บทที่ 3
คุณสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวนฟีโบนักชี

ในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามของซีเควนส์ฟีโบนักชี และจำนวนฟีโบนักชี ตลอดถึงวิธีการหาเทอมที่ n ของซีเควนส์ฟีโบนักชี แล้วต่อด้วยคุณสมบัติและความสัมพันธ์ของจำนวนฟีโบนักชี โดยแบ่งเป็นตอนย่อย ๆ 5 ตอนดังนี้

- ความหมายของซีเควนส์ฟีโบนักชี และจำนวนฟีโบนักชี
- การหาเทอมที่ n ของซีเควนส์ฟีโบนักชี
- คุณสมบัติของจำนวนฟีโบนักชี
- ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนฟีโบนักชีกับจำนวนลูคัส
- ความสัมพันธ์ของจำนวนฟีโบนักชีกับสัมประสิทธิ์ทวินาม

3.1 <u>ซีเควนส์ฟีโบนักชีและจำนวนฟีโบนักชี</u>

พิจารณาซีเควนส์ของจำนวนเต็มบวกที่เขียนในรูป

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n, \ldots$$

โดยมีคุณสมบัติว่าสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ที่ $n \geq 3$

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ถ้าจะนำคุณสมบัติ (1) มาใช้ในการสร้างซีเควนส์ของจำนวนขึ้นใหม่ จะต้องทราบจำนวนที่แน่นอนสองเทอมแรกก่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> ซีเควนส์ 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, ...
เมื่อกำหนดเทอมแรกเป็น 2 และเทอมที่สองเป็น 5

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> ซีเควนส์ -1, -5, -6, -11, -17, -28, -45,...
เมื่อกำหนดเทอมแรกเป็น -1 และเทอมที่สองเป็น -5

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> ซีเควนส์ 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ...
เมื่อกำหนดเทอมแรกเป็น 1 และเทอมที่สองเป็น 3

<u>นิยาม 3.1</u> ซีเควนส์ฟีโบนักชี (Fibonacci sequence) คือซีเควนส์ของจำนวนเต็มบวกที่มีคุณสมบัติดังนี้

1. $u_1 = u_2 = 1$
2. $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 3$

ดังนั้นซีเควนส์ฟีโบนักชีคือ

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

<u>นิยาม 3.2</u> จำนวนฟีโบนักชี (Fibonacci numbers) คือจำนวนแต่ละจำนวน (หรือแต่ละเทอม) ของซีเควนส์ฟีโบนักชี

3.2 <u>การหาเทอมที่ n ของซีเควนส์ฟีโบนักชี</u>

ก่อนที่จะหาเทอมที่ n ของซีเควนส์ฟีโบนักชี จะพิจารณาซีเควนส์ที่เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ ดังนี้

ซีเควนส์ใด ๆ ที่มีคุณสมบัติสอดคล้องกับสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ แล้วจะเรียกซีเควนส์นั้นว่าเป็นคำตอบ (solution) ของสมการ

$u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$

<u>เลมมา 3.1</u> ถ้าซีเควนส์ $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$ เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ และ $c \in I_{>0}$ แล้วซีเควนส์ $cw_1, cw_2, cw_3, \ldots, cw_n, \ldots$ จะเป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ ด้วย

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากซีเควนส์ $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n, \ldots$ เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ จะได้ว่า

$$w_n = w_{n-2} + w_{n-1}$$

สำหรับ $c \in I, \quad c > 0$ เอา c คูณตลอดจะได้

$$cw_n = cw_{n-2} + cw_{n-1}$$

โดยทฤษฎี 2.22 จะได้ $cw_1, cw_2, cw_3, \ldots, cw_n, \ldots$ เป็นซีเควนส์

แสดงว่า ซีเควนส์ $cw_1, cw_2, cw_3, \ldots, cw_{n-2}, cw_{n-1}, cw_n, \ldots$ สอดคล้องกับสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$

นั่นคือซีเควนส์ $cw_1, cw_2, cw_3, \ldots, cw_n, \ldots$ เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$

<u>เลมมา 3.2</u> ถ้าซีเควนส์ $w'_1, w'_2, w'_3, \ldots, w'_n, \ldots$ และซีเควนส์ $w''_1, w''_2, w''_3, \ldots, w''_n, \ldots$ เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ แล้วซีเควนส์ $w'_1 + w''_1, w'_2 + w''_2, w'_3 + w''_3, \ldots, w'_n + w''_n, \ldots$ จะเป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากซีเควนส์ $w'_1, w'_2, w'_3, \ldots, w'_{n-2}, w'_{n-1}, w'_n, \ldots$

และซีเควนส์ $w''_1, w''_2, w''_3, \ldots, w''_{n-2}, w''_{n-1}, w''_n, \ldots$

เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ จะได้

$$w'_n = w'_{n-2} + w'_{n-1}$$

และ $$w''_n = w''_{n-2} + w''_{n-1}$$

ดังนั้น $$w'_n + w''_n = w'_{n-2} + w'_{n-1} + w''_{n-2} + w''_{n-1}$$

$$= (w'_{n-2} + w''_{n-2}) + (w'_{n-1} + w''_{n-1})$$

แต่โดยทฤษฎี 2.21 จะได้

$w'_1 + w''_1, w'_2 + w''_2, w'_3 + w''_3, \ldots, w'_n + w''_n, \ldots$ เป็นซีเควนส์

นั่นคือซีเควนส์ $w'_1 + w''_1, w'_2 + w''_2, w'_3 + w''_3, \ldots, w'_n + w''_n, \ldots$

จะเป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$

<u>ทฤษฎี 3.1</u> ถ้าซีเควนส์ $w'_1, w'_2, w'_3, \ldots, w'_n, \ldots$ และซีเควนส์ $w''_1, w''_2, w''_3, \ldots, w''_n, \ldots$ เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ ที่ $\frac{w'_{n-1}}{w''_{n-1}} \neq \frac{w'_n}{w''_n}$ จะได้ว่าซีเควนส์ $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$ เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ โดยที่ $w_n = c_1 w'_n + c_2 w''_n$ และ c_1, c_2 เป็นจำนวนเต็มบวก

<u>พิสูจน์</u> ถ้าซีเควนส์ $w'_1, w'_2, w'_3, \ldots, w'_n, \ldots$ และ $w''_1, w''_2, w''_3, \ldots, w''_n, \ldots$ เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ และ c_1, c_2 เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว โดยเลมม่า 3.1 และทฤษฎี 2.22 จะได้ซีเควนส์

$$c_1w'_1, c_1w'_2, c_1w'_3, \ldots, c_1w'_n, \ldots \text{ และ}$$
$$c_2w''_1, c_2w''_2, c_2w''_3, \ldots, c_2w''_n, \ldots$$

เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$

โดยเลมม่า 3.2 และทฤษฎี 2.21 จะได้ซีเควนส์

$$c_1w'_1 + c_2w''_1, c_1w'_2 + c_2w''_2, c_1w'_3 + c_2w''_3, \ldots, c_1w'_n + c_2w''_n, \ldots$$

จะเป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ ด้วย

นั่นคือซีเควนส์ $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$

โดยที่ $w_n = c_1w'_n + c_2w''_n$ เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$.

ในการหาเทอมที่ n ของซีเควนส์ฟิโบนักชี อาศัย Binet's formula เพื่อเป็นเกียรติแก่ Binet ซึ่งเป็นผู้คิดได้เป็นคนแรก สำหรับ Binet's formula หาได้ดังนี้

พิจารณาซีเควนส์ $1, q, q^2, q^3, \ldots, q^{n-2}, q^{n-1}, q^n, \ldots$ ที่เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ นั่นคือ

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$$

หารด้วย q^{n-2} จะได้สมการ

$$1 + q = q^2$$

ซึ่งมีรากคือ

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ถ้าให้ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ แล้ว

จะได้ $\alpha\beta = -1$

พิจารณาซีเควนส์ $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n, \ldots$ ซึ่งมีเทอมที่ n เป็น α^{n-1}

เท่ากับ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

เทอมที่ $n-1$ เป็น α^{n-2} ซึ่งเท่ากับ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}$

เทอมที่ $n-2$ เป็น α^{n-3} ซึ่งเท่ากับ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\
&= \alpha^{n-1}
\end{aligned}$$

นั่นคือ ซีเควนส์ $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$ จะเป็นคำตอบของสมการ

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า ซีเควนส์

$1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^n, \ldots$ จะเป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$

โดยทฤษฎี 3.1 จะได้ซีเควนส์

$$c_1 + c_2, \; c_1\alpha + c_2\beta, \; c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \ldots, \; c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(a)$$

เป็นคำตอบของสมการ $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ ด้วยเมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่

ต่อไปพิจารณาหาค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ซีเควนส์ (a) เป็นซีเควนส์ฟิโบนักชี

ถ้า (a) เป็นซีเควนส์ฟิโบนักชี

ดังนั้น $c_1 + c_2 = u_1 = 1$

และ $c_1\alpha + c_2\beta = u_2 = 1$

หรือ $c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$

จะได้ $c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $c_2 = -\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)$

เนื่องจากเทอมที่ n ของซีเควนส์ (a) คือ $c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} = u_n$

ดังนั้น $$u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

นั่นคือ $$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

เรียกสมการ (*) ว่า Binet's formula

<u>ตัวอย่าง</u> หา u_{10}

จาก Binet's formula จะได้

$$u_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{10} - \beta^{10})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10}\right]$$

หา $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{10}$ ซึ่ง $= \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5}\right]^{2}$

$$= \left[\frac{1}{2^5}\left\{1 + 5\sqrt{5} + (10\times 5) + (10\times 5\sqrt{5}) + (5\times 25) + 25\sqrt{5}\right\}\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{2^5}(176 + 80\sqrt{5})\right]^2$$

$$= \left(\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{121 + 110\sqrt{5} + 125}{4}$$

$$= \frac{123 + 55\sqrt{5}}{2}$$

ทำนองเดียวกันจะได้

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10} = \frac{123 - 55\sqrt{5}}{2}$$

เพราะฉะนั้น $u_{10} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{123 + 55\sqrt{5}}{2} - \frac{123 - 55\sqrt{5}}{2}\right]$

$$= 55$$

<u>ตัวอย่าง</u> หา u_{24}

จาก Binet's formula จะได้

$$u_{24} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{24} - \beta^{24})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{24} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{24}\right]$$

เนื่องจาก $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{24} = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{6}\right]^{4}$

และ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{6} = \frac{1}{2^6}\left[1 + 6\sqrt{5} + (15\times 5) + (20\times 5\sqrt{5}) + (15\times 25) + (6\times 25\sqrt{5}) + (25\times 5)\right]$

$$= \frac{1}{2^6}\left[576 + 256\sqrt{5}\right]$$

$$= 9 + 4\sqrt{5}$$

เพราะฉะนั้น $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{24} = (9 + 4\sqrt{5})^4$

$$= 6561 + (4\times 729\times 4\sqrt{5}) + (6\times 81\times 16\times 5) + (4\times 9\times 64\times 5\sqrt{5}) + (256\times 25)$$

$$= 51841 + 23184\sqrt{5}$$

ทำนองเดียวกันจะได้ $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{24} = 51841 - 23184\sqrt{5}$

ดังนั้น $u_{24} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\times 23184\sqrt{5})$

$$= 46368$$

<u>ทฤษฎี 3.2</u> จำนวนฟีโบนักชี u_n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใกล้กับเทอมที่ n ของซีเควนส์ $\frac{\alpha}{\sqrt{5}}, \frac{\alpha^2}{\sqrt{5}}, \frac{\alpha^3}{\sqrt{5}}, \ldots, \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}, \ldots$ เมื่อ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

<u>พิสูจน์</u> ซีเควนส์ $\frac{\alpha}{\sqrt{5}}, \frac{\alpha^2}{\sqrt{5}}, \frac{\alpha^3}{\sqrt{5}}, \ldots, \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}, \ldots$

มีเทอมที่ n คือ $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$

จาก Binet's formula $u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$

จะได้
$$\left| u_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right|$$
$$= \left| -\frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \right|$$
$$= \left| \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \right|$$

แต่ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ มีค่าประมาณ -0.618

ดังนั้น $|\beta|$ มีค่าประมาณ $0.618 < 1$

เพราะฉะนั้น $|\beta^n| < 1$

จาก $\sqrt{5}$ มีค่าประมาณ 2.2361 ซึ่ง > 2

เพราะฉะนั้น $\left| \frac{\beta^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\left| u_n - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} \right| < \frac{1}{2}$

นั่นคือ u_n จะเข้าใกล้ $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ เมื่อ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

<u>หมายเหตุ</u> ทฤษฎี 3.2 นี้จะเป็นทฤษฎีที่ใช้ในการพิจารณาค่าจำนวนฟิโบนักชี

<u>ข้อสังเกต</u> จากทฤษฎี 3.2 อาจจะหาเทอมที่ n ของซีเควนส์

$$\frac{\alpha}{\sqrt{5}}, \frac{\alpha^2}{\sqrt{5}}, \frac{\alpha^3}{\sqrt{5}}, \ldots, \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}, \ldots \quad \text{เมื่อ} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

โดยใช้ลอการิทึมช่วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา u_{14}

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\sqrt{5}$ มีค่าประมาณ 2.2361

α มีค่าประมาณ 1.6180

$\log\sqrt{5}$ มีค่าประมาณ 0.34949

$\log\alpha$ มีค่าประมาณ 0.20898

เพราะฉะนั้น $\log\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}}$ มีค่าประมาณ 14(0.20898)-0.34949

มีค่าประมาณ 2.5762

ดังนั้น $\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}}$ มีค่าประมาณ 376.9

ซึ่งจำนวนเต็มบวกที่ใกล้ 376.9 คือ 377

นั่นคือ $u_{14} = 377$

<u>ทฤษฎี 3.3</u> $u_n < (\frac{7}{4})^n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

<u>พิสูจน์</u> ให้ P(n) แทนข้อความที่ว่า $u_n < (\frac{7}{4})^n$

พิจารณา P(1) คือ $u_1 = 1$

$$(\frac{7}{4})^1 = \frac{7}{4}$$

จะเห็นได้ชัดว่า $1 < \frac{7}{4}$

แสดงว่า P(1) เป็นจริง

พิจารณา P(2) คือ $u_2 = 1$

และ $(\frac{7}{4})^2 = \frac{49}{16}$

เห็นได้ชัดว่า $1 < \frac{49}{16}$

แสดงว่า P(2) เป็นจริง

สมมุติว่า P(n) เป็นจริงทุก ๆ $n = 3, 4, 5, \ldots, k-1, k$

นั่นคือ $u_{k-1} < (\frac{7}{4})^{k-1}$ และ $u_k < (\frac{7}{4})^k$

จะพิสูจน์ว่า P(k+1) เป็นจริง

นั่นคือต้องแสดงว่า $u_{k+1} < (\frac{7}{4})^{k+1}$

พิจารณา $u_{k-1} + u_k < (\frac{7}{4})^{k-1} + (\frac{7}{4})^k$

เนื่องจาก $(\frac{7}{4})^{k-1} + (\frac{7}{4})^k = (\frac{7}{4})^{k-1}(1 + \frac{7}{4})$

และ $1 + \frac{7}{4} < (\frac{7}{4})^2$

เพราะฉะนั้น $u_{k-1} + u_k = u_{k+1} < (\frac{7}{4})^{k+1}$

แสดงว่า p(k+1) เป็นจริง

โดยอาศัยทฤษฎีของอุปนัย

จะได้ว่า $u_n < (\frac{7}{4})^n$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

<u>หมายเหตุ</u> ทฤษฎี 3.3 นี้ใช้เป็นการพิจารณาค่า u_n อย่างคร่าว ๆ

3.3 คุณสมบัติของจำนวนฟีโบนักชี

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงคุณสมบัติทั่ว ๆ ไปของจำนวนฟีโบนักชี ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 3.4 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$

พิสูจน์ จากนิยาม 3.1 ข้อ 1 จะได้ว่า $u_1 = u_2 = 1$

และจากนิยาม 3.1 ข้อ 2 จะได้

$$u_1 = u_3 - u_2$$

$$u_2 = u_4 - u_3$$

$$u_3 = u_5 - u_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$

$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$

ดังนั้น $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_{n+2} - u_2$

นั่นคือ $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$

ทฤษฎี 3.5 $u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$

พิสูจน์ จากนิยาม 3.1 ข้อ 1 จะได้ $u_1 = u_2 = 1$

และจากนิยาม 3.1 ข้อ 2 จะได้

$$u_3 = u_4 - u_2$$

$$u_5 = u_6 - u_4$$

$$u_7 = u_8 - u_6$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{2n-3} = u_{2n-2} - u_{2n-4}$$

$$u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}$$

ดังนั้น $u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$

<u>ทฤษฎี 3.6</u> $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.4 จะได้ว่า

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

และจากทฤษฎี 3.5 ได้ว่า

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$$

ดังนั้น $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n}$

เนื่องจาก $u_{2n+2} = u_{2n+1} + u_{2n}$

ดังนั้น $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n} - 1 - u_{2n}$

นั่นคือ $u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$

<u>ทฤษฎี 3.7</u> $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.5 ได้ว่า

$$u_1 + u_3 + u_5 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$$

จากทฤษฎี 3.6 ได้ว่า

$$u_2 + u_4 + u_6 + \cdots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

ฉะนั้นจะได้

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} = u_{2n} - (u_{2n+1} - 1)$$

บวกด้วย u_{2n+1} จะได้

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1}$$

$$= u_{2n} - u_{2n+1} + 1 + u_{2n+1}$$

ดังนั้น $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1$

นั่นคือ $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1$

<u>ทฤษฎี 3.8</u> $u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n = u_n^2$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

หรือ $u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$

ดังนั้น
$$u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n = u_n(u_{n+1} - u_{n-1})$$
$$= u_n(u_n)$$
$$= u_n^2$$

นั่นคือ $u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n = u_n^2$

<u>ทฤษฎี 3.9</u> $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$

<u>พิสูจน์</u> จากนิยาม 3.1 ข้อ 1 จะได้ $u_1^2 = u_1 u_2$

และจากทฤษฎี 3.8 จะได้

$$u_2^2 = u_2u_3 - u_1u_2$$
$$u_3^2 = u_3u_4 - u_2u_3$$
$$u_4^2 = u_4u_5 - u_3u_4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{n-1}^2 = u_{n-1}u_n - u_{n-2}u_{n-1}$$
$$u_n^2 = u_nu_{n+1} - u_{n-1}u_n$$

ดังนั้น $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_{n-1}^2 + u_n^2$

$$= u_nu_{n+1} - u_{n-1}u_n + u_{n-1}u_n - u_{n-2}u_{n-1}$$
$$+ \dots + u_2u_3 - u_1u_2 + u_1u_2$$

นั่นคือ $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = u_nu_{n+1}$

<u>ทฤษฎี 3.10</u> $u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{3n} = \frac{1}{2}(u_{3n+2} - 1)$

<u>พิสูจน์</u> จาก Binet's formula ได้ว่า $u_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น

$$u_3 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{5}}$$
$$u_6 = \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\sqrt{5}}$$
$$u_9 = \frac{\alpha^9 - \beta^9}{\sqrt{5}}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$u_{3n} = \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}}$$

เพราะฉะนั้น

$$u_3+u_6+u_9+\cdots+u_{3n} = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^6-\beta^6}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^9-\beta^9}{\sqrt{5}}+\cdots+\frac{\alpha^{3n}-\beta^{3n}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3+\alpha^6+\alpha^9+\cdots+\alpha^{3n}-\beta^3-\beta^6-\beta^9-\cdots-\beta^{3n})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{\alpha^3-1}-\frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{\beta^3-1}\right)$$

เนื่องจาก $\alpha^3-1 = (\alpha+\alpha^2)-1$

และ $\alpha^2 = \alpha+1$

ฉะนั้น $\alpha^3-1 = \alpha+(\alpha+1)-1$

จะได้ $\alpha^3-1 = 2\alpha$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\beta^3-1 = 2\beta$

ดังนั้น

$$u_3+u_6+u_9+\cdots+u_{3n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{2\alpha}-\frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{2\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\alpha^2-\beta^{3n+2}+\beta^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\beta^{3n+2}}{\sqrt{5}}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}\right)$$

แต่ $u_{3n+2} = \dfrac{\alpha^{3n+2}-\beta^{3n+2}}{\sqrt{5}}$ และ $u_2 = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น $u_3+u_6+u_9+\cdots+u_{3n} = \frac{1}{2}(u_{3n+2}-u_2)$

นั่นคือ $u_3+u_6+u_9+\cdots+u_{3n} = \frac{1}{2}(u_{3n+2}-1)$

ทฤษฎี 3.11 $\quad u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \dots + u_n^3 = \dfrac{u_{3n+2} + (-1)^{n+1}\, 6u_{n-1} + 5}{10}$

พิสูจน์ จาก Binet's formula จะได้ว่า

$$u_k^3 = \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k} - 3\alpha^{2k}\beta^k + 3\alpha^k\beta^{2k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} - 3\alpha^k\beta^k\left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k} - \beta^{3k}}{\sqrt{5}} - (\alpha\beta)^k 3\left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(u_{3k} - (-1)^k\, 3u_k\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(u_{3k} + (-1)^{k+1}\, 3u_k\right)$$

ดังนั้น $\quad u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \dots + u_n^3$

$$= \frac{1}{5}\Big[(u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{3n})$$

$$+ 3(u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n)\Big]$$

จากทฤษฎี 3.10 ได้ว่า

$$u_3 + u_6 + u_9 + \dots + u_{3n} = \frac{u_{3n+2} - 1}{2}$$

และทฤษฎี 3.7 ได้ว่า

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1}u_n = (-1)^{n+1}u_{n-1} + 1$$

ดังนั้น $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \dots + u_n^3$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{u_{3n+2} - 1}{2} + 3\left[(-1)^{n+1} u_{n-1} + 1\right]\right)$$

นั่นคือ $u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \dots + u_n^3$

$$= \frac{1}{10}\left(u_{3n+2} + (-1)^{n+1} 6u_{n-1} + 5\right)$$

<u>ทฤษฎี 3.12</u> $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก m และ n

<u>พิสูจน์</u> ให้ p(m) แทนข้อความที่ว่า $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

พิจารณา p(1)

เนื่องจาก $u_{n-1}u_1 + u_n u_2 = u_{n-1} + u_n$

และ $u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$

ดังนั้น $u_{n-1}u_1 + u_n u_2 = u_{n+1}$

แสดงว่า p(1) เป็นจริง

พิจารณา p(2)

เนื่องจาก $u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n$

$$= u_{n-1} + u_n + u_n$$

และ $u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n+1} + u_n$

และเนื่องจาก $u_{n+1} + u_n = u_{n+2}$

ดังนั้น $u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n+2}$

แสดงว่า $p(2)$ เป็นจริง

สมมุติ $p(m)$ เป็นจริงทุก ๆ $m \leq k+1$

นั่นคือ $u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1}$

และ $u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$

จะพิสูจน์ว่า $p(k+2)$ เป็นจริงด้วย นั่นคือต้องแสดงว่า

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}$$

พิจารณา

$$u_{n+k} + u_{n+k+1} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1} + u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$$

$$= u_{n-1}(u_k + u_{k+1}) + u_n(u_{k+1} + u_{k+2})$$

จากคุณสมบัติข้อ 2 ของนิยาม 3.1 จะได้

$$u_k + u_{k+1} = u_{k+2},\ u_{k+1} + u_{k+2} = u_{k+3} \text{ และ}$$

$$u_{n+k} + u_{n+k+1} = u_{n+k+2}$$

ดังนั้น $u_{n+k+2} = u_{n-1} u_{k+2} + u_n u_{k+3}$

แสดงว่า $p(k+2)$ เป็นจริง

โดยอาศัยทฤษฎีของอุปนัย จะได้ว่า

$p(m)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ m

นั่นคือ $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก m

และ n

<u>บทแทรก 3.12.1</u> $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.12 ได้ว่า $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$

ให้ $m = n$

จะได้ $u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1}$

$= u_n(u_{n-1} + u_{n+1})$

เนื่องจาก $u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$

เพราะฉะนั้น $u_{2n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n-1})$

นั่นคือ $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$

<u>บทแทรก 3.12.2</u> $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.12 ได้ว่า $u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}$

ให้ $m = 2n$ จะได้

$$u_{3n} = u_{n-1}u_{2n} + u_n u_{2n+1}$$

แต่ $u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n}$

ดังนั้น $u_{3n} = u_{n-1}u_{2n} + u_n(u_{2n+2} - u_{2n})$

จากบทแทรก 3.12.1 ได้ว่า

$$u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 ,$$

และ $u_{2n+2} = u_{n+2}^2 - u_n^2$

เพราะฉะนั้น

$$u_{3n} = u_{n-1}(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + u_n\left[(u_{n+2}^2 - u_n^2)-(u_{n+1}^2-u_{n-1}^2)\right]$$

$$= u_{n-1}u_{n+1}^2 - u_{n-1}^3 + u_nu_{n+2}^2 - u_n^3 - u_nu_{n+1}^2+u_nu_{n-1}^2$$

เนื่องจาก $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$ และ $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

ดังนั้น

$$u_{3n} = u_{n+1}^3 - 2u_nu_{n+1}^2 - u_{n-1}^3 + u_nu_{n+2}^2 + u_nu_{n-1}^2 - u_n^3$$

$$= u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 - 2u_nu_{n+1}^2 + u_nu_{n+2}^2 + u_n(u_{n+1}-u_n)^2-u_n^3$$

จะได้ $u_{3n} = u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 - 2u_nu_{n+1}^2 + u_n(u_{n+1} + u_n)^2$

$$+ u_nu_{n+1}^2 - 2u_n^2u_{n+1} + u_n^3 - u_n^3$$

ดังนั้น $u_{3n} = u_{n+1}^3 - u_{n-1}^3 + 2u_n^2u_{n+1} - 2u_n^2u_{n+1} + u_n^3$

นั่นคือ $u_{3n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$

<u>ทฤษฎี 3.13</u> $u_{n+1}^2 = u_nu_{n+2} + (-1)^n$ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

<u>พิสูจน์</u> ให้ p(n) แทนข้อความที่ว่า $u_{n+1}^2 = u_nu_{n+2} + (-1)^n$

พิจารณา p(1)

เนื่องจาก $u_1 = u_2 = 1$ จะได้

$$u_1u_3 - 1 = u_2u_3 - u_1u_2$$

จากนิยาม 3.1 ข้อ 2 จะได้ $u_3 = u_2 + u_1$

ดังนั้น $u_1u_3 - 1 = u_2^2$

แสดงว่า p(1) เป็นจริง

สมมุติว่า p(k) เป็นจริงคือ

$$u_{k+1}^2 = u_ku_{k+2} + (-1)^k \quad \text{.................(A)}$$

จะพิสูจน์ว่า p(k+1) เป็นจริง นั่นคือต้องแสดงว่า

$$u_{k+2}^2 = u_{k+1}u_{k+3} + (-1)^{k+1}$$

สมการ (A) บวกด้วย $u_{k+1}\,u_{k+2}$ ทั้งสองข้าง จะได้

$$u_{k+1}^2 + u_{k+1}\,u_{k+2} = u_ku_{k+2} + (-1)^k + u_{k+1}u_{k+2}$$

เนื่องจาก

$$u_{k+1}^2 + u_{k+1}\,u_{k+2} = u_{k+1}(u_{k+1} + u_{k+2})$$

$$= u_{k+1}\,u_{k+3}$$

และ $u_ku_{k+2} + (-1)^k + u_{k+1}u_{k+2} = u_{k+2}(u_k + u_{k+1}) + (-1)^k$

$$= u_{k+2}^2 + (-1)^k$$

เพราะฉะนั้น $u_{k+1}\,u_{k+3} = u_{k+2}^2 + (-1)^k$

ดังนั้น $u_{k+2}^2 = u_{k+1}\,u_{k+3} + (-1)^{k+1}$

แสดงว่า p(k+1) เป็นจริง

โดยทฤษฎีของอุปนัย จะได้ว่า p(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

นั่นคือ $u_{n+1}^2 = u_nu_{n+2} + (-1)^n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

<u>ทฤษฎี 3.14</u> $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $p(n)$ แทนข้อความที่ว่า

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$$

เนื่องจาก $u_1 = u_2 = 1$ จะได้ $u_1u_2 = u_2u_2 = u_2^2$

แสดงว่า $p(1)$ เป็นจริง

สมมุติว่า $p(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2k-1}u_{2k} = u_{2k}^2 \quad \dots(B)$$

จะพิสูจน์ว่า $p(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือจะต้องแสดงว่า

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2k+1}u_{2k+2} = u_{2k+2}^2$$

สมการ (B) บวกด้วย $u_{2k}u_{2k+1} + u_{2k+1}u_{2k+2}$ ทั้งสองข้าง

จะได้

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2k-1}u_{2k} + u_{2k}u_{2k+1} +$$

$$u_{2k+1}u_{2k+2} = u_{2k}^2 + u_{2k}u_{2k+1} + u_{2k+1}u_{2k+2}$$

จากทฤษฎี 3.8 จะได้

$$u_{2k+1}u_{2k+2} = u_{2k+1}^2 + u_{2k}u_{2k+1}$$

ดังนั้น

$$u_{2k}^2 + u_{2k}u_{2k+1} + u_{2k+1}u_{2k+2} = u_{2k}^2 + 2u_{2k}u_{2k+1} + u_{2k+1}^2$$

$$= (u_{2k} + u_{2k+1})^2$$

แต่ $u_{2k} + u_{2k+1} = u_{2k+2}$ จะได้

$$(u_{2k} + u_{2k+1})^2 = u_{2k+2}^2$$

ดังนั้น $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2k+1}u_{2k+2} = u_{2k+2}^2$

แสดงว่า $p(k+1)$ เป็นจริง

โดยอาศัยหฤษฎีของอุปนัย จะได้ว่า $p(n)$ จะเป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

นั่นคือ

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$$

ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

<u>ทฤษฎี 3.15</u> $u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.14 ได้ว่า

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$$

บวกด้วย $u_{2n}u_{2n+1}$ ทั้งสองข้าง จะได้

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \cdots + u_{2n-1}u_{2n} + u_{2n}u_{2n+1}$$

$$= u_{2n}^2 + u_{2n}u_{2n+1}$$

เนื่องจาก $u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n+2}$ จะได้

$$u_{2n}^2 + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n}u_{2n+2}$$

โดยทฤษฎี 3.13 จะได้ว่า

$$u_{2n}u_{2n+2} = u_{2n+1}^2 + (-1)^{2n+1}$$

เนื่องจาก $2n + 1$ เป็นเลขคี่เสมอ ดังนั้น

$$(-1)^{2n+1} = -1$$

นั่นคือ

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$$

<u>ทฤษฎี 3.16</u> $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \dots + 2u_{n-1} + u_n$

$$= u_{n+4} - (n+3)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $p(n)$ แทนข้อความที่ว่า

$$nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \dots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3)$$

พิจารณา $p(1)$

เนื่องจาก $u_{1+4} - (1+3) = u_5 - 4$

แต่ $u_5 = 5$ และ $u_1 = 1$ จะได้ $u_5 - 4 = u_1$

ดังนั้น $u_1 = u_{1+4} - (1+3)$

แสดงว่า $p(1)$ เป็นจริง

สมมุติ $p(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$ku_1 + (k-1)u_2 + (k-2)u_3 + \dots + 2u_{k-1} + u_k$$

$$= u_{k+4} - (k+3)$$

จะพิสูจน์ว่า $p(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือต้องแสดงว่า

$$(k+1)u_1 + ku_2 + (k-1)u_3 + \cdots + 2u_k + u_{k+1}$$
$$= u_{k+5} - (k+1+3)$$

พิจารณา

$$(k+1)u_1 + ku_2 + (k-1)u_3 + \cdots + 2u_k + u_{k+1}$$
$$= u_{k+4} - (k+3) + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k + u_{k+1}$$

จากทฤษฎี 3.4 จะได้ว่า $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{k+1} = u_{k+3} - 1$

เพราะฉะนั้น

$$u_{k+4} - (k+3) + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{k+1}$$
$$= u_{k+4} - (k+3) + u_{k+3} - 1$$
$$= u_{k+4} + u_{k+3} - k - 1 - 3$$

เนื่องจาก $u_{k+4} + u_{k+3} = u_{k+5}$ จะได้

$$u_{k+4} + u_{k+3} - k - 1 - 3 = u_{(k+1)+4} - \left[(k+1)+3\right]$$

ดังนั้น

$$(k+1)u_1 + ku_2 + (k-1)u_3 + \cdots + 2u_k + u_{k+1}$$
$$= u_{(k+1)+4} - \left[(k+1)+3\right]$$

แสดงว่า $p(k+1)$ เป็นจริง
โดยอาศัยทฤษฎีของอุปนัย จะได้ว่า

$p(n)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

นั่นคือ $nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \cdots + 2u_{n-1} + u_n$
$$= u_{n+4} - (n+3)$$

<u>ทฤษฎี 3.17</u> สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก m และ n

ถ้า $m \mid n$ แล้ว $u_m \mid u_n$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $m \mid n$ โดยนิยาม 2.1 จะมีจำนวนเต็ม k ที่ $n = mk$

ให้ $p(k)$ แทนข้อความที่ว่า $u_m \mid u_{mk}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก m

เห็นได้ชัดว่า $u_m \mid u_m$

แสดงว่า $p(1)$ เป็นจริง

สมมุติว่า $p(r)$ เป็นจริง นั่นคือ $u_m \mid u_{mr}$

จะพิสูจน์ว่า $p(r+1)$ เป็นจริง นั่นคือต้องแสดงว่า $u_m \mid u_{m(r+1)}$

จากทฤษฎี 3.12 จะได้ว่า

$$u_{mr+m} = u_{mr-1}u_m + u_{mr}u_{m+1}$$

เนื่องจาก $u_m \mid u_m$ และ $u_m \mid u_{mr}$

โดยทฤษฎี 2.2 จะได้ $u_m \mid u_{mr-1}u_m$ และ $u_m \mid u_{mr}u_{m+1}$

โดยทฤษฎี 2.1 จะได้ $u_m \mid u_{mr+m}$

หรือ $u_m \mid u_{m(r+1)}$

แสดงว่า $p(r+1)$ เป็นจริง

โดยอาศัยทฤษฎีของอุปนัย จะได้ว่า

$p(k)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก k

นั่นคือ $u_m \mid u_n$

<u>บทแทรก 3.17</u> $u_n \mid u_{rn}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก r

<u>พิสูจน์</u> เห็นได้ชัดว่า $n \mid rn$

โดยทฤษฎี 3.17 จะได้ $u_n \mid u_{rn}$

<u>ตัวอย่าง</u> เพราะว่า $5 \mid 10$

เพราะฉะนั้น $(u_5 = 5) \mid (u_{10} = 55)$

หรือ $u_8 = 21$, $u_{24} = 46368 = 21 \times 2208$

เพราะฉะนั้น ถ้า $8 \mid 24$ แล้ว $u_8 \mid u_{24}$

<u>ทฤษฎี 3.18</u> ถ้า n เป็นจำนวนประกอบที่มากกว่า 4 แล้ว u_n เป็นจำนวนประกอบ

<u>พิสูจน์</u> ถ้า n เป็นจำนวนประกอบแล้ว $n = n_1 n_2$ เมื่อ $n_1, n_2 \in I$ และ $1 < n_1 < n$ และ $1 < n_2 < n$ โดยที่ $n_1 > 2$ หรือ $n_2 > 2$

ถ้า $n_1 > 2$ และ $n_1 \mid n$

โดยทฤษฎี 3.17 จะได้ $u_{n_1} \mid u_n$ ขณะที่ $1 < u_{n_1} < u_n$

ทำนองเดียวกันถ้า $n_2 > 2$ จะได้ว่า $u_{n_2} \mid u_n$

โดยที่ $1 < u_{n_2} < u_n$

นั่นคือ u_n เป็นจำนวนประกอบ

<u>ตัวอย่าง</u> เช่น $n = 6$, $u_6 = 8$ ซึ่งเป็นจำนวนประกอบ

$n = 12$, $u_{12} = 144$ ซึ่งเป็นจำนวนประกอบ

$n = 14$, $u_{14} = 377 = 13 \times 29$ ซึ่งเป็นจำนวนประกอบ

<u>ทฤษฎี 3.19</u> $(u_n, u_{n+1}) = 1$

<u>พิสูจน์</u> สมมุติให้ u_n และ u_{n+1} มีตัวหารร่วมมากคือ d ซึ่ง $d > 1$

โดยนิยาม 2.2 ข้อ 2 จะได้ว่า $d \mid u_n$ และ $d \mid u_{n+1}$

โดยทฤษฎี 2.1 จะได้ $d \mid (u_{n+1} - u_n)$

เนื่องจาก $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$

ดังนั้น $d \mid u_{n-1}$

ในทำนองเดียวกัน สามารถพิสูจน์ได้ว่า d สามารถหาร

$u_{n-2}, u_{n-3}, u_{n-4}, \ldots, u_2, u_1$ ได้ลงตัว

เนื่องจาก $u_1 = 1$

ดังนั้น $d \mid 1$ ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมุติว่า $d > 1$

เพราะฉะนั้นตัวหารร่วมมากของ u_n และ u_{n+1} ไม่มากกว่า 1

นั่นคือ $(u_n, u_{n+1}) = 1$

<u>ทฤษฎี 3.20</u> สำหรับจำนวนเต็ม m, n ใด ๆ $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่า $m > n$ โดยทฤษฎี 2.3

จะได้ $m = nq_0 + r_1$ เมื่อ $0 < r_1 < n$

ทำนองเดียวกัน จะได้

$$n = r_1q_1 + r_2 \quad \text{เมื่อ } 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3 \quad \text{เมื่อ } 0 < r_3 < r_2$$

....

$$r_{t-2} = r_{t-1}q_{t-1} + r_t \quad \text{เมื่อ } 0 < r_t < r_{t-1}$$

$$r_{t-1} = r_tq_t$$

โดยทฤษฎี 2.4 จะได้

r_t เป็น ห.ร.ม.ของ m และ n

จาก $m = nq_0 + r_1$ จะได้ $(u_m, u_n) = (u_{nq_0+r_1}, u_n)$

โดยทฤษฎี 3.12 จะได้ว่า

$$(u_{nq_0+r_1}, u_n) = (u_{nq_0-1}u_{r_1} + u_{nq_0}u_{r_1+1}, u_n)$$

จากทฤษฎี 3.17 จะได้ $u_n \mid u_{nq_0}$

โดยทฤษฎี 2.2 จะได้ $u_n \mid u_{nq_0}u_{r_1+1}$

และโดยทฤษฎี 2.9 จะได้

$$(u_{nq_0-1}u_{r_1} + u_{nq_0}u_{r_1+1}, u_n) = (u_{nq_0-1}u_{r_1}, u_n)$$

โดยทฤษฎี 2.7 จะได้

$$(u_{nq_0-1}\, u_{r_1}, u_n) = (u_{r_1}, u_n)$$

นั่นคือ $(u_m, u_n) = (u_{r_1}, u_n)$

ในทำนองเดียวกันสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$(u_{r_1}, u_n) = (u_{r_2}, u_{r_1})$$

$$(u_{r_2}, u_{r_1}) = (u_{r_3}, u_{r_2})$$

$$(u_{r_3}, u_{r_2}) = (u_{r_4}, u_{r_3})$$

....

$$(u_{r_{t-1}}, u_{r_{t-2}}) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}})$$

เพราะฉะนั้น $(u_m, u_n) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}})$

เนื่องจาก $r_t \mid r_{t-1}$ โดยทฤษฎี 3.17 จะได้ว่า $u_{r_t} \mid u_{r_{t-1}}$

เพราะฉะนั้น $(u_{r_t}, u_{r_{t-1}}) = u_{r_t}$ และ $r_t = (m,n)$

นั่นคือ $(u_m, u_n) = u_{r_t} = u_{(m,n)}$

<u>ตัวอย่าง</u> $(u_4, u_6) = (3,8) = 1 = u_2$ ซึ่ง $(4,6) = 2$,

$(u_{12}, u_{15}) = (144,610) = 2 = u_3$ ซึ่ง $3 = (12,15)$

$(u_{20}, u_{15}) = (6765,610) = 5 = u_5$ ซึ่ง $5 = (20,15)$

<u>ทฤษฎี 3.21</u> ถ้า $u_m \mid u_n$ แล้ว $m \mid n$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $u_m \mid u_n$ และ

โดยทฤษฎี 2.8

เพราะฉะนั้น $(u_m, u_n) = u_m$

จากทฤษฎี 3.20 ได้ว่า $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$

ดังนั้น $u_m = u_{(m,n)}$

จะได้ว่า $m = (m,n)$

โดยทฤษฎี 2.8 จะได้ $m \mid n$

นั่นคือ ถ้า $u_m \mid u_n$ แล้ว $m \mid n$

<u>ตัวอย่าง</u> เนื่องจาก $u_5 = 5$, $u_{10} = 55$

และ $u_5 \mid u_{10}$

นั่นคือ $5 \mid 10$

<u>หรือ</u> เนื่องจาก $u_8 = 21$, $u_{24} = 46368 = 21 \times 2208$

และ $u_8 \mid u_{24}$

นั่นคือ $8 \mid 24$

<u>ข้อสังเกต</u> จากทฤษฎี 3.17 และทฤษฎี 3.21 สามารถสรุปได้ว่า

$u_m \mid u_n$ ก็ต่อเมื่อ $m \mid n$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก m และ n

<u>ตัวอย่าง</u> จาก $u_5 = 5$, $u_{10} = 55$

และ $u_8 = 21$, $u_{24} = 46368 = 21 \times 2208$

นั่นคือ $u_5 \mid u_{10}$ ก็ต่อเมื่อ $5 \mid 10$

และ $u_8 \mid u_{24}$ ก็ต่อเมื่อ $8 \mid 24$

<u>ทฤษฎี 3.22</u> ถ้า $(m,n) = 1$ แล้ว $u_m u_n \mid u_{mn}$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.20 จะได้ว่าถ้า $(m,n) = 1$ แล้ว $(u_m,u_n) = 1$ และจากบทแทรก 3.17 จะได้ $u_n \mid u_{rn}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม r ดังนั้น

$$u_m \mid u_{mn} \quad \text{และ} \quad u_n \mid u_{mn}$$

นั่นคือ

$$u_m u_n \mid u_{mn}$$

<u>ทฤษฎี 3.23</u> ให้ u_n เป็นจำนวนฟิโบนักชีใด ๆ จะได้ว่า u_n จะเป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $3 \mid n$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.17 และทฤษฎี 3.21 จะได้ว่า $3 \mid n$ ก็ต่อเมื่อ $u_3 \mid u_n$

เนื่องจาก $u_3 = 2$

ดังนั้น $3 \mid n$ ก็ต่อเมื่อ $2 \mid u_n$

โดยนิยาม 2.1 จะมีจำนวนเต็ม k ที่ $u_n = 2k$

โดยนิยาม 2.5 จะได้ u_n เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ u_n จะเป็นจำนวนคู่ก็ต่อเมื่อ $3 \mid n$

<u>ตัวอย่าง</u> จาก $3 \mid 24$ นั่นคือ $u_{24} = 46368$ เป็นจำนวนคู่

<u>ทฤษฎี 3.24</u> $3 \mid u_n$ ก็ต่อเมื่อ $4 \mid n$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.17 และทฤษฎี 3.21 จะได้ $4 \mid n$ ก็ต่อเมื่อ $u_4 \mid u_n$

เนื่องจาก $u_4 = 3$

ดังนั้น $4 \mid n$ ก็ต่อเมื่อ $3 \mid u_n$

<u>ตัวอย่าง</u> จาก $4 \mid 24$ นั่นคือ $3 \mid u_{24}$

เพราะว่า $46368 = 3 \times 15456$

<u>ทฤษฎี 3.25</u> $4 \mid u_n$ ก็ต่อเมื่อ $6 \mid n$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.17 และทฤษฎี 3.21 จะได้

$6 \mid n$ ก็ต่อเมื่อ $u_6 \mid u_n$

เนื่องจาก $u_6 = 8$ และ $8 = 4 \times 2$

ดังนั้น $6 \mid n$ ก็ต่อเมื่อ $8 = (4 \times 2) \mid u_n$

โดยนิยาม 2.1 จะมีจำนวนเต็ม k ที่ $u_n = 8k = 4 \times 2k$

และเนื่องจาก $2k$ เป็นจำนวนเต็มเมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $4 \mid u_n$

นั่นคือ $4 \mid u_n$ ก็ต่อเมื่อ $6 \mid n$

<u>ตัวอย่าง</u> จาก $6 \mid 24$ และ $u_{24} = 46368 = 4 \times 11592$

นั่นคือ $4 \mid u_{24}$

<u>ทฤษฎี 3.26</u> $5 \mid u_n$ ก็ต่อเมื่อ $5 \mid n$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.17 และ ทฤษฎี 3.21 จะได้ $5 \mid n$ ก็ต่อเมื่อ $u_5 \mid u_n$

เนื่องจาก $u_5 = 5$

นั่นคือ $5 \mid u_n$ ก็ต่อเมื่อ $5 \mid n$

<u>ตัวอย่าง</u> จาก $5 \mid 10$ และ $u_{10} = 55 = 5 \times 11$

นั่นคือ $5 \mid u_{10}$

<u>ทฤษฎี 3.27</u> $7 \mid u_n$ ก็ต่อเมื่อ $8 \mid n$

<u>พิสูจน์</u> จากทฤษฎี 3.17 และทฤษฎี 3.21 จะได้ $8 \mid n$ ก็ต่อเมื่อ $u_8 \mid u_n$

เนื่องจาก $u_8 = 21 = 7 \times 3$

ดังนั้น $(7 \times 3) \mid u_n$

โดยนิยาม 2.1 จะมี $k \in I$ ที่ $u_n = 7 \times 3k$

และเนื่องจาก $3k \in I$

ดังนั้น โดยนิยาม 2.1 จะได้ $7 \mid u_n$

นั่นคือ $7 \mid u_n$ ก็ต่อเมื่อ $8 \mid n$

<u>ตัวอย่าง</u> จาก $8 \mid 24$ และ $u_{24} = 46368 = 7 \times 6624$

นั่นคือ $7 \mid u_{24}$

<u>ทฤษฎี 3.28</u> ไม่มีจำนวนฟีโบนักชีใดที่หารด้วย 8 แล้วเหลือเศษ 4

<u>พิสูจน์</u> สมมุติมี u_n ที่ $u_n = 8q + 4$ เมื่อ $q \in I$

จะได้ $u_n - 4 = 8q$

โดยนิยาม 2.1 จะได้ $8 \mid (u_n - 4)$

จากทฤษฎี 2.1 จะได้ $8 \mid u_n$ และ $8 \mid 4$ ซึ่งขัดแย้ง

(เพราะว่า $8 \nmid 4$)

นั่นคือ ไม่มีจำนวนฟีโบนักชีใดที่หารด้วย 8 แล้วเหลือเศษ 4

3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนฟีโบนักชีกับจำนวนลูคัส

นิยาม 3.3 ซีเควนส์ลูคัส (Lucas sequence) ซึ่งเขียนแทนด้วย $\{v_n\}$ คือ ซีเควนส์ของจำนวนเต็มบวกที่มีคุณสมบัติ

$$v_n = \alpha^n + \beta^n \quad \text{เมื่อ } \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{\alpha}$$

นั่นคือ ซีเควนส์ลูคัสคือ

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...

นอกจากนิยาม 3.3 จะได้ $v_n = v_{n-2} + v_{n-1}$, $n \geq 3$ ด้วย

นิยาม 3.4 จำนวนลูคัส (Lucas numbers) คือจำนวนแต่ละจำนวน (หรือแต่ละเทอม) ของซีเควนส์ลูคัส

ต่อไปนี้เป็นทฤษฎีแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนฟีโบนักชีกับจำนวนลูคัส

ทฤษฎี 3.29 $\quad 2u_{m+n} = u_m v_n + u_n v_m$

พิสูจน์ ให้ $p(m)$ แทนข้อความที่ว่า $2u_{m+n} = u_m v_n + u_n v_m$

พิจารณา $p(1)$

เนื่องจาก $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $v_1 = 1$, จะได้ $2u_2 = 2$

$$u_1 v_1 + u_1 v_1 = 1 + 1 = 2$$

แสดงว่า $p(1)$ เป็นจริง

พิจารณา $p(2)$

เนื่องจาก $u_3 = 2$, $u_2 = 1$, $v_2 = 3$ จะได้ $2u_3 = 4$

$$u_2 v_1 + u_1 v_2 = 1 + 3 = 4$$

แสดงว่า $p(2)$ เป็นจริง

สมมุติว่า p(m) เป็นจริงทุก ๆ ค่าของ $m \leq k+1$ นั่นคือ

$$2u_{k+n} = u_k v_n + u_n v_k \text{ และ } 2u_{k+n+1} = u_{k+1}v_n + u_n v_{k+1}$$

พิจารณา p(k+2)

$$2u_{k+n} + 2u_{k+n+1} = u_k v_n + u_n v_k + u_{k+1}v_n + u_n v_{k+1}$$

$$2(u_{k+n}+u_{k+n+1}) = (u_k+u_{k+1})v_n + u_n(v_k + v_{k+1})$$

$$2u_{k+n+2} = u_{k+2}v_n + u_n v_{k+2}$$

แสดงว่า p(k+2) เป็นจริง

นั่นคือ p(m) เป็นจริงทุกๆ ค่าของ m, n

โดยอาศัยหลักทฤษฎีของอุปนัย จะได้ว่า

$$2u_{m+n} = u_m v_n + u_n v_m$$

<u>ทฤษฎี 3.30</u> $u_{2n} = u_n v_n$

<u>พิสูจน์</u> ให้ p(n) แทนข้อความที่ว่า $u_{2n} = u_n v_n$

พิจารณา p(1) เนื่องจาก $u_2 = 1,\ u_1 = 1,\ v_1 = 1$

เห็นได้ชัดว่า p(1) เป็นจริง

พิจารณา p(2) เนื่องจาก $u_4 = 3,\ u_2 = 1,\ v_2 = 3$

ทางซ้าย $u_4 = 3$

ทางขวา $u_2 v_2 = 1 \times 3 = 3$

แสดงว่า p(2) เป็นจริง

สมมุติ p(k) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $k \leq n$ นั่นคือ

$u_{2(n-1)} = u_{2n-2} = u_{n-1}v_{n-1}$ และ

$u_{2n} = u_n v_n$

พิจารณา p(n+1)

$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = u_{2n+1} + u_{2n}$

แต่ $u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}$ และ $u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}$

ดังนั้น $u_{2(n+1)} = 3u_{2n} - u_{2n-2}$

$$= 3u_n v_n - u_{n-1}v_{n-1}$$

จากนิยาม 3.1 ข้อ 2 จะได้

$u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$ และ $v_n = v_{n+1} - v_{n-1}$

ดังนั้น

$$u_{2(n+1)} = 3u_{n+1}v_{n+1} - 3u_{n-1}v_{n+1} - 3u_{n+1}v_{n-1} + 2u_{n-1}v_{n-1}$$

$$= u_{n+1}v_{n+1} + 2u_{n+1}v_{n+1} - 3u_{n-1}(v_n + v_{n-1})$$

$$- 3(u_n + u_{n-1})v_{n-1} + 2u_{n-1}v_{n-1}$$

$$= u_{n+1}v_{n+1} + 2(u_n + u_{n-1})(v_n + v_{n-1}) - 3u_{n-1}v_n$$

$$- 4u_{n-1}v_{n-1} - 3u_n v_{n-1}$$

$$= u_{n+1}v_{n+1} + 2u_n v_n - u_n v_{n-1} - u_{n-1}v_n$$

$$- 2u_{n-1}v_{n-1}$$

เนื่องจาก $2u_n v_n = 2u_{2n}$ และ $-2u_{n-1}v_{n-1} = -2u_{2n-2}$

ดังนั้นทางขวา $= u_{n+1}v_{n+1} + 2u_{2n} - u_nv_{n-1} - u_{n-1}v_n$

$- 2u_{2n-2}$

$= u_{n+1}v_{n+1} + 2(u_{2n} - u_{2n-2})$

$- (u_nv_{n-1} + u_{n-1}v_n)$

เพราะว่า $u_{2n} - u_{2n-2} = u_{2n-1}$

และโดยทฤษฎี 3.29 จะได้

$$u_nv_{n-1} + u_{n-1}v_n = 2u_{n+n-1} = 2u_{2n-1}$$

เพราะฉะนั้น $u_{2(n+1)} = u_{n+1}v_{n+1} + 2u_{2n-1} - 2u_{2n-1}$

$= u_{n+1}v_{n+1}$

แสดงว่า $p(k+1)$ เป็นจริง

นั่นคือ $p(n)$ เป็นจริงทุก ๆ ค่าของ n

โดยอาศัยทฤษฎีของอุปนัย จะได้ $u_{2n} = u_nv_n$ ทุก ๆ ค่าของ n

---

<u>ข้อสังเกตุ</u> จากทฤษฎี 3.30 นี้ สามารถจะหาจำนวนลูคัสได้จากจำนวนฟีโบนักชี ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา v_{14}

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎี 3.30 จะได้ $v_{14} = \frac{u_{28}}{u_{14}}$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} u_{28} &= u_{15+13} \\ &= u_{14}u_{13} + u_{15}u_{14} \\ &= u_{14}(u_{13} + u_{15}) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} \frac{u_{28}}{u_{14}} &= u_{13} + u_{15} \\ &= u_{7+6} + u_{3x5} \\ &= u_6u_6 + u_7u_7 + u_6^3 + u_5^3 - u_4^3 \\ &= u_6^2(1 + u_6) + u_7^2 + u_5^3 - u_4^3 \\ &= 8^2(1 + 8) + 13^2 + 5^3 - 3^3 \\ &= (64 \times 9) + 169 + 125 - 27 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $v_{14} = 843$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา v_{64}

<u>วิธีทำ</u> จากทฤษฎี 3.30 จะได้ $v_{64} = \frac{u_{128}}{u_{64}}$

โดยบทแทรก 3.12.1 จะได้

$$u_{128} = u_{2 \times 64} = u_{65}^2 - u_{63}^2$$

$$\begin{aligned} u_{65}^2 - u_{63}^2 &= (u_{64} + u_{63})^2 - u_{63}^2 \\ &= u_{64}^2 + 2u_{64}u_{63} + u_{63}^2 - u_{63}^2 \\ &= u_{64}(u_{64} + 2u_{63}) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} v_{64} &= u_{64} + 2u_{63} \\ &= u_{65} + u_{63} \end{aligned}$$

หา u_{63}

จาก
$$\begin{aligned} u_{63} = u_{3 \times 21} &= u_{22}^3 + u_{21}^3 - u_{20}^3 \\ &= u_{2 \times 11}^3 + u_{3 \times 7}^3 - u_{2 \times 10}^3 \\ &= (u_{12}^2 - u_{10}^2)^3 + (u_8^3 + u_7^3 - u_6^3)^3 \\ &\quad - (u_{11}^2 - u_9^2)^3 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $u_{12} = 144$, $u_{11} = 89$, $u_{10} = 55$, $u_9 = 34$,

$u_8 = 21$, $u_7 = 13$, $u_6 = 8$

ดังนั้น
$$u_{63} = (144^2 - 55^2)^3 + (21^3 + 13^3 - 8^3)^3 - (89^2 - 34^2)^3$$

$$u_{63} = (20736 - 3025)^3 + (9261 + 2197 - 512)^3$$

$$- (7921 - 1156)^3$$

$$= 17711^3 + 10946^3 - 6765^3$$

$$= 5555577996431 + 1311494070536 - 309601747125$$

$$= 6557470319842$$

หา u_{65}

จาก $u_{65} = u_{33+32} = u_{32}^2 + u_{33}^2 = u_{2\times16}^2 + u_{3\times11}^2$

$$= (u_{17}^2 - u_{15}^2)^2 + (u_{12}^3 + u_{11}^3 - u_{10}^3)^2$$

$$= (u_{9+8}^2 - u_{3\times5}^2)^2 + (u_{12}^3 + u_{11}^3 - u_{10}^3)^2$$

$$= \left[(u_8^2 + u_9^2)^2 - (u_6^3 + u_5^3 - u_4^3)^2\right]^2$$

$$+ (u_{12}^3 + u_{11}^3 - u_{10}^3)^2$$

$$= \left[(21^2 + 34^2)^2 - (8^3 + 5^3 - 3^3)^2\right]^2$$

$$+ (144^2 + 89^3 - 55^3)^2$$

$$= \left[(1441 + 1156)^2 - (512 + 125 - 27)^2\right]^2$$

$$+ (2985984 + 704969 - 166375)^2$$

$$= (1597^2 - 610^2)^2 + (3524578)^2$$

$$= (2550409 - 372100)^2 + (3524578)^2$$

$$= (2178309)^2 + (3524578)^2$$

$$= 4745030099481 + 12422650078084$$

เพราะฉะนั้น $u_{65} = 17167680177565$

ดังนั้น $v_{64} = 6557470319842 + 17167680177565$

$= 23725150497407$

3.5 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนฟีโบนักชีกับสัมประสิทธิ์ทวินาม

สำหรับจำนวนฟีโบนักชีใด ๆ สามารถเขียนในรูปผลบวกของสัมประสิทธิ์ทวินาม ดังนี้

พิจารณาสัมประสิทธิ์ทวินามในรูปสามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal's Triangle) ดังต่อไปนี้ ให้ $\binom{k}{i} = \dfrac{k!}{i!\,(k-i)!}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}$$

....

หรือเขียนในรูปตัวเลขจะได้

```
1
1   1
1   2   1
1   3   3   1
1   4   6   4   1
1   5   10  10  5   1
1   6   15  20  15  6   1
.................................
```

ถ้าลากเส้นทะแยงมุมดังภาพ (ทำมุม 45° กับแนวนอน) ผลบวกของจำนวนบนเส้นทะแยงมุมนี้จะเป็นจำนวนฟีโบนักชี

จำนวนบนเส้นทะแยงมุมเส้นแรกเป็น 1 ซึ่งเป็นจำนวนฟีโบนักชีจำนวนแรก

ผลบวกของจำนวนบนเส้นทะแยงมุมเส้นที่ 2 เท่ากับ 1 ซึ่งเป็นจำนวนฟีโบนักชีจำนวนที่ 2

ผลบวกของจำนวนบนเส้นทะแยงมุมเส้นที่ 3 เท่ากับ 1 + 1 = 2 ซึ่งเป็นจำนวนฟีโบนักชีจำนวนที่ 3

จะเป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

พิจารณาจำนวนบนเส้นทะแยงมุมเส้นที่ n - 2 คือ

$$\binom{n-3}{0}, \binom{n-4}{1}, \binom{n-5}{2}, \ldots, \begin{cases} \binom{\frac{n-2}{2}}{\frac{n-4}{2}} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \binom{\frac{n-3}{2}}{\frac{n-3}{2}} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases} \quad ---(1)$$

และจำนวนบนเส้นทะแยงมุมเส้นที่ n-1 คือ

$$\binom{n-2}{0},\ \binom{n-3}{1},\ \binom{n-4}{2},\ldots,\begin{cases}\dbinom{\frac{n-2}{2}}{\frac{n-2}{2}} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่}\\[2ex] \dbinom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่}\end{cases} \qquad \ldots(2)$$

$$(1)+(2),\ \binom{n-2}{0}+\left[\binom{n-3}{0}+\binom{n-3}{1}\right]+\left[\binom{n-4}{1}+\binom{n-4}{2}\right]$$

$$+\ldots+\begin{cases}\left[\dbinom{\frac{n-2}{2}}{\frac{n-4}{2}}+\dbinom{\frac{n-2}{2}}{\frac{n-2}{2}}\right] & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่}\\[2ex] \left[\dbinom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-5}{2}}+\dbinom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}}\right] & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่}\end{cases} \qquad \ldots(3)$$

เนื่องจาก $\binom{n-2}{0} = 1$ และ $\binom{n-3}{0} = 1$

ดังนั้น $\binom{n-2}{0} = \binom{n-3}{0}$

และเพราะว่า $\binom{k}{i}+\binom{k}{i+1} = \binom{k+1}{i+1}$ ....(4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $\binom{n-2}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\ldots+$

$$+\begin{cases}\dbinom{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่}\\[2ex] \dbinom{\frac{n-3}{2}}{\frac{n-3}{2}} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่}\end{cases}$$

เนื่องจาก $\binom{n-2}{0} = 1 = \binom{n-1}{0}$

ดังนั้น $\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots +$

$$+ \begin{cases} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n-2}{2}} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \binom{\frac{n-3}{2}}{\frac{n-3}{2}} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

เป็นผลบวกของจำนวนบนเส้นทะแยงมุมเส้นที่ n

นั่นคือ ผลบวกของจำนวนบนเส้นทะแยงมุมเส้นที่ $n-2$ และเส้นทะแยงมุมเส้นที่ $n-1$ จะเท่ากับผลบวกของจำนวนบนเส้นทะแยงมุมเส้นที่ n

---

<u>ทฤษฎี 3.31</u> $\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-j}{j-1} + \binom{n-j-1}{j} = u_n$

เมื่อ $n > 2$ และ j เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{(n-1)}{2}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $p(n)$ แทนข้อความที่ว่า

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \cdots + \binom{n-j}{j-1} + \binom{n-j-1}{j} = u_n$$

เมื่อ j เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{n-1}{2}$

พิจารณา $p(3)$

เนื่องจาก $\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2$ และ $u_3 = 2$

แสดงว่า $p(3)$ เป็นจริง

พิจารณา $p(4)$

เนื่องจาก $\binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3$ และ $u_4 = 3$

แสดงว่า p(4) เป็นจริง

สมมุติว่า p(n) เป็นจริงทุกค่าของ $n \leq k + 1$

นั่นคือ

$$\binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \dots + \binom{k-j}{j-1} + \binom{k-j-1}{j} = u_k$$

และ

$$\binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{2} + \dots + \binom{k-j+1}{j-1} + \binom{k-j}{j} + \binom{k-j-1}{j+1} = u_{k+1}$$

จะพิสูจน์ว่า p(k+2) เป็นจริง นั่นคือต้องแสดงว่า

$$\binom{k+1}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k-1}{2} + \dots + \binom{k-j+1}{j} + \binom{k-j}{j+1} = u_{k+2}$$

พิจารณา $$u_k + u_{k+1} = \binom{k}{0} + \binom{k-1}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-2}{2} + \dots + \binom{k-j}{j-1} + \binom{k-j}{j} + \binom{k-j-1}{j} + \binom{k-j-1}{j+1}$$

เนื่องจาก $\binom{k-i}{i-1} + \binom{k-i}{i} = \binom{k-i+1}{i}$ และ $u_k + u_{k+1} = u_{k+2}$

เพราะฉะนั้น $$u_{k+2} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k-1}{2} + \binom{k-2}{3} + \dots + \binom{k-j+1}{j} + \binom{k-j}{j+1}$$

และเพราะว่า $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1$

ดังนั้น $$u_{k+2} = \binom{k+1}{0} + \binom{k}{0} + \binom{k-1}{2} + \dots + \binom{k-j+1}{j} + \binom{k-j}{j+1}$$

แสดงว่า $p(k+2)$ เป็นจริง

โดยอาศัยทฤษฎีของอุปนัย จะได้

$p(n)$ เป็นจริงทุก ๆ ค่าของ n

นั่นคือ

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-2}{1}+\binom{n-3}{2}+\cdots+\binom{n-j}{j-1}+\binom{n-j-1}{j}=u_n$$

เมื่อ $n > 2$ และ $j \in I$ ที่ $j \le \frac{n-1}{2}$