บทที่ 4

การประยุกต์ของจำนวนฟีโบนักชี

ในบทนี้จะเป็นการนำจำนวนฟีโบนักชีไปใช้ในการหาจำนวนเฉพาะค่าใหญ่ ๆ โดยอาศัยการทดสอบของลูคัส และใช้หาค่าเศษส่วนต่อเนื่องที่มีส่วนย่อย (partial denominator) เป็นหนึ่งทั้งหมด หรือมีส่วนย่อยหนึ่งจำนวนเป็นสอง และจำนวนอื่นๆ เป็นหนึ่งหมดตลอดจนการนำจำนวนฟีโบนักชีไปสร้างรูปสามเหลี่ยม, สี่เหลี่ยมผืนผ้า รวมทั้งการประมาณค่าความยาวของด้านของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุในวงกลม และอัตราส่วนความยาวของเส้นทะแยงมุมกับความยาวของด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า

4.1 <u>การนำจำนวนฟีโบนักชีไปช่วยในการหาจำนวนเฉพาะ</u>

ในการหาจำนวนเฉพาะที่จะอาศัยการทดสอบของลูคัส ซึ่งลูคัสใช้ซีเควนส์ในการพิสูจน์ทฤษฎีดังนี้

$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m, \ldots$ โดยที่

$$r_m = \alpha^{2^m} + \beta^{2^m} \quad \text{เมื่อ} \quad \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = -\frac{1}{\alpha}$$

โดยนิยาม 3.3 จะได้ว่า $r_m = v_{2^m}$

<u>ทฤษฎี 4.1</u> ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะในรูป $4v + 3$ และ $M = 2^p - 1$

ถ้า $r_{p-1} \equiv 0 \pmod M$ แล้วจะได้ว่า M จะเป็นจำนวนเฉพาะ

เมื่อ $r_m = \alpha^{2^m} + \beta^{2^m}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $r_{p-1} \equiv 0 \pmod M$ จะแสดงว่า M เป็นจำนวนเฉพาะ

โดยสมมุติว่า M เป็นจำนวนประกอบ

โดยทฤษฎี 2.10 จะได้ว่า

$$M = s_1 s_2 \cdots s_r q_1 q_2 q_3 \cdots q_t$$

เมื่อ s_i เป็นจำนวนเฉพาะในรูป 51 ± 1 และ q_i เป็นจำนวน-เฉพาะในรูป 51 ± 2

เนื่องจาก $M = 2^p - 1 = 2^{4v+3} - 1 = 8(16^v) - 1$

เนื่องจาก $16^v \equiv 1 \pmod 5$

โดยทฤษฎี 2.11, ทฤษฎี 2.12 จะได้ $8(16^v) - 1 \equiv 8 - 1 \pmod 5$

ดังนั้น $M \equiv 8 - 1 \equiv 2 \pmod 5$

ดังนั้นจะมี q_i อย่างน้อยหนึ่งตัวที่เป็นตัวหารของ M

จาก $r_{p-1} \equiv 0 \pmod M$

โดยทฤษฎี 2.11 จะได้ว่า $\alpha^{2^{p-1}} r_{p-1} \equiv 0 \pmod M$

เพราะว่า $r_{p-1} = \alpha^{2^{p-1}} + \beta^{2^{p-1}}$ และ $\beta = -\frac{1}{\alpha}$

เพราะฉะนั้น $\alpha^{2^{p-1}} r_{p-1} = \alpha^{2^p} + \alpha^{2^{p-1}} \beta^{2^{p-1}} = \alpha^{2^p} + (\alpha\beta)^{2^{p-1}}$

เนื่องจาก $\alpha\beta = -1$

ดังนั้น $\alpha^{2^p} + (\alpha\beta)^{2^{p-1}} = \alpha^{2^p} + (-1)^{2^{p-1}}$

และเนื่องจาก p อยู่ในรูป $4v + 3$ ดังนั้น 2^{p-1} เป็นเลขคู่เสมอ

เพราะฉะนั้น $(-1)^{2^{p-1}} = 1$

นั่นคือ $\alpha^{2^p} + 1 \equiv 0 \pmod M$

โดยทฤษฎี 2.12 จะได้ $\alpha^{2^p} \equiv -1 \pmod M$

และโดยทฤษฎี 2.15 จะได้ $\alpha^{2^p} \equiv -1 \pmod{q_i}$

โดยทฤษฎี 2.16 จะได้ $\alpha^{2^{p+1}} \equiv 1 \pmod{q_i}$

ดังนั้น ถ้ามีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $\alpha^x \equiv -1 \pmod{q_i}$ แล้ว x

จะต้องเป็นพหุคูณของ 2^p

โดยทฤษฎี 2.20 เมื่อให้ $\lambda = \alpha$ ซึ่ง $\alpha\bar{\alpha} = -1$

จะได้ $\alpha^{q_i+1} \equiv -1 \pmod{q_i}$ เมื่อ q_i เป็นตัวหารของ M

ดังนั้น $q_i + 1$ เป็นพหุคูณของ 2^p

ให้ $q_i + 1 = 2^p k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

หรือ $q_i = 2^p k - 1$ จะเป็นจริงเฉพาะกรณีที่ $k = 1$

ดังนั้น $q_i = 2^p - 1 = M$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานที่ว่า M เป็นจำนวน-ประกอบ (แต่ q_i เป็นจำนวนเฉพาะ)

ดังนั้นที่สมมุติว่า M เป็นจำนวนประกอบ ไม่จริง

แสดงว่า M จะต้องเป็นจำนวนเฉพาะ

นั่นคือถ้า $r_{p-1} \equiv 0 \pmod{M}$ แล้ว M จะเป็นจำนวนเฉพาะ

<u>หมายเหตุ</u> จากทฤษฎี 4.1 นี้ สามารถจะใช้ในการหาค่าเฉพาะค่าใหญ่ ๆ ได้

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า M ในรูป $2^p - 1$ เมื่อ $p = 7$ เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ $p = 7$ นั้น $M = 2^7 - 1 = 127$

เพราะฉะนั้น $r_{p-1} = r_6 = v_{2^6} = v_{64}$

จากตัวอย่างก่อนจะได้ $v_{64} = 23725150497407$

ซึ่ง $23725150497407 = 127 \times 186812208641$

ดังนั้น $v_{64} \equiv 0 \pmod{127}$

หรือ $r_{p-1} \equiv 0 \pmod{127}$

โดยทฤษฎี 4.1 จะได้ 127 เป็นจำนวนเฉพาะ

4.2 <u>การหาค่าเศษส่วนต่อเนื่องโดยอาศัยจำนวนฟีโบนักชี</u>

ในตอนนี้จะกล่าวถึงการนำจำนวนฟีโบนักชีมาช่วยในการหาเศษส่วนต่อเนื่องที่มีส่วนย่อยเป็นหนึ่งทั้งหมด และหาเศษส่วนต่อเนื่องที่มีส่วนย่อยหนึ่งจำนวนซึ่งไม่ใช่สองจำนวนแรกเป็นสอง และจำนวนอื่นเป็นหนึ่ง

โดยจะเริ่มจากความหมายของเศษส่วนต่อเนื่องและทฤษฎีของเศษส่วนต่อเนื่องบางทฤษฎีที่สำคัญ

<u>เศษส่วนต่อเนื่อง</u> (Continued fractions)

พิจารณาเศษส่วนต่อเนื่องในรูป

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}$$

เมื่อ $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ q_0 เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

สามารถเขียนจำนวนเศษส่วน $\frac{a}{b}$ ในรูปเศษส่วนต่อเนื่องได้โดยอาศัย Euclidean algorithm ดังนี้

$$a = bq_0 + r_1 \quad \text{โดยที่} \quad 0 < r_1 < b$$

$$b = r_1q_1 + r_2 \quad \text{โดยที่} \quad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2q_2 + r_3 \quad \text{โดยที่} \quad 0 < r_3 < r_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n \quad \text{โดยที่} \quad 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_nq_n$$

จากบรรทัดแรกจะได้ $\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b}$

หรือ $= q_0 + \cfrac{1}{\frac{b}{r_1}}$

และจากบรรทัดที่ 2 จะได้

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$

จากบรรทัดที่ 3 จะได้ $\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2}$

$$= q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}$$

ทำต่อไปเช่นนี้เรื่อย ๆ จะได้ว่า

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$$

ซึ่ง $q_n > 1$

และแต่ละ $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

<u>สัญลักษณ์</u> เศษส่วนต่อเนื่อง $q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$ เขียนแทนด้วย ω

สำหรับจำนวน $q_0, q_0 + \frac{1}{q_1}, q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}, \ldots, \omega$

นำมาเขียนในรูปเศษส่วนอย่างต่ำได้ดังนี้

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{q_0}{1}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2}}$$

....

$$\frac{P_n}{Q_n} = \omega$$

จะเรียกจำนวน $\frac{P_u}{Q_u}$, $u = 0,1,2,\ldots, n$ นี้ว่าเศษส่วนคอนเวอร์ส (convergent fractions)

และเรียก $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$ ว่าเป็นส่วนย่อย (partial denominators) ของเศษส่วนต่อเนื่อง

<u>ข้อสังเกต</u> ในการเปลี่ยนจาก $\frac{P_k}{Q_k}$ เป็น $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ โดยการแทนที่ q_k ด้วย

$$q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$$

<u>ทฤษฎี 4.2</u> สำหรับเศษส่วนต่อเนื่อง ที่กล่าวมาข้างต้นจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$P_{k+1}Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $p(k)$ แทนข้อความที่ว่า

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1},\ Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}$$

และ $P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1} = (-1)^k$

พิจารณา P(1) จาก $\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0q_1 + 1}{q_1}$

เพราะว่า $(q_0q_1 + 1, q_1) = 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{q_0q_1 + 1}{q_1}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

เพราะฉะนั้น $P_1 = q_0q_1 + 1$ และ $Q_1 = q_1$

จาก $$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}$$

แต่ $q_1 + \frac{1}{q_2} = \frac{q_1q_2 + 1}{q_2}$

ดังนั้น $$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_0(q_1q_2 + 1) + q_2}{q_1q_2 + 1}$$

โดยทฤษฎี 2.9 จะได้ว่า

$$(q_0(q_1q_2+1)+ q_2, q_1q_2+1) = (q_2, q_1q_2 + 1)$$

และโดยทฤษฎี 2.9 จะได้

$$(q_2, q_1q_2 + 1) = (q_2, 1)$$

แต่ $(q_2, 1) = 1$

ดังนั้น $(q_0(q_1q_2 + 1) + q_2, q_1q_2 + 1) = 1$

จะได้ว่า $\frac{q_0(q_1q_2 + 1) + q_2}{q_1q_2 + 1}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

เพราะฉะนั้น $P_2 = q_0(q_1q_2 + 1) + q_2$

และ $q_0(q_1q_2+1)+q_2 = (q_0q_1+1)q_2 + q_0$

แต่ $q_0q_1 + 1 = P_1$ และ $P_0 = q_0$

ดังนั้น $P_2 = P_1q_2 + P_0$

ทำนองเดียวกัน $Q_2 = q_1q_2 + 1$

แต่ $Q_1 = q_1$ และ $Q_0 = 1$

ดังนั้น $Q_2 = Q_1q_2 + Q_0$

เพราะฉะนั้น $P_2Q_1 - P_1Q_2 = \left[q_0(q_1q_2 + 1) + q_2\right] q_1$

$$-\left\{(q_0q_1+ 1)(q_1q_2 + 1)\right\}$$

แต่ $\left[q_0(q_1q_2+1) + q_2\right] q_1 - \left[(q_0q_1 + 1)(q_1q_2 + 1)\right] = -1$

ดังนั้น $P_2Q_1 - P_1Q_2 = (-1)^1$

แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

สมมุติ $P(k)$ เป็นจริง คือ $P_{k+1} = P_kq_{k+1} + P_{k-1}$,

$Q_{k+1} = Q_kq_{k+1} + Q_{k-1}$ และ $P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1} = (-1)^k$

.........(4)

จะพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง นั่นคือต้องแสดงว่า

$P_{k+2} = P_{k+1}q_{k+2} + P_k$, $Q_{k+2} = Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k$ และ

$P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = (-1)^{k+1}$

เนื่องจาก $\dfrac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \dfrac{P_kq_{k+1} + P_{k-1}}{Q_kq_{k+1} + Q_{k-1}}$

ถ้าเราแทน q_{k+1} ด้วย $q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}$ จะได้

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} = \frac{P_k(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}) + P_{k-1}}{Q_k(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}) + Q_{k-1}}$$

แต่ $$\frac{P_k(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}) + P_{k-1}}{Q_k(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}) + Q_{k-1}} = \frac{P_k q_{k+1} q_{k+2} + P_k + P_{k-1} q_{k+2}}{Q_k q_{k+1} q_{k+2} + Q_k + Q_{k-1} q_{k+2}}$$

พิจารณาเฉพาะเศษคือ

$$P_k q_{k+1} q_{k+2} + P_k + P_{k-1} q_{k+2} = P_k q_{k+1}(q_{k+2} + 1)$$
$$- P_k q_{k+1} + P_k + P_{k-1} q_{k+2}$$

ทางขวามือ $P_k q_{k+1}(q_{k+2} + 1) - P_k q_{k+1} + P_k + P_{k-1} q_{k+2}$

$$= (q_{k+2} + 1)(P_k q_{k+1} + P_{k-1})$$
$$- (P_{k-1} + P_k q_{k+1}) + P_k$$

เนื่องจาก $P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1}$

ดังนั้น $(q_{k+2}+1)(P_k q_{k+1}+P_{k-1}) - (P_k q_{k+1}+P_{k-1}) + P_k$

$$= P_{k+1}(q_{k+2}+1) - P_{k+1} + P_k$$

และ $P_{k+1}(q_{k+2}+1) - P_{k+1} + P_k = P_{k+1} q_{k+2} + P_k$

นั่นคือ $P_k q_{k+1} q_{k+2} + P_k + P_{k-1} q_{k+2} = P_{k+1} q_{k+2} + P_k$

ทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$Q_k q_{k+1} q_{k+2} + Q_k + Q_{k-1} q_{k+2} = Q_{k+1} q_{k+2} + Q_k$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} = \frac{P_{k+1}q_{k+2} + P_k}{Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k}$$

ต่อไปจะแสดงว่าทางขวามือเป็นเศษส่วนที่ต่ำสุด โดยการพิสูจน์ว่า ห.ร.ม.ของเศษและส่วนเป็น 1

สมมุติว่า $(P_{k+1}q_{k+2} + P_k, Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k) = d$ ซึ่ง $d > 1$

โดยนิยาม 2.2 ข้อ 2, ทฤษฎี 2.1 และทฤษฎี 2.2

จะได้ $d \mid \left[(P_{k+1}q_{k+2} + P_k)Q_{k+1} - (Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k)P_{k+1}\right]$

แต่จาก (4) จะได้ $P_k Q_{k+1} - P_{k+1}Q_k = (-1)^{k+1}$

นั่นคือ $d \mid 1$ ซึ่งขัดแย้งกับที่สมมุติว่า $d > 1$

แสดงว่า $d = 1$

นั่นคือ $(P_{k+1}q_{k+2} + P_k, Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k) = 1$

ดังนั้น $\dfrac{P_{k+1}q_{k+2} + P_k}{Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

นั่นคือ $P_{k+2} = P_{k+1}q_{k+2} + P_k$

และ $Q_{k+2} = Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k$

โดยที่ $$P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1} + P_kQ_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+1}q_{k+2} - P_{k+1}Q_k$$

แต่ $P_kQ_{k+1} - P_{k+1}Q_k = (-1)^{k+1}$

ดังนั้น $P_{k+2}Q_{k+1} - P_{k+1}Q_{k+2} = (-1)^{k+1}$

แสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอาศัยหลักอุปนัย จะได้ $P(k)$ เป็นจริงทุก ๆ จำนวนเต็มบวก k

นั่นคือ สำหรับทุก ๆ จำนวนเต็มบวก k

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1}, \quad Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}$$

และ $P_{k+1}Q_k - P_kQ_{k+1} = (-1)^k$

<u>ทฤษฎี 4.3</u> ถ้าเศษส่วนต่อเนื่องมีส่วนย่อย (partial denominators) อยู่ n จำนวน และแต่ละจำนวนเป็นหนึ่ง เศษส่วนต่อเนื่องนี้จะเท่ากับ

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ a_n เป็นเศษส่วนต่อเนื่องที่มี $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = 1$

เพราะฉะนั้น $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นเศษส่วนคอนเวอร์ส

ซึ่ง $a_k = \frac{P_k}{Q_k}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \dots, n$

เนื่องจาก $a_1 = \frac{1}{1}$ และ $a_2 = 1 + \frac{1}{1}$

ดังนั้น $P_1 = 1$ และ $P_2 = 2$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$

และจากทฤษฎี 4.2 จะได้

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1}$$

เนื่องจาก $q_k = 1$ ทุก ๆ ค่าของ $k = 1,2,\ldots, n$

ดังนั้น $P_{k+1} = P_k + P_{k-1}$, $k = 2,3,4,\ldots, n-1$

เนื่องจาก $P_1 = 1 = u_2$, $P_2 = 2 = u_3$,

$P_3 = P_2 + P_1 = 3 = u_4$, $P_4 = P_3 + P_2 = 3 + 2 = 5 = u_5$,

$,\ldots$

เพราะฉะนั้น $P_n = u_{n+1}$

ทำนองเดียวกัน จะได้

$Q_1 = 1$, $Q_2 = 1$ และโดยทฤษฎี 4.2 จะได้

$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}$

เนื่องจาก $q_{k+1} = 1$ ทุก ๆ ค่าของ $k = 0,1,2,\ldots,n-1$

ดังนั้น $Q_{k+1} = Q_k + Q_{k-1}$, $k = 2,3,4,\ldots,n-1$

เพราะฉะนั้น $Q_3 = 2 = u_3$, $Q_4 = 3 = u_4, \ldots$

แสดงว่า $Q_n = u_n$

เพราะว่า $a_n = \frac{P_n}{Q_n}$

นั่นคือ $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = a_5$

โดยทฤษฎี 4.3

จะได้ $a_5 = \dfrac{u_6}{u_5}$

และเพราะว่า $u_6 = 8, \; u_5 = 5$

ดังนั้น $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \dfrac{8}{5}$

<u>ทดสอบ</u>

จาก $1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$

$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{3}{2}}}$

$= 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{3}}$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = 1+\frac{1}{\frac{5}{3}}$$

$$= 1+\frac{3}{5}$$

$$= \frac{8}{5}$$

<u>ทฤษฎี 4.4</u> ถ้า ω เป็นเศษส่วนต่อเนื่องที่มีส่วนย่อยเป็น

$q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$ ขณะที่

$q_0 = q_1 = q_2 = \ldots = q_{i-1} = q_{i+1} = \ldots = q_n = 1,$

$q_i = 2 \ (i \neq 0,1)$ แล้ว

$$\omega = \frac{u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1}u_{n-i+1}}$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $a_k = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots + \cfrac{1}{q_k}}}$

เมื่อ $q_1 = q_2 = q_3 = \ldots = q_k = 1$

โดยทฤษฎี 4.3 จะได้

$$a_k = \left. 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1}}} \right\} \text{มีส่วนย่อย } k \text{ จำนวน}$$

$$= \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

ให้ P(i) แทนข้อความที่ว่า ถ้า $\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}}$

เมื่อ $q_0 = q_1 = q_2 = \ldots = q_{i-1} = q_{i+1} = \ldots = q_n = 1,$

$q_i = 2(i \neq 0,1)$

แล้ว $\omega = \dfrac{u_{i+1}u_{n-i+3} + u_iu_{n-i+1}}{u_iu_{n-i+3} + u_{i-1}u_{n-i+1}}$ สำหรับ $n = 0,1,2,\ldots$

พิจารณา P(2)

เนื่องจาก $\omega = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \underbrace{\cfrac{1}{1 + \ddots + \cfrac{1}{1}}}_{\text{มีส่วนย่อย } n-2 \text{ จำนวน}}}}$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-2}}}}$$

เพราะว่า $2 + \dfrac{1}{a_{n-2}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}}$

$$= \frac{2u_{n-1} + u_{n-2}}{u_{n-1}}$$

และ $u_{n-1} + u_{n-2} = u_n,\ u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $2 + \dfrac{1}{a_{n-2}} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n-1}}$

ดังนั้น $$\omega = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{u_{n+1}}{u_{n-1}}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{u_{n-1}}{u_{n+1}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{u_{n+1}}}$$

$$= \frac{u_{n+1} + u_{n-1} + u_{n+1}}{u_{n+1} + u_{n-1}}$$

$$= \frac{2u_{n+1} + u_{n-1}}{u_{n+1} + u_{n-1}}$$

เนื่องจาก $u_1 = u_2 = 1$ และ $u_3 = 2$

ดังนั้น $$\omega = \frac{u_3 u_{n+1} + u_2 u_{n-1}}{u_2 u_{n+1} + u_1 u_{n-1}}$$

แสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

สมมุติว่า $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\omega = \left. 1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-k}}}} \right\} \text{มีส่วนย่อย } k \text{ จำนวน}$$

$$= \frac{u_{k+1} u_{n-k+3} + u_k u_{n-k+1}}{u_k u_{n-k+3} + u_{k-1} u_{n-k+1}}$$

จะพิสูจน์ว่า P(k+1) เป็นจริง นั่นคือต้องแสดงว่า

$$\omega = \left. 1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-k-1}}}} \right\} \text{มีส่วนย่อย } k+1 \text{ จำนวน}$$

$$= \frac{u_{k+2}u_{n-k+2} + u_{k+1}u_{n-k}}{u_{k+1}u_{n-k+2} + u_k u_{n-k}}$$

เนื่องจาก

$$\left. 1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-k-1}}}} \right\} \text{มีส่วนย่อย } k+1 \text{ จำนวน}$$

$$= \left. 1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-k-1}}}} \right\} \text{มีส่วนย่อย } k \text{ จำนวน}$$

และเพราะว่า

$$\left. 1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-k-1}}}} \right\} \text{มีส่วนย่อย } k \text{ จำนวน}$$

$$= \frac{u_{k+1}u_{n-k+2} + u_k u_{n-k}}{u_k u_{n-k+2} + u_{k-1}u_{n-k}}$$

เพราะฉะนั้น

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-k-1}}}}} \Bigg\} \text{ มีส่วนย่อย } k+1 \text{ จำนวน}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{u_{k+1}u_{n-k+2} + u_k u_{n-k}}{u_k u_{n-k+2} + u_{k-1}u_{n-k}}}$$

เนื่องจาก $u_{k+1} + u_k = u_{k+2}$, $u_k + u_{k-1} = u_{k+1}$

และ $$\frac{u_{k+1}u_{n-k+2} + u_k u_{n-k} + u_k u_{n-k+2} + u_{k-1}u_{n-k}}{u_{k+1}u_{n-k+2} + u_k u_{n-k}}$$

$$= \frac{u_{k+2}u_{n-k+2} + u_{k+1}u_{n-k}}{u_{k+1}u_{n-k+2} + u_k u_{n-k}}$$

ดังนั้น

$$1 + \cfrac{1}{1 + \ddots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-k-1}}}} \Bigg\} \text{ มีส่วนย่อย } k+1 \text{ จำนวน}$$

$$= \frac{u_{k+2}u_{n-k+2} + u_{k+1}u_{n-k}}{u_{k+1}u_{n-k+2} + u_k u_{n-k}}$$

แสดงว่า P(k+1) เป็นจริง

โดยอาศัยหลักอุปนัย จะได้ว่า

P(i) เป็นจริงทุกจำนวนเต็ม i และทุก ๆ $n = 0, 1, 2, \ldots$

นั่นคือ $$\omega = \frac{u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1}u_{n-i+1}}$$

__ตัวอย่าง__ จงหาค่าของ $$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}}$$

__วิธีทำ__ ให้ $$\omega = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}}}$$

โดยทฤษฎีที่ 4.4 จะได้

$$\omega = \frac{u_3 u_8 + u_2 u_6}{u_2 u_8 + u_1 u_6}$$

เนื่องจาก $u_1 = u_2 = 1$, $u_3 = 2$, $u_6 = 8$, $u_8 = 21$

ดังนั้น $$\omega = \frac{(2 \times 21) + (1 \times 8)}{(1 \times 21) + (1 \times 8)} = \frac{42 + 8}{21 + 8} = \frac{50}{29}$$

ทดสอบ จาก $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}}}}}$

$$= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{8}{5}}}}$$

$$= 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{21}{8}}}$$

$$= 1+\cfrac{1}{1+\frac{8}{21}}$$

$$= 1+\cfrac{1}{\frac{29}{21}}$$

$$= \frac{29+21}{29}$$

$$= \frac{50}{29}$$

4.3 การนำจำนวนฟีโบนักชีไปสร้างรูปทรงเรขาคณิตและหาความยาวของรูปทรงเรขาคณิตบางรูป

ในตอนนี้จะเป็นการนำจำนวนฟีโบนักชีไปประมาณค่า ความยาวของด้านของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุในวงกลม โดยอาศัยตรีโกณมิติช่วย และการนำจำนวนฟีโบนักชีไปใช้สร้างรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมผืนผ้า แล้วพิจารณาจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่บรรจุในสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวของด้านเป็นจำนวนฟีโบนักชี โดยอาศัยการแบ่งที่เรียกว่า golden section ดังนั้นในหัวข้อนี้จะแบ่งออกเป็นตอนย่อย ๆ 5 ตอนคือ

- ความหมายของ golden section
- การนำจำนวนฟีโบนักชีไปประมาณค่า ความยาวของด้านของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลม
- การนำจำนวนฟีโบนักชีไปประมาณค่า อัตราส่วนความยาวของเส้นทะแยงมุมกับความยาวของด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า
- การพิจารณาจำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่บรรจุในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวของด้านเป็นจำนวนฟีโบนักชี
- การนำจำนวนฟีโบนักชีไปใช้ในการสร้างรูปสามเหลี่ยม

4.3.1 ความหมายของ golden section

ถ้าแบ่งส่วนของเส้นตรง AB ที่ยาว 1 หน่วยออกเป็น 2 ส่วนที่จุด G โดยแต่ละส่วนยาวไม่เท่ากัน และทำให้

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GB}$$ ดังรูป

เรียกการแบ่งแบบนี้ว่า median section หรือ golden section

ในที่นี้ให้ส่วนแบ่งส่วนที่ยาวคือ AG ยาว $= x$ หน่วย

ดังนั้น GB ยาว $= 1 - x$ หน่วย

จาก $\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GB}$ จะได้ $\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x}$

หรือ $x^2 = 1 - x$ ซึ่งสมการนี้มีรากคือ $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ และ $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

พิจารณารากของสมการที่เป็นจำนวนบวกคือ $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

ดังนั้น $\frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ซึ่งเท่ากับ α

หรือ $\frac{x}{1 - x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

ผลจากทฤษฎี 3.2 จะได้ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$

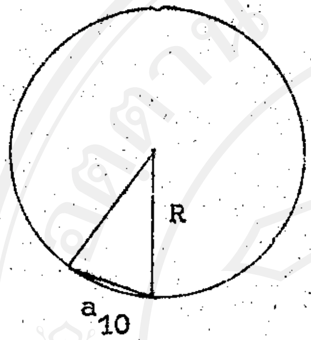
ดังนั้น $\frac{1}{x} = \frac{x}{1 - x} = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

พิจารณารากของสมการที่เป็นจำนวนลบคือ $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ จะได้จุดแบ่ง G_1 อยู่ภายนอกเส้นตรง AB ดังรูป

ซึ่ง $\frac{G_1B}{AB} = \frac{AB}{G_1A} = \alpha = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

4.3.2 การนำจำนวนฟิโบนักชีไปประมาณค่าความยาวของด้านของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุในวงกลม

พิจารณารูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลม ซึ่งมีรัศมี R โดยให้ความยาวของด้านแต่ละด้านเป็น a_{10}



จากกฎของ sine จะได้

$$\frac{a_{10}}{\sin \frac{360^\circ}{10}} = \frac{R}{\sin\left(\frac{10\times180^\circ - 360^\circ}{20}\right)}$$

$$\frac{a_{10}}{\sin 36^\circ} = \frac{R}{\sin 72^\circ}$$

ดังนั้น $a_{10} = R\,\frac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ}$

เนื่องจาก $\sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ$

จะได้ $a_{10} = \frac{R}{2\cos 36^\circ}$

และเพราะว่า $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$

เพราะฉะนั้น $a_{10} = \frac{R}{2(1 - 2\sin^2 18^\circ)}$ ....(1)

แต่ $\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ$

และ $\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ$

ดังนั้น $\cos 18^\circ = 4\sin 18^\circ \cos 18^\circ(1 - 2\sin^2 18^\circ)$

$$1 = 4\sin 18^\circ (1 - 2\sin^2 18^\circ) \quad .....(2)$$

ให้ $\sin 18^\circ = x$

จาก (2) จะได้ $1 = 4x(1 - 2x^2)$

หรือ $8x^3 - 4x + 1 = 0$ ....(3)

$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0$

จะได้รากของ (3) คือ

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}, \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

เพราะว่า $\sin 18^\circ$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า $\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

แสดงว่า

$$a_{10} = \frac{R}{2\left[1 - 2\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{R}{2\left[1 - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{4}\right)\right]}$$

$$= \frac{R}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{R}{\alpha}$$

หรือ $\frac{R}{a_{10}} = \alpha$

ดังนั้นในการแบ่งรัศมีของวงกลมแบบ golden section จะได้ a_{10} เป็นส่วนแบ่งส่วนที่ยาว

และจาก $\alpha = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

ดังนั้น $a_{10} = \frac{u_n R}{u_{n+1}}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาความยาวของด้านของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลมรัศมี 1 หน่วย

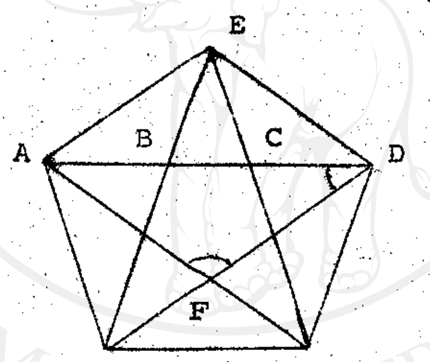
<u>วิธีทำ</u> ในที่นี้ $R = 1$ และเลือก $u_n = 5,\ u_{n+1} = 8$

จะได้ $a_{10} \quad \frac{5}{8} = 0.625$

ดังนั้นความยาวของด้านที่ต้องการประมาณ 0.625 หน่วย

4.3.3 การนำจำนวนฟิโบนักชีไปประมาณค่า อัตราส่วนความยาวเส้นทะแยงมุมกับความยาวของด้านของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่า

พิจารณารูปห้าเหลี่ยมด้านเท่าที่มีเส้นทะแยงมุมเป็นรูปดาว ดังรูป



เนื่องจากมุม $AFD = 108^\circ$ และมุม $ADF = 36^\circ$

จากกฎของ sine จะได้

$$\frac{AD}{AF} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}$$

แต่ $\sin 108^\circ = \sin 72^\circ$

เพราะฉะนั้น $\frac{AD}{AF} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ}$

จะได้ $\frac{AD}{AF} = 2 \cos 36^{\circ}$

เพราะว่า $\cos 36^{\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ และ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{AD}{AF} = \alpha$

เนื่องจาก $AF = AC$

ดังนั้น จะได้ $\frac{AD}{AC} = \alpha$

นั่นคือส่วนของเส้นตรง AD จะถูกแบ่งที่จุด C ตาม golden section

จากนิยามของ golden section จะได้ $\frac{AC}{CD} = \alpha$

และจากรูปจะเห็นได้ว่า $AB = CD$

ดังนั้น $\frac{AC}{AB} = \alpha$

นั่นคือ ส่วนของเส้นตรง AC จะถูกแบ่งที่จุด B ตาม golden section

ตามนิยามของ golden section จะได้ $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC}$

เพราะฉะนั้น $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{AC} = \alpha$

เนื่องจากมุม ACE เท่ากับมุม AEC

จะได้ $AE = AC$

นั่นคือ $\frac{AD}{AE} = \alpha$

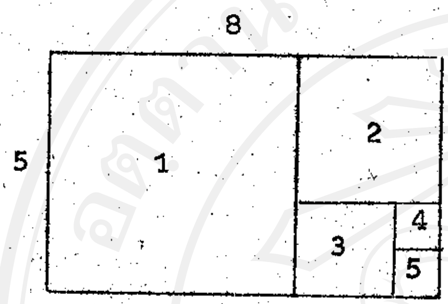
เนื่องจาก $\alpha = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

ดังนั้น $\frac{AD}{AE} = \frac{8}{5}$ หรือ $\frac{13}{8}$

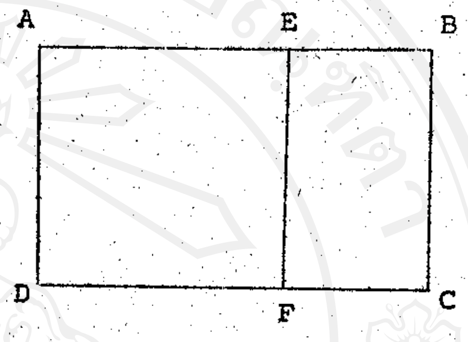
นั่นคือ $\frac{AD}{AE}$ มีค่าประมาณ 1.6 หรือ 1.625

4.3.4 <u>การพิจารณาจำนวนรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่บรรจุในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวของด้านเป็นจำนวนฟิโบนักชี</u>

พิจารณารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวของด้านทั้งสอง เป็นจำนวนฟิโบนักชีสองจำนวนเรียงถัดกันคือ 8, 5 ถ้าแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ของแต่ละรูปมากที่สุด จะได้ดังรูป



รูป ก.



รูป ข.

โดยทฤษฎี 2.3 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$8 = 5(1) + 3$$

จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสหนึ่งรูป ส่วนที่เหลือเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวของด้านเป็น 5 และ 3 ซึ่งเป็นจำนวนฟิโบนักชีสองจำนวนเรียงถัดกันอีก ถ้าทำต่อไปจะได้

$$5 = 3(1) + 2$$

$$3 = 2(1) + 1$$

$$2 = 1(2)$$

จะเห็นได้ว่าผลบวกของจำนวนในวงเล็บคือจำนวนรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดขึ้น ซึ่งมีขนาดต่าง ๆ กัน นั่นคือจำนวนรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ 1 + 1 + 1 + 2=5 รูป (ดังรูป ก)

ถ้าให้ความยาวของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นจำนวนฟีโบนักชีสองจำนวนเรียงถัดกันคือ u_{n+1} และ u_n สามารถแบ่งออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่แต่ละรูปมากที่สุดได้ ซึ่งจำนวนของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดขึ้นหาได้ดังนี้

จากหัวข้อ 4.3.1 ได้ว่า $\alpha = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

นั่นคืออัตราส่วนความยาวของด้านรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่ากับ α

จากรูป ข. จะได้ $\frac{AB}{AD} = \alpha = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

แต่ $AD = AE = EF$ (จากรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส AEFD)

จะได้ $\frac{AB}{AE} = \alpha$

เนื่องจาก
$$\frac{AB - EB}{EB} = \frac{AB}{EB} - 1$$
$$= \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AE}{EB} - 1$$

จะได้ $\frac{AB}{EB} - 1 = \alpha^2 - 1 = \alpha$

ดังนั้น $\frac{EF}{EB} = \frac{AB - EB}{EB} = \frac{AB}{EB} - 1 = \alpha$

นั่นคือส่วนที่เหลือจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีความยาวของด้านทั้งสองเป็นจำนวนฟีโบนักชีสองจำนวนเรียงถัดกันอีก และสามารถทำต่อไปเช่นนี้ได้เรื่อย ๆ จนได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวของด้านเป็น 1 หน่วย

โดยอาศัยทฤษฎี 2.3 จะได้ว่า

$$u_{n+1} = u_n q_1 + u_{n-1}$$
$$u_n = u_{n-1} q_2 + u_{n-2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_4 = u_3 q_{n-2} + u_2$$
$$u_3 = u_2 q_{n-1} + u_1$$
$$u_2 = u_1 q_n$$

ดังนั้นจำนวนรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดขึ้นเท่ากับ

$$q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n$$

จากหัวข้อ 4.2 จะได้ว่า $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ เป็นส่วนย่อยของเศษส่วนต่อเนื่องที่ได้จากการกระจายของ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

นั่นคือ จำนวนรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่เกิดขึ้นจะเท่ากับผลบวกของส่วนย่อยของเศษส่วนต่อเนื่องที่ได้จากการกระจายของ $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีความยาวของด้านเป็นจำนวนฟิโบนักชีสองจำนวนที่ไม่เรียงถัดกันคือ a และ b โดยที่ a > b ถ้าแบ่งรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีพื้นที่ของแต่ละรูปมากที่สุดก็จะได้จำนวนรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับผลบวกของส่วนย่อยของเศษส่วนต่อเนื่องที่ได้จากการกระจาย $\frac{a}{b}$

<u>ข้อสังเกต</u> โดยทั่ว ๆ ไป รูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่นำมาใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น หนังสือ กล่องไม้ขีดไฟ โต๊ะ ตู้ ฯลฯ จะกำหนดจากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านเป็นจำนวนฟีโบนักชี ซึ่งจะทำให้ได้รูปทรงที่สวยงาม เช่น ขนาด 3×5 , 5×8 , 8×13, 13×21, 3×8, 8×21 ฯลฯ

4.3.5 <u>การนำจำนวนฟีโบนักชีมาใช้ในการสร้างรูปสามเหลี่ยม</u>

พิจารณาสามเหลี่ยมที่มีความยาวของด้านทั้ง 3 เป็นจำนวนฟีโบนักชี

จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยม ถ้านำจำนวนฟีโบนักชีสามจำนวนมาเขียนรูปสามเหลี่ยมแล้วอาจจะไม่เกิดสามเหลี่ยมขึ้นได้ ทั้งนี้เพราะผลบวกของความยาวของด้านสองด้านไม่มากกว่าความยาวของด้านที่สาม

ดังนั้นถ้าจะสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวของด้านทั้งสามเป็นจำนวนฟีโบนักชีแล้วจะได้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และสามเหลี่ยมด้านเท่า เท่านั้น

ในที่นี้จึงพิจารณาเฉพาะการสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวของด้านในรูป u_n, u_n, u_{n-k}

พิจารณาค่าของ k

จะเกิดรูปสามเหลี่ยมได้เมื่อ $1 \leq n-k < n+2$

นั่นคือ $-2 < k \leq n-1$ หรือ $-1 \leq k \leq n-1$

ดังตัวอย่าง

k = -1		
u_n	u_n	u_{n+1}
2	2	3
3	3	5
5	5	8
	ฯลฯ	

k = 0		
u_n	u_n	u_n
1	1	1
2	2	2
3	3	3
	ฯลฯ	

k = 1		
u_n	u_n	u_{n-1}
2	2	1
3	3	2
5	5	3
	ฯลฯ	

k = 2		
u_n	u_n	u_{n-2}
3	3	1
5	5	2
8	8	3
	ฯลฯ	

k = 3		
u_n	u_n	u_{n-3}
5	5	1
8	8	2
13	13	3
	ฯลฯ	

k = 4		
u_n	u_n	u_{n-4}
8	8	1
13	13	2
21	21	3
	ฯลฯ	

และสามารถทำต่อไปได้เรื่อย ๆ

<u>ข้อสังเกต</u> ในกรณีที่ $k = 0$ จะได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
