอกแต่การใช้ตารางเฉพาะ(Condensed Tableau): ดังนี้

ผู้แข่งขัน B

Y_1	Y_2		
2	5	1	Y_3
3	1	1	Y_4
0	3	1	Y_5
-1	-1	0	M

(ตารางเฉพาะเริ่มต้น)

(จุดหมุนตัวแรก การเปลี่ยน Y_1 และ Y_4)

Y_1	Y_2		
$-\frac{2}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$	Y_3
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Y_1
0	3	1	Y_5
$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	M

(จุดหมุนตัวที่สอง , การเปลี่ยน Y_2 และ Y_3)

Y_4	Y_3		
$-\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{1}{13}$	Y_2
$\frac{5}{13}$	$-\frac{1}{13}$	$\frac{4}{13}$	Y_1
$\frac{6}{13}$	$-\frac{9}{13}$	$\frac{10}{13}$	Y_5
$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$	

(ตารางสุดท้ายที่เหมาะสม)

<u>สำหรับการหาผลลัพธ์ของปัญหา A</u>

ให้แผนการของ A เป็น A (x_1 , x_2 , x_3) ซึ่ง

$$x_1 \geqq 0 \ , \ x_2 \geqq 0 \ , \ x_3 \geqq 0 \qquad (11)$$

และ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad (12)$$

ผลได้เฉลี่ยของ A ต่อแต่ละการเลือกแผนการของ B ตามลำดับจะเป็น

$2x_1 + 3x_2 + 0x_3$ และ $5x_1 + 1x_2 + 3x_3$

ให้ v_1 เป็นค่าสูงสุด จะได้

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 &\geqq v_1 \\ 5x_1 + 1x_2 + 3x_3 &\geqq v_1 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

หารสมการ (11) , (12) และ (13) ด้วย v_1 จะได้

$$\frac{x_1}{v_1} \geqq 0 \ , \ \frac{x_2}{v_1} \geqq 0 \ , \ \frac{x_3}{v_1} \geqq 0 \qquad (14)$$

และ

$$\frac{x_1}{v_1} + \frac{x_2}{v_1} + \frac{x_3}{v_1} = \frac{1}{v_1} \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{x_1}{v_1} + 3\frac{x_2}{v_1} + 0\frac{x_3}{v_1} &\geqq 1 \\ 5\frac{x_1}{v_1} + 1\frac{x_2}{v_1} + 3\frac{x_3}{v_1} &\geqq 1 \end{aligned}\right. \qquad (16)$$

A ต้องการเลือกแผนการ (x_1, x_2, x_3) ของเขา ให้ค่า v_1 เป็นค่าสูงสุด นั่นคือ ก็ต้องทำ $\frac{1}{v_1}$ มีค่าต่ำสุด นั่นเอง

ให้ $X_1 = \frac{x_1}{v_1}$; $X_2 = \frac{x_2}{v_1}$; $X_3 = \frac{x_3}{v_1}$, $m = \frac{1}{v_1}$

แทนลงในสมการ (14) , (15) และ (16) จะได้

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ , \ X_3 \geq 0 \qquad (17)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X_1 + 3X_2 + 0X_3 \geq 1 \\ 5X_1 + 1X_1 + 3X_3 \geq 1 \end{array}\right\} \qquad (18)$$

ซึ่ง $X_1 + X_2 + X_3 = m$, m เป็นค่าต่ำสุด (19)

จากสมการ (19) ให้ $m = -M'$ แทนลงไปจะได้

$$X_1 + X_2 + X_3 + M' = 0 \qquad (20)$$

นั่นคือ เพื่อจะให้ได้ค่าต่ำสุดของ m เราต้องทำให้ M' เป็นค่าสูงสุด ทำอสมการ(18) ให้เป็นสมการโดยเติมตัวแปรเพิ่มที่ไม่เป็นลบ X_4 , X_5 และตัวแปรเทียมที่ไม่เป็นลบ pb_1 , pb_2 (โดยที่ p เป็นเลขบวก) ลงไปตามลำดับ จะได้ตัวใหม่

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0 \ , \ X_3 \geq 0 \ , \ X_4 \geq 0 \ , \ X_5 \geq 0 \ , \ b_1 \geq 0 \ , \ b_2 \geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2X_1 + 3X_2 + 0X_3 - X_4 + b_1 = 1 \\ 5X_1 + 1X_2 + 3X_3 - X_5 + b_2 = 1 \\ X_1 + X_2 + X_3 + pb_1 + pb_2 + M' = 0 \end{array}\right\} \qquad (21)$$

สมการ (21) เขียนให้อยู่ในรูปแบบของตารางซิมเพล็กซ์ ได้ดังนี้

ตารางที่ 1

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_1	b_2	M'	
2	3	0	-1	0	1	0	0	1
5	1	3	0	-1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0
					p	p		

เพื่อให้ตารางที่ 1 มีผลลัพธ์มูลฐานที่อาจกระทำได้ (Basic Feasible Solution) โดยคูณ 2 แถวแรกด้วย (-p) แล้วบวกเข้ากับแถวสุดท้าย จะได้ตารางที่มี ผลลัพธ์มูลฐานที่อาจกระทำได้ ซึ่งรวมตัวแปรเทียมไว้ด้วย ได้ตารางใหม่ คือ

ตารางที่ 2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_1	b_2	M'		
$\frac{1}{2}$	2	3	0	-1	0	1	0	0	1	b_1
→ $\frac{1}{5}$	5	1	3	0	-1	0	1	0	1	b_2
	1	1	1	0	0	0	0	1	0	M'
	-7p	-4p	-3p	1p	1p				-2p	
	↑									

ทำต่อไปโดยวิธีเดียวกันกับ ปัญหาของ B จะได้ตารางใหม่ดังนี้

ตารางที่ 3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_1	b_2	M'		
$\rightarrow \frac{3}{15}$	0	$\frac{13}{5}$	$-\frac{6}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	b_1
1	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	x_1
	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	M'
		$-\frac{13}{5}p$	$\frac{6}{5}p$	$1p$	$-\frac{2}{5}p$		$\frac{3}{5}p$		$-\frac{3}{5}p$	

ตารางที่ 4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_1	b_2	M'		
0	1	$-\frac{6}{13}$	$-\frac{5}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{5}{13}$	$-\frac{2}{13}$	0	$\frac{3}{13}$	x_2
1	0	$\frac{9}{13}$	$\frac{1}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$-\frac{1}{13}$	$\frac{3}{13}$	0	$\frac{2}{13}$	x_1
0	0	$\frac{10}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{1}{13}$	$-\frac{4}{13}$	$-\frac{2}{13}$	1	$-\frac{5}{13}$	M'
					$1p$	$1p$			

ตารางที่ 4 ให้ค่า ผลลัพธ์มูลฐานที่อาจกระทำได้ ในเทอมของตัวแปรเดิม $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ สำหรับตัวแปรเทียม b_1 , b_2 นั้น จะถูกตัดทิ้งไป ส่วน $\mathbf{x}_3 = 0$ เพราะว่ามันไม่อยู่ในผลลัพธ์มูลฐานที่อาจกระทำได้

ดังนั้นจากตารางสุดท้ายนี้จะได้ผลลัพธ์ปัญหาของ A ดังนี้

$$m = -M = -\left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{5}{13} \qquad v_1 = \frac{1}{m} = \frac{13}{5}$$

$$\mathbf{x}_1 = \frac{2}{13}, \qquad x_1 = v_1\mathbf{x}_1 = \frac{2}{5}$$

$$\mathbf{x}_2 = \frac{3}{13}, \qquad x_2 = v_1\mathbf{x}_2 = \frac{3}{5}$$

$$\mathbf{x}_3 = 0 \qquad x_3 = v_1\mathbf{x}_3 = 0$$

นั่นคือแผนการที่ดีที่สุดของ A คือ $A\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$ และค่าของเกมส์

$$v_1 = \frac{13}{5} - 1 = \frac{8}{5}$$

จะเห็นได้ว่า v_1 และ v_2 มีค่าเท่ากันคือ $\frac{13}{5} = v$ ซึ่งเป็นค่าของเกมส์นั่นเอง ซึ่งตรงกับ ทฤษฎีมินนิแมกซ์ แต่เดิมจาก เมตริกซ์เกมส์ที่กำหนดให้นั้น เราเอา 1 บวกเข้าไปในสมาชิกเมตริกซ์เกมส์ทุกตัว ดังนั้น เมื่อได้ค่าของเกมส์ ออกมาจึงต้องลบด้วย 1

$$\text{ค่าของเกมส์} = \frac{13}{5} - 1 = \frac{8}{5}$$

ผลลัพธ์ของเกมส์ที่สมบูรณ์ คือ

$x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{3}{5}$, $x_3 = 0$ หรือ A ($\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, 0)

$y_1 = \frac{4}{5}$, $y_2 = \frac{1}{5}$ หรือ B ($\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$)

ค่าของเกมส์ $= \frac{8}{5}$

กระบวนการ ซิมเพล็กซ์ ที่ใช้แก้สมการนั้นมีหลายวิธี ซึ่งให้คำตอบตรงกัน บางวิธีก็สั้น แต่บางวิธีก็ยาว ลองพิจารณาวิธีข้างล่างต่อไปนี้

มีความสัมพันธ์ว่า

ให้ X เป็นผลลัพธ์ที่เหมาะสมของปัญหาสูงสุด (ปัญหาของ A)

Y เป็นผลลัพธ์ที่เหมาะสมของปัญหาต่ำสุด (ปัญหาของ B)

และ $v_0 = v_1 = v_2$ (ตามทฤษฎีมินนิแมกซ์)

และให้ (i) $x_0 = \frac{1}{v_0} Y$ เมื่อ x_0 คือแผนการที่เหมาะสมของ A

(ii) $y_0 = \frac{1}{v_0} X$ เมื่อ y_0 คือแผนการที่เหมาะสมของ B

(iii) $v = \frac{1}{v_0} - k$ เมื่อ v เป็นค่าของเกมส์และ k คือค่าที่บวกเข้าไปในเมตริกซ์เพื่อทำให้สมาชิกทุกตัวเป็นบวก ซึ่งสามารถแก้ปัญหาโจทย์ได้ดังนี้

ตัวอย่าง 4.14 จากเมตริกซ์เกมส์ขนาด 3×3 ต่อไปนี้ จงหาแผนการที่เหมาะสม (Optimal Strategy)และค่าของเกมส์

B

		y_1	y_2	y_3	ค่าต่ำสุดของแถว
	x_1	1	-2	2	-2
A	x_2	-3	0	-1	-3
	x_3	1	-1	0	-1 ค่าแมกซิมิน
ค่าสูงสุดของหลัก		1	0	2	
			ค่ามินนิแมกซ์		

วิธีทำ ขั้นที่ 1 ตรวจดูว่ามีจุดผลเท่ากันหรือไม่ ? ปรากฏว่าไม่มี

ขั้นที่ 2 ตรวจดูว่ามีแถวหรือหลักลักษณะด้อยหรือไม่ ? ปรากฏว่าไม่มี

ขั้นที่ 3 เมื่อลดขนาดเมตริกซ์ลงมาไม่ได้ ทำการหาผลลัพธ์ของเกมส์โดยใช้วิธี การโปรแกรมเชิงเส้นตรง

เนื่องจากว่าสมาชิกบางตัวในเมตริกซ์เป็นลบ จึงต้องบวกด้วย $k = 4$ ลงไปในทุก ๆ สมาชิก ทำให้ได้ เมตริกซ์ใหม่ดังนี้

			y_1	y_2	y_3
			B		
	x_1		5	2	6
A	x_2		1	4	3
	x_3		5	3	4

เมื่อได้เมตริกซ์ที่ไม่เป็นลบแล้วทำการหาผลลัพธ์ โดยวิธีซิมเพล็กซ์ เป็นขั้น ๆ ได้ดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> สมาชิกในเมตริกซ์นี้เราสามารถเขียนออกมาจะได้ตารางแรกดังนี้ (โดยอาศัยวิธีการเดียวกับตัวอย่าง 4.12)

x_1	x_2	x_3					
5	2	6	1	0	0	1	แถวที่ 1
1	4	3	0	1	0	1	แถวที่ 2
5	3	4	0	0	1	1	แถวที่ 3
-1	-1	-1	0	0	0	0	แถวที่ 4

<u>ตารางที่ 1</u>

<u>ขั้นที่ 2</u> หาจุดหมุน (pivot) ในตารางที่ 1 แล้วเขียนวงกลมล้อมรอบจุดหมุนไว้ ในที่นี้ได้ a_{22} (= 4) เป็นจุดหมุนเพราะว่า $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{3}$ > $\frac{1}{4}$

<u>ขั้นที่ 3</u> คำนวณหาตารางที่ 2 จากตารางแรก ซึ่งมีวิธีดังนี้

(i) เอา 4 หารแถวที่ 2 จะได้

x_1	x_2	x_3				
5	2	6	1	0	0	1
1/4	1	3/4	0	1/4	0	1/4
5	3	4	0	0	1	1
-1	-1	-1	0	0	0	0

(ii) เอา 2, 3 และ (-1) คูณแถวที่ 2 แล้วลบออกจากแถวที่ 1, ที่ 3 และที่ 4 ตามลำดับ จะได้ตารางที่ 2 ดังนี้

x_1	x_2	x_3					
9/2	0	9/2	1	-1/2	0	1/2	
1/4	1	3/4	0	1/4	0	1/4	x_2
17/4	0	7/4	0	-3/4	1	1/4	
-3/4	0	-1/4	0	1/4	0	1/4	

<u>ตารางที่ 2</u>

<u>ขั้นที่ 4</u> จากตารางที่ 2 ทำการคำนวณ เช่นเดิมอีก จนกว่าจะได้ตารางสุดท้ายที่เราต้องการ (คือ สมาชิกในแถวสุดท้าย $\geq$ 0)

จากตารางที่ 2 ได้ a_{31} เป็นจุดหมุน ทำการหาตารางที่ 3 ได้ดังนี้คือ
เอา (17/4) หารแถวที่ 3 (ตารางที่ 2) จะได้

	x_1	x_2	x_3				
	9/2	0	9/2	1	-1/2	0	1/2
x_2	1/4	1	3/4	0	1/4	0	1/4
x_1	1	0	7/17	0	-13/7	4/17	1/17
	-3/4	0	-1/4	0	1/4	0	1/4

(ii) เอา (-1/4) , (-9/2) และ (3/4) คูณแถวที่ 3 แล้วนำไปบวกกันกับแถวที่ 2, ที่ 1 และที่ 4 ตามลำดับ ได้ตารางใหม่ดังนี้

	x_1	x_2	x_3				
	0	0	45/7	1	55/7	-14/17	4/17
x_2	0	1	29/34	0	5/7	-1/17	4/17
x_1	1	0	7/17	0	-3/17	4/17	1/17
	0	0	1/7	0	2/17	3/17	5/17

<u>ตารางที่ 3</u>

<u>ขั้นที่ 5</u> จากตารางที่ 3 แถวสุดท้าย ไม่มีค่าที่เป็นลบเลย แสดงว่า ตารางที่ 3 เป็นตารางสุดท้ายที่สิ้นสุดขบวนการ ซิมเพล็กซ์ อันจะนำมาซึ่ง ผลลัพธ์ของเกมส์ กล่าวคือ เราจะได้

$$X = (1/17, 4/17, 0)$$

$$Y = (0, 2/17, 3/17)$$

และ $v_0 = 5/17$

ฉะนั้น เราจะหาผลลัพธ์ของเกมส์ได้จากความสัมพันธ์ที่ว่า

$x_0 = \frac{1}{v_0}(Y) = \frac{17}{5}(Y) = (0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ เป็นแผนการที่เหมาะสมของ A

$y_0 = \frac{1}{v_0}(X) = \frac{17}{5}(X) = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ เป็นแผนการที่เหมาะสมของ B

และ $v = \frac{1}{v_0} - k = \frac{17}{5} - 4 = -\frac{3}{5}$ เป็นค่าของเกมส์

<u>ตัวอย่าง 4.15</u> จงหาผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์ต่อไปนี้

	B		
A	2	1	-1
	-1	2	-1
	-1	-1	0

<u>วิธีหาผลลัพธ์</u>

(1) ทำให้สมาชิกเมตริกซ์เกมส์ทุกตัวเป็นบวก ซึ่งทำได้โดยการบวกสมาชิกทุกตัวด้วย $k = 2$ จะได้ตารางใหม่ดังนี้

B

	4	3	1
A	1	4	1
	1	1	2

จากนี้สร้าง ตารางซิมเพล็กซ์ เพื่อจะหาค่า X,Y และ v_0 ออกมา ดังนี้ (โดยอาศัยวิธีการเดียวกับตัวอย่าง 4.12)

<u>ตารางที่ 1</u>

x_1	x_2	x_3				
4	3	1	1	0	0	1
1	4	1	0	1	0	1
1	1	2	0	0	1	1
-1	-1	-1	0	0	0	0

ตารางที่ 2

x_1	x_2	x_3					
$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	x_3
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

ตารางที่ 3

x_1	x_2	x_3					
1	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	x_1
0	$\frac{22}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	$-\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	
0	$\frac{1}{7}$	1	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	x_3
0	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	

<u>ตารางที่ 4</u>

x_1	x_2	x_3					
1	0	0	$\frac{7}{22}$	$-\frac{5}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}$	x_1
0	1	0	$-\frac{1}{22}$	$\frac{7}{22}$	$-\frac{3}{22}$	$\frac{3}{22}$	x_2
0	0	1	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{13}{22}$	$\frac{9}{22}$	x_3
0	0	0	$\frac{3}{22}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{13}{22}$	

จากตารางที่ 4 จะเห็นว่าในแถวสุดท้ายไม่มีสมาชิกที่เป็นลบ ฉะนั้นจากตาราง ที่ 4 จึงเสร็จขบวนการการหาผลลัพธ์ของเกมส์ ซึ่ง

$$\mathbf{x} = (1/22 , 3/22 , 9/22)$$

$$\mathbf{y} = (3/22 , 1/22 , 9/22)$$

และ $v_o = 13/22$

ทำให้เราได้ผลลัพธ์ของเกมส์ดังนี้

$x_0 = \frac{1}{v_o}\mathbf{y} = \left(\frac{3}{13}, \frac{1}{13}, \frac{9}{13}\right)$ เป็นแผนการที่เหมาะสมของ A

$y_o = \frac{1}{v_o}\mathbf{x} = \left(\frac{1}{13}, \frac{3}{13}, \frac{9}{13}\right)$ เป็นแผนการที่เหมาะสมของ B

$v = \frac{1}{v_o} - k = \frac{22}{13} - 2 = -\frac{4}{3}$ เป็นค่าของเกมส์

<u>ตัวอย่าง 4.16</u> จงให้ตัวอย่างของเกมส์สมมาตร (Symmetric Game) และแสดงให้ให้เห็นว่าค่าของเกมส์ชนิดนี้เท่ากับศูนย์

<u>วิธีทำ</u> ตัวอย่างเกมส์สมมาตร เช่น

(i)

0	1
-1	0

(ii)

0	1	-1
-1	0	1
1	-1	0

(iii)

0	4	1
-4	0	2
-1	-2	0

ในการแสดงว่า ค่าของเกมส์ มีค่าเท่ากับศูนย์นั้น เราจะแสดงให้เห็นเฉพาะที่ (ii) เท่านั้น โดยวิธี ซิมเพล็กซ์ บวก k = 1 ลงในเมตริกซ์ (ii) จะได้

B

		Y_1	Y_2	Y_3
A	X_1	1	2	0
	X_2	0	1	2
	X_3	2	0	1

ทำการคำนวณโดยวิธี ซิมเพล็กซ์ จะได้ตารางตามลำดับต่อไปนี้

ตารางที่ 1

x_1	x_2	x_3				
1	2	0	1	0	0	1
0	1	2	0	1	0	1
2	0	1	0	0	1	1
-1	-1	-1	0	0	0	0

ตารางที่ 2

x_1	x_2	x_3					
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	x_2
$-\frac{1}{2}$	0	2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	
2	0	1	0	0	0	1	
$-\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	

ตารางที่ 3

x_1	x_2	x_3					
$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	x_2
$-\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	x_3
$\frac{9}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	
$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{4}$	

ตารางที่ 4

x_1	x_2	x_3					
0	1	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	x_2
0	0	1	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	x_3
1	0	0	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	x_1
0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	

ตารางที่ 4 เป็นตารางสุดท้าย ได้ว่า

$$X = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad Y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad v_o = 1$$

$$X_o = \frac{1}{v_o}(Y) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$Y_o = \frac{1}{v_o}(X) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$v = \frac{1}{v_0} - k = 1 - 1 = 0$$

นั่นคือ ค่าของเกมส์สมมาตร = 0

4.4.3 การหาผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์โดยใช้วิธีกราฟ

สำหรับ $2 \times m$ หรือ $m \times 2$ เมตริกซ์เกมส์ เราสามารถหาผลลัพธ์โดยวิธีกราฟได้ ในการใช้กราฟเข้าช่วยหาผลลัพธ์ของเกมส์ที่ดีที่สุดนั้น มีข้อดีอยู่ตรงที่ว่างายและสามารถเข้าใจในวิธีการได้อย่างกระจ่างชัดกว่าวิธีอื่น แต่ข้อเสียที่สำคัญที่สุดก็คือ สามารถนำเอาไปแก้ปัญหาของเกมส์ได้ในวงแคบ ซึ่งเป็นไปได้ยากในกรณีที่เกมส์สลับซับซ้อน ที่กล่าวว่าวิธีกราฟนี้สามารถแก้ปัญหาเกมส์การแข่งขันที่ผลรวมของสองฝ่ายเป็นศูนย์ ในวงแคบ ก็หมายถึงว่า เกมส์นั้นผู้แข่งขันผู้หนึ่งผู้ใดต้องมีแผนการเข้าแข่งขันสองแผนการเท่านั้น ส่วนคู่แข่งขันจะมีกี่แผนการก็ได้ เพราะฉะนั้นถ้าเกมส์ใด ๆ ที่คู่แข่งขันทั้งคู่มีแผนการต่าง ๆ ที่จะนำออกมาใช้มากกว่าสองแผนการแล้ว วิธีนี้ก็ไม่สามารถจะนำมาใช้ได้ เราสามารถเขียนกราฟ 2 มิติ ซึ่งรูปกราฟนี้จะแสดงผลลัพธ์ของเกมส์ได้ทันทีและง่ายขึ้นมาก

สมมุติการแข่งขันเกมส์ชนิดหนึ่งมีผู้แข่งขันคือ A กับ B มีแผนการเข้าแข่งขันอยู่ 2 แผนการ ความน่าจะเป็นที่ A จะเลือกแผนการของตนออกมาใช้เป็น x_1 และ x_2 สำหรับแผนการที่ 1 และแผนการที่ 2 ตามลำดับ ตามกฎของความน่าจะเป็นของแผนการทั้งสองจะเท่ากับ 1 คือ

$$x_1 + x_2 = 1 \quad ; \quad x_1 \geq 0 , \quad x_2 \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $x_2 = 1 - x_1$

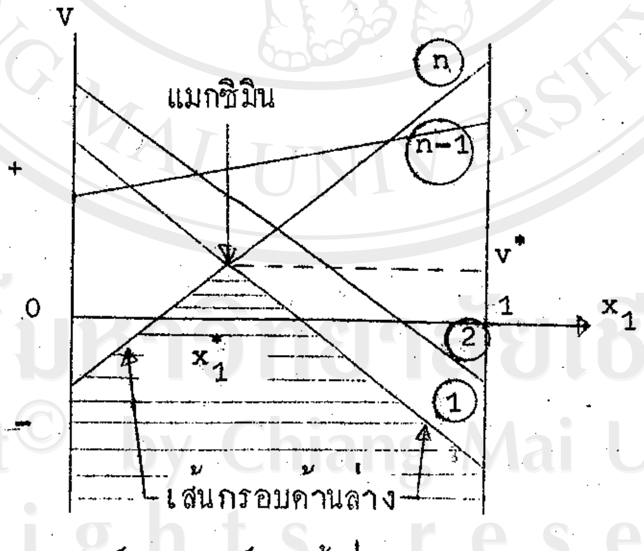
ส่วนผู้แข่งขัน B มีแผนการเข้าแข่งขันทั้งหมดเท่ากับ n แผนการ ความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งขัน B จะเลือกแผนการที่ 1, 2, ..., n ออกมาใช้เท่ากับ y_1 , y_2 ,...., y_n ตามลำดับ เมตริกซ์ผลตอบแทนจากเกมส์แสดงได้ดังนี้

		B			
		y_1	y_2	....	y_n
A	x_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}
	$x_2 = 1-x_1$	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}

ผลตอบแทนเฉลี่ยหรือผลได้เฉลี่ยที่ผู้แข่งขัน A จะได้รับ เมื่อคู่แข่งขันเลือกแผนการบริสุทธิ์แต่ละแผนการที่ตนมีอยู่มาแข่งขัน แสดงได้ดังตารางนี้

แผนการบริสุทธิ์ที่ B ใช้	ค่าคาดหวังที่ A จะได้รับ (A's Expected Gain)
1	$(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21} \geqq v$
2	$(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22} \geqq v$
n	$(a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n} \geqq v$

ตามหลักเกณฑ์แมกซิมินที่นำไปใช้ในการแก้ปัญหาเกมส์ที่ใช้แผนการผสม ผู้แข่งขัน A จะเลือกหาค่า x_1^* ซึ่งจะทำให้ผลตอบแทนเฉลี่ยที่น้อยที่สุดของเขามีค่ามากที่สุด (Maximize the Minimum Average Pay offs) ปัญหาของเกมส์แบบนี้สามารถนำวิธีกราฟมาช่วยแก้ปัญหาได้ โดยเขียนสมการเส้นตรงซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x_1 จากตารางข้างบนนี้ลงบนกระดาษกราฟ สมการเส้นตรงนี้จะมีหลายเส้นดังรูป ซึ่งเกิดจากการลงจุดระหว่าง x_1 กับ x_2



กราฟแสดงผลลัพธ์ของเกมส์ของผู้แข่งขัน A

ตัวเลขที่อยู่ในวงกลมคือแผนการบริสุทธิ์ที่ B เลือกใช้ ซึ่งจะทำให้เกิดเส้นตรงต่าง ๆ แล้วแต่ว่า B จะเลือกแผนการใดออกมาใช้ จากกราฟเราจะได้เส้นกรอบด้านล่าง ซึ่งแสดงในรูปด้วยเส้นหนักบนเส้นกรอบด้านล่างของรูปนี้ จะเป็นแนวที่ใช้หาค่าผลตอบแทนเฉลี่ยที่น้อยที่สุด ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x_1 จุดที่สูงที่สุดในแนวเส้นกรอบด้านล่างนี้ก็คือจุด แมกซิมิน ที่จุดนี้จะทำให้ค่าผลตอบแทนเฉลี่ยที่น้อยที่สุดมีค่ามากที่สุด ค่า x_1 ที่จุด แมกซิมิน ก็คือค่า x_1^* ซึ่งเป็นค่าความน่าจะเป็นที่ดีที่สุดของผู้แข่งขัน A ส่วนค่าผลตอบแทนเฉลี่ยที่ดีที่สุดของเกมส์คือค่า v^*

สำหรับความน่าจะเป็นที่ดีที่สุดของผู้แข่งขัน B สามารถคำนวณหาได้จากสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด แมกซิมิน ซึ่งจะถูกย่นย่อลงมาเหลือขนาดเท่ากับ 2×2 จากนั้นจึงใช้สูตร 2×2 คำนวณหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

ส่วนเกมส์การแข่งขันที่มีเมตริกซ์ผลตอบแทนขนาด $n \times 2$ ก็เปรียบเสมือนกับเกมส์การแข่งขันที่มีเมตริกซ์ผลตอบแทน 2×2 ในขณะที่คำนวณหาผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของเกมส์ ซึ่งเมตริกซ์ผลตอบแทนจากเกมส์ $n \times 2$ แสดงได้ดังนี้

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} \\
 & & y_1 & y_2 = 1-y_1 \\
\hline
 & x_1 & a_{11} & a_{12} \\
\hline
A & x_2 & a_{21} & a_{22} \\
\hline
 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
 & x_n & a_{n1} & a_{n2} \\
\hline
\end{array}
$$

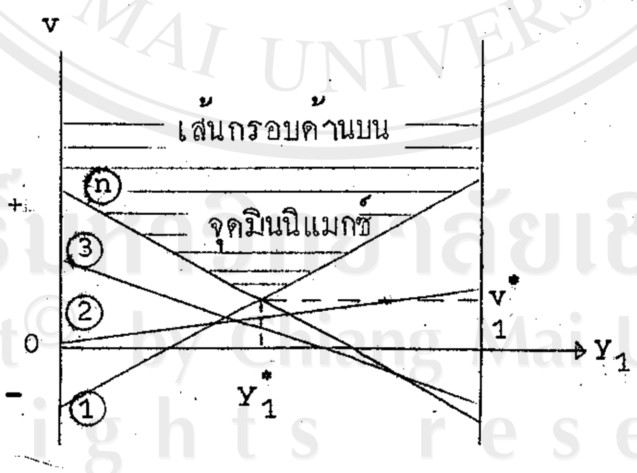
โดยสมมุติให้ Y_1 และ Y_2 เป็นค่าความน่าจะเป็น ที่ผู้แข่งขัน B จะเลือกแผนการบริสุทธิ์ ของตนตรงกับเส้นที่ผ่านจุด มินนิแมกซ์ โดยที่

$$Y_1 + Y_2 = 1 \quad , \quad Y_1 \geqq 0 \quad , \quad Y_2 \geqq 0$$

ค่าตอบแทนเฉลี่ยของผู้แข่งขัน B ที่จะเกิดขึ้นเมื่อผู้แข่งขัน A เลือกใช้แต่ละแผนการที่มีอยู่ แสดงได้ดังตารางข้างล่างนี้

แผนการบริสุทธิ์ที่ A ใช้	ค่าคาดหวังที่ B จะเสีย (B's Expected Loss)
1	$(a_{11} - a_{12})Y_1 + a_{12} \leqq v$
2	$(a_{21} - a_{22})Y_1 + a_{22} \leqq v$
⋮	⋮
n	$(a_{n1} - a_{n2})Y_1 + a_{n2} \leqq v$

สมการเส้นตรงทั้งสองเส้น จากตารางข้างบนนี้ เมื่อนำมาเขียนเป็นกราฟจะได้ดังนี้



กราฟแสดงผลลัพธ์ของเกมส์ของผู้แข่งขัน B

ในการแข่งขันนี้ผู้แข่งขัน B พยายามจะทำให้ผลเสียที่มากที่สุดในการแข่งขันเกมส์ของเขาให้มีค่าน้อยที่สุด (Minimize the Maximum Loss) ผลเสียจากการเล่นเกมส์ของ B ตอนนี้จะเป็นค่าผลเสียเฉลี่ย เพราะว่าผู้แข่งขันทั้งคู่ใช้แผนการผสม จากรูปที่แสดงไว้นี้ เราจะได้เส้นกรอบด้านบนของกราฟ ทุก ๆ จุดบนเส้นกรอบด้านบนจะเป็นค่าผลเสียเฉลี่ยที่มากที่สุดของ B ในการเล่นเกมส์ ถ้า B เลือกค่าความน่าจะเป็นที่จะนำออกมาใช้ (y_1) มีค่าต่าง ๆ กัน จุดที่อยู่ในตำแหน่งต่ำสุดของเส้นกรอบบนจะเป็นจุดที่ทำให้ค่าผลเสียเปรียบที่มากที่สุดของ B มีค่าน้อยที่สุด จุดนี้ก็คือ มินนิแมกซ์ ซึ่งผู้แข่งขัน B ต้องการหาจุดนี้ ผู้แข่งขัน B จะได้ค่าความน่าจะเป็นที่ดีที่สุด (y_1^*) ที่เขาจะนำเอามาเลือกใช้แผนการทั้งสองของเขาตลอดเวลาแข่งขัน ค่า y_1^* ที่หาได้จากการเขียนกราฟนี้ เราสามารถคำนวณหาได้อีกวิธีหนึ่งโดยการแก้สมการ

<u>ตัวอย่าง 4.17</u> ในการแข่งขันเกมส์หนึ่ง เมตริกซ์ผลตอบแทนของเกมส์ 2 × 7 แสดงได้ถึงตารางข้างล่างนี้ จงหาแผนการผสมที่ดีที่สุดของ A และ B พร้อมทั้งหาค่าเฉลี่ยของเกมส์ที่ดีที่สุดด้วย

		B						
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
A	x_1	−6	−1	1	4	7	4	3
	x_2	7	−2	6	3	−2	−5	7

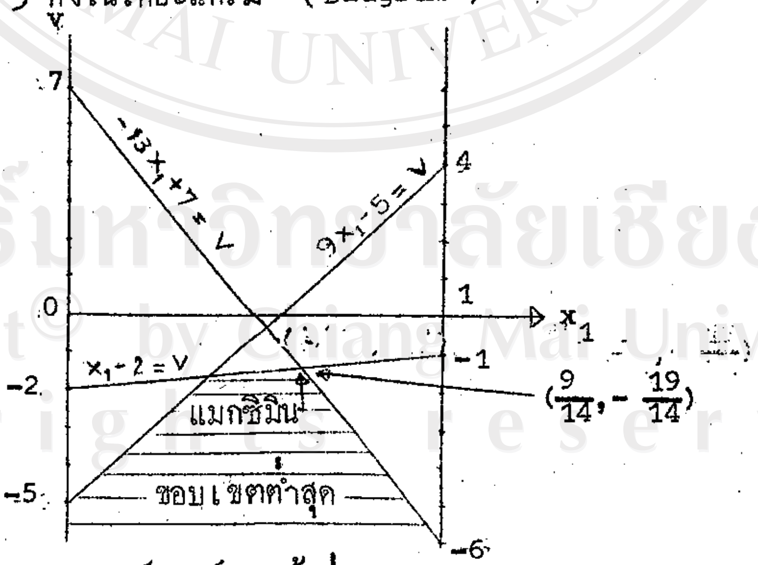
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากเกมส์นี้ไม่มีจุดผลเท่ากัน ผู้แข่งขันทั้งคู่จึงต้องใช้แผนการผสมเข้าแข่งขัน จะเห็นว่าเราสามารถลดขนาดให้อยู่ในรูป 2 × 3 เมตริกซ์เกมส์ได้โดยอาศัยลักษณะเด่นและลักษณะด้อย จะได้ตารางผลตอบแทนดังนี้

		B		
		y_1	y_2	y_6
A	x_1	-6	-1	4
	x_2	7	-2	-5

ผลตอบแทนเฉลี่ยของผู้แข่งขัน A ที่จะได้รับ เมื่อคู่แข่งขัน B ใช้แต่ละแผนการที่มีอยู่ออกมาแข่งขัน แสดงได้ดังตาราง และ กราฟดังนี้

แผนการบริสุทธิ์ที่ B ใช้	ค่าคาดหวังที่ A จะได้รับ (A's Expected Gain)
1	$-13x_1 + 7 \geqq v$
2	$x_1 - 2 \geqq v$
6	$9x_1 - 5 \geqq v$

ลง อสมการทั้ง 3 ดังในไดอะแกรม (Diagram)



กราฟแสดงผลลัพธ์เกมส์ของผู้แข่งขัน A

จะสังเกตเห็นว่าค่าสูงสุด v จะสอดคล้องกับอสมการ ซึ่งเกิดจากการตัดกันของเส้นตรง $-13x_1 + 7 = v$ และ $x_1 - 2 = v$ จุดตัดกันคือ $x_1 = \frac{9}{14}$ และ $v = -\frac{19}{14}$ ดังนั้นแผนการที่เหมาะสมของ A = $A(\frac{9}{14}, \frac{5}{14})$ ค่าของเกมส์ $= -\frac{19}{14}$

เนื่องจากเส้นตรง 2 เส้นนี้ตัดกันให้ค่า v เส้นทั้งสองมาจากหลักที่ 1 และหลักที่ 2 ของเมตริกซ์เกมส์ A ก็จะลดขนาดเมตริกซ์เกมส์ของ A เป็น 2×2 ดังนี้

B

A		y_1	y_2
	x_1	-6	-1
	x_2	7	-2

โดยใช้สูตร จะได้ว่า $x_1 = \frac{9}{14}$, $x_2 = \frac{5}{14}$

$y_1 = \frac{1}{14}$, $y_2 = \frac{13}{14}$

$\therefore$ แผนการที่เหมาะสมคือ $A\left(\frac{9}{14}, \frac{5}{14}\right)$, $B\left(\frac{1}{14}, \frac{13}{14}, 0, 0, 0, 0, 0\right)$

ค่าของเกมส์ $= -\frac{19}{14}$

<u>ตัวอย่าง 4.18</u> จงหาผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์ 3×2 ต่อไปนี้

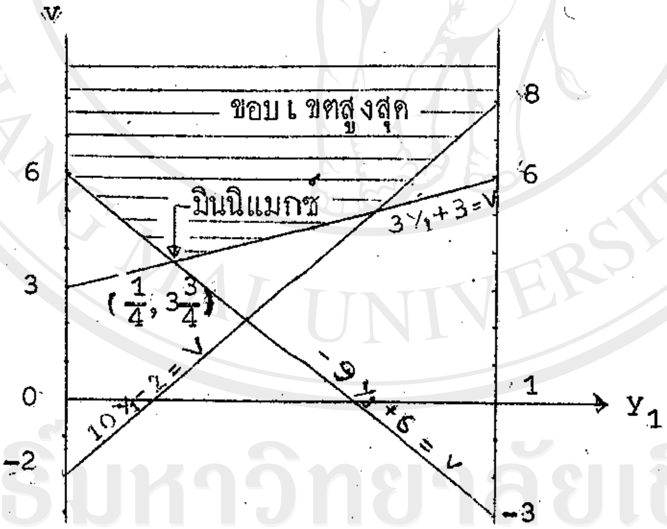
B

A		y_1	y_2
	x_1	-3	6
	x_2	6	3
	x_3	8	-2

พิจารณาจะเห็นว่า B มีโอกาสเลือกแผนการเพียง 2 แผนการเท่านั้น ส่วน A จะเลือก 2 แผนการจากแผนการทั้ง 3 แผนการ

แผนการบริสุทธิ์ที่ A ใช้	ค่าคาดหวังที่ B จะเสีย (B's Expected Loss)
1	$-9y_1 + 6 \leqq v$
2	$3y_1 + 3 \leqq v$
3	$10y_1 - 2 \leqq v$

ลงอสมการทั้ง 3 ดังในไดอะแกรม



จะเห็นว่าค่าต่ำสุด v จะสอดคล้องกับอสมการ ซึ่งเกิดจากการตัดกันของเส้นตรง $-9y_1 + 6 = v$ และ $3y_1 + 3 = v$ ณ จุด $y_1 = \frac{1}{4}$ และ $v = 3\frac{3}{4}$ แผนการที่เหมาะสมของ B คือ $B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

เนื่องจากเส้นตรง 2 เส้นตัดกันทำให้ได้ค่า v ซึ่งมาจากเมตริกซ์แถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของเมตริกซ์เกมส์ A ขนาดของเมตริกซ์เกมส์จะลดลงเหลือ 2×2 ดังนี้

$$
\begin{array}{cc|c|c|}
 & & \multicolumn{2}{c}{B} \\
 & & y_1 & y_2 \\
\cline{3-4}
 & x_1 & -3 & 6 \\
\cline{3-4}
A & x_2 & 6 & 3 \\
\cline{3-4}
\end{array}
$$

โดยใช้สูตร ทำให้ได้ค่า $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$

$y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = \frac{3}{4}$

ผลลัพธ์ของเมตริกซ์เกมส์คือ A $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$

B $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

ค่าของเกมส์ $= 3\frac{3}{4}$

4.4.4 <u>การหาผลลัพธ์ของเกมส์โดยวิธีการประมาณ</u>

(The Solution of Matrix Game by the Method of Ficititious play)

วิธีที่กล่าวถึงนี้เป็นการหาผลลัพธ์ของเกมส์โดยการประมาณค่า (Approximate) ซึ่งสะดวกและง่ายในทางปฏิบัติ เราจะพบบ่อย ๆ ว่าในการหาผลลัพธ์ที่แน่นอนนั้นไม่จำเป็น เพราะว่าเราพอจะหาค่าประมาณ ซึ่งเป็นผลตอบแทนเฉลี่ยและคุมถึงค่าของเกมส์ด้วย

<u>ตัวอย่าง 4.19</u> พิจารณาเกมส์ที่ผลรวมของสองฝ่ายมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งผู้แข่งขันแต่ละคนต่างก็มีอิสระในการเลือกแผนการดังนี้ (เกมส์นี้ไม่มีจุดผลเท่ากัน)

B

A		1	2	3	4
	1	2	3	1	4
	2	1	2	5	4
	3	2	3	4	1
	4	4	2	2	2

A เลือกแผนการที่ตนเองต้องการในที่นี้ A เลือกแผนการที่ 1 แล้วเขียนสมาชิกในแถวนั้นลงใต้ตารางและทำเครื่องหมาย * ที่จำนวนเลขที่มีค่าน้อยที่สุด (Smallest Number)

B

A		1	2	3	4
	1	2	3	1	4
	2	1	2	5	4
	3	2	3	4	1
	4	4	2	2	2
		2	3	1*	4

(ซึ่งจะเห็นว่า A เลือกแผนการที่ 1 ดังนั้น B จะเลือกแผนการที่ 3 เพื่อให้เสียน้อยที่สุด) ขั้นแรกของวิธีการประมาณค่าก็จบเพียงนี้ จากนั้นก็เริ่มที่ 1* ซึ่งอยู่หลักที่ 3 เขียนสมาชิกหลักที่ 3 ไว้ทางขวาสุดของตารางแล้วทำเครื่องหมาย * ที่จำนวนเลขที่มีค่ามากที่สุด (Largest Number) ในที่นี้คือ 5*

B

		1	2	3	4	
A	1	2	3	1	4	1
	2	1	2	5	4	5*
	3	2	3	4	1	4
	4	4	2	2	2	2
		2	3	1*	4	

(เมื่อ B ใช้แผนการที่ 3 ดังนั้น A ก็จะเลือกใช้แผนการที่ 2 เพื่อที่ให้ได้ผลประโยชน์มากที่สุดคือ 5) ที่ 5* อยู่ในแถวที่ 2 บวกแถวที่ 2 กับแถวที่อยู่ใต้สุดของตารางแล้วทำเครื่องหมาย * ที่จำนวนที่น้อยที่สุด (3*) ในแถวใหม่จะได้ตารางดังนี้

B

		1	2	3	4	
A	1	2	3	1	4	1
	2	1	2	5	4	5*
	3	2	3	4	1	4
	4	4	2	2	2	2
		2	3	1*	4	
		3*	5	6	8	

(เมื่อ A เลือกแผนการที่ 2 B ก็จะเปลี่ยนไปเลือกแผนการที่ 1 เพื่อให้เสียผลประโยชน์น้อยที่สุด สังเกตที่ " • ") ก็จะจบขบวนการขั้นตอนที่ 2 แล้วเราก็ดำเนินการต่อไปโดยเริ่มที่ 3* ซึ่งอยู่ในหลักแรก เราก็บวกหลักแรกกับหลักที่อยู่ทางขวาสุดของตาราง ก็จะเป็นหลักที่ 2 ทางขวาของตาราง แล้วดำเนินการ เช่นนี้ต่อไปเรื่อย ๆ ก็จะได้ดังนี้

		B													
		1	2	3	4										
A	1	2	3	1	4	1	3	5	7	10	13	16	19	22	25
	2	1	2	5	4	5*	6*	7	8	10	12	14	16	18	20
	3	2	3	4	1	4	6	8	10	13	16	19	22*	25*	28*
	4	4	2	2	2	2	6	10*	14*	16*	18*	20*	22	24	26

2	3	1*	4
3*	5	6	8
4*	7	11	12
8*	9	13	14
12	11*	15	16
16	13*	17	18
20	15*	19	20
24	17*	21	22
26	20*	25	23
28	23*	29	24

<u>หมายเหตุ</u> ในกรณีที่จำนวนที่มีค่ามากที่สุดหรือที่มีค่าน้อยที่สุด 2 ตัวใด ๆ ในผลรวมมีค่าเท่ากัน เราจะเลือกแผนการที่เหมาะสมโดยการสุ่ม (Random Choosen) แล้วทำต่อไปเรื่อย ๆ

จากนั้น จึงนับจำนวนเครื่องหมาย " • " ในแต่ละแถวและแต่ละหลัก ก็จะได้ดังนี้

		B 1	B 2	B 3	B 4	ผลรวม • ของ A
A	1	2	3	1	4	0
	2	1	2	5	4	2
	3	2	3	4	1	3
	4	4	2	2	2	5
ผลรวม • ของ B		3	6	1	0	

จะสังเกตเห็นว่า จากการเล่นเกมส์จำนวน 10 ครั้ง ทั้งคู่เลือกแผนการผสมที่ดีที่สุดของตัวเองดังนี้

$A\left(\frac{0}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}\right)$ และ $B\left(\frac{3}{10}, \frac{6}{10}, \frac{1}{10}, \frac{0}{10}\right)$

ให้ $\overline{v}_i$ คือค่ามากที่สุดในหลักที่ i ทางขวาตารางของแผนการ A

$\underline{v}_i$ คือค่าน้อยที่สุดในแถวที่ i ทางใต้ตารางของแผนการ B

เช่น $\bar{v}_1 = 5$, $\bar{v}_4 = 14$, $\bar{v}_7 = 20$, $\bar{v}_{10} = 28$

$\bar{v}_2 = 6$, $\bar{v}_5 = 16$, $\bar{v}_8 = 22$

$\bar{v}_3 = 10$, $\bar{v}_6 = 18$, $\bar{v}_9 = 25$

และ $\underline{v}_1 = 1$, $\underline{v}_4 = 8$, $\underline{v}_7 = 15$, $\underline{v}_{10} = 23$

$\underline{v}_2 = 3$, $\underline{v}_5 = 11$, $\underline{v}_8 = 17$

$\underline{v}_3 = 4$, $\underline{v}_6 = 13$, $\underline{v}_9 = 20$

ส่วนค่าผลลัพธ์ของเกมส์ได้จากการคำนวณค่าอสมการ

$$\frac{\underline{v}_i}{i} \leq v \leq \frac{\bar{v}_i}{i}$$

$$\frac{1}{1} \leq v \leq \frac{5}{1}$$

$$\frac{3}{2} \leq v \leq \frac{6}{2}$$

$$\frac{4}{3} \leq v \leq \frac{10}{3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{23}{10} \leq v \leq \frac{28}{10}$$

จากนั้นจึงพิจารณาเลือกผลลัพธ์ที่ดีที่สุดของเกมส์โดยเลือก $\frac{\underline{v}_i}{i}$ ที่มากที่สุดของกลุ่มที่น้อย (Greatest Lower Bound) และ $\frac{\bar{v}_i}{i}$ ที่น้อยที่สุดของกลุ่มที่มาก (Least Upper Bound)

นั่นคือ $\frac{\underline{v}_i}{i} = \frac{23}{10} = 2.30$, $\frac{\bar{v}_i}{i} = \frac{22}{8} = 2.75$

ค่าของเกมส์ที่ดีที่สุด คือ $2.30 \leq v \leq 2.75$

ถ้าหากว่ามีการแข่งขันเกมส์มาก ๆ ครั้ง จะได้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องยิ่งขึ้น เช่น ถ้าเราแข่งต่อไปถึง 20 เกมส์ ดังนี้

		B 1	2	3	4											
A	1	2	3	1	4	25	29*	32*	35*	38*	39	41	43	45	49	53*
	2	1	2	5	4	20	24	26	28	30	35	36	37	38	42	46
	3	2	3	4	1	28*	29	32	35	38	42*	44*	46*	48*	49	50
	4	4	2	2	2	26	28	30	32	34	36	40	44	48	50*	52

28	23*	29	24
30	26	33	25*
32	29*	34	29
34	32*	35	33
36	35*	36	37
38	38	37*	41
40*	41	41	42
42*	44	45	43
44*	47	49	44
46	50	53	45*
50	52	55	47*

ดังนั้น แผนการของ A และ B จะเปลี่ยนไปเป็นดังนี้

$$A\left(\frac{5}{20}, \frac{2}{20}, \frac{7}{20}, \frac{6}{20}\right), \quad B\left(\frac{6}{20}, \frac{9}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20}\right)$$

ส่วนค่าของเกมส์ที่ดีที่สุด จะมีค่า $\frac{35}{14} \leq v \leq \frac{50}{19}$

หรือ $2.50 \leq v = 2.63$

<u>ตัวอย่าง 4.20</u> ในการแข่งขันเกมส์หนึ่งผลตอบแทนของเกมส์แสดงได้ ดังตารางข้างล่างนี้ จงหาแผนการผสมที่ดีที่สุดของ A และ B พร้อมทั้งหาค่าเฉลี่ยของเกมส์ที่ดีที่สุด

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	1	0	2
A_2	3	0	0
A_3	0	2	1

<u>วิธีทำ</u> ดำเนินการหาแผนการที่ดีที่สุดโดยวิธีการประมาณค่าตามลำดับดังนี้ (โดยใช้กฎเกณฑ์แมกซิมิน + มินิแมกซ์)

A \ B	B_1	B_2	B_3										
A_1	1	0	2	0	1	1	3	4	6*	6	7	9*	9
A_2	3	0	0	0	3*	3	3	6*	6	6	9*	9	9
A_3	0	2	1	2*	2	4*	5*	5	6	8*	8	9	11*
	1	0*	2										
	1*	2	3										
	4	2*	3										
	4	4	4*										
	4*	6	5										
	7	6	5*										
	8	6*	7										
	8*	8	8										
	11	8	8*										
	12	8*	10										

จากการหาแผนการผสมที่ดีที่สุดโดยวิธีการประมาณค่า เราพบว่าจากการแข่งขัน 10 ครั้ง A เล่นด้วยแผนการ A $\left(\frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{5}{10}\right)$

B เล่นด้วยแผนการ B $\left(\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{3}{10}\right)$

ค่าเฉลี่ยของเกมส์ที่ดีที่สุดคือ $\frac{8}{8} \leqq v \leqq \frac{9}{9}$

หรือ นั่นคือ ค่าเฉลี่ยของเกมส์มีค่าเท่ากับ 1

จากวิธีการประมาณค่า (Fictitious Play) เราสามารถหาค่าขอบเขต (Limit) ของมันได้

จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ (Solution) อาจจะเปลี่ยนแปลงได้ (Oscillate) เพื่อที่จะได้แผนการที่ดีที่สุด เราทำได้โดยลบหลักสุดท้ายออกจากทุก ๆ หลัก ดังนั้น จาก n เมตริกซ์เกมส์ ก็จะเหลือเพียง (n - 1) เมตริกซ์เกมส์

สำหรับ x_i หาได้โดยการคำนวณค่าสมบูรณ์ของ ดีเทอร์มินันต์ ของ (n - 1) (n - 1) เมตริกซ์ ซึ่งเป็นผลมาจากการตัด (omit) แถวซึ่งสมนัยกับแผนการที่ i ของ A และหารค่าที่ได้ โดยผลบวกของค่าดีเทอร์มินันต์ ที่คำนวณได้ทั้งหมด

ในทำนองเดียวกัน แผนการที่ดีที่สุดของ B ก็หาได้เช่นเดียวกัน ส่วนค่าของเกมส์หาได้โดยการคูณแผนการของ A กับ หลักใด ๆ ของเมตริกซ์ผลตอบแทน

พิจารณาโจทย์ต่อไปนี้

		B		
		y_1	y_2	y_3
	x_1	0	-2	1
A	x_2	2	0	-2
	x_3	-1	2	0

เนื่องจากเกมส์นี้เป็นเกมส์สมมาตร (Symmetric Game) ฉะนั้นผู้แข่งขันแต่ละคนจึงมีโอกาสเท่า ๆ กัน นั่นคือ $a_{ij} = -a_{ji}$ ซึ่ง a_{ij} คือ สัมประสิทธิ์ในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ผลตอบแทน ค่าของเกมส์ใน เกมส์สมมาตร นี้ จะเท่ากับศูนย์และผู้แข่งขันทั้งสองคนจะมีแผนการที่ดีที่สุดเหมือนกัน

การหาผลลัพธ์ของ 3×3 เมตริกซ์เกมส์นี้ทำโดยลบหลักที่ 3 ออกจากหลักที่ 1 และ หลักที่ 2 แบบสมนัยกันตามลำดับ จะได้ 3×2 เมตริกซ์ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{c|cc} x_1 & -1 & -3 \\ x_2 & 4 & 2 \\ x_3 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

หาค่า ดีเทอร์มินันต์ของ $x_1 = (4 \times 2) - (-1 \times 2) = 10$

นั่นคือ ค่าสมบูรณ์ (Absolute Value) ของดีเทอร์มินันต์

$x_1 = 10$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $|\det(x_2)| = 5$

$|\det(x_3)| = 10$

ผลบวกของ $|\det(x_1)| + |\det(x_2)| + |\det(x_3)| = 10+5+10 = 25$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{10}{25}, \quad x_2 = \frac{5}{25}, \quad x_3 = \frac{10}{25}$$

นั่นคือ แผนการที่ดีที่สุดของ A เขียนได้เป็น

$$A = \begin{bmatrix} 10/25 \\ 5/25 \\ 10/25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

สำหรับแผนการที่ดีที่สุดของ B ก็หาได้โดยวิธีเดียวกันคือ ลบแถวที่ 3 ออกจากแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ได้ 2 × 3 เมตริกซ์ ดังนี้

$$\begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

หาค่าได้

$$\left|\det(y_1)\right| = 10$$
$$\left|\det(y_2)\right| = 5$$
$$\left|\det(y_3)\right| = 10$$

และ $\left|\det(y_1)\right| + \left|\det(y_2)\right| + \left|\det(y_3)\right| = 10+5+10 = 25$

$$\therefore\ y_1 = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}\ ,\quad y_2 = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}\ ,\quad y_3 = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

นั่นคือแผนการที่ดีที่สุดของ B เขียนได้เป็น

$$B = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

สำหรับค่าของเกมส์หาได้โดยการคูณแผนการของ A กับหลักใด ๆ ของเมตริกซ์ผลตอบแทน ซึ่งค่าที่ได้ออกมาจะเท่ากัน ในที่นี้จะใช้แผนการของ A คูณกับหลักที่ 1

$$v = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 + \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$$

นั่นคือ ขอบเขต ของ อัตราส่วนของแผนการของ A และ B คือ

$$A \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

$$B \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right)$$

ค่าของเกมส์ที่ดีที่สุด = 0