บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

2.1 เซต (Set)

เซตเป็นคำอนิยามใช้ในการกล่าวถึงกลุ่ม,หมู่,พวก ของสิ่งของต่างๆเช่น เซตของนักศึกษาคณะวิทยาศาสตร์ เซตของจำนวนเต็ม จะใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่แทนเซต เรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่าสมาชิกของเซต ใช้อักษรตัวพิมพ์เล็กแทนสมาชิกของเซต

ถ้า A เป็นเซต และ a เป็นสมาชิกของ A แล้วใช้สัญลักษณ์ " $a \in A$ " แทน " a เป็นสมาชิกของ A " ใช้สัญลักษณ์ " $b \notin A$ " แทน " b ไม่เป็นสมาชิกของ A"

การเขียนเซตมี 2 แบบคือ

1. แบบแจกแจงสมาชิก เขียนสมาชิกทุกตัวของเซตลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา และใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัวเช่น

$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ หมายถึง เซตของจำนวนเต็มบวก 1, 2, 3, 4 และ 5

2. แบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต ใช้ตัวแปรแทนสมาชิกในเซต และบรรยายคุณสมบัติของสมาชิกในเซตเป็นข้อความ เช่น $\{x / x^2 = 4\}$ หมายถึงเซตของ $\{2, -2\}$

ชนิดต่างๆของเซต

นิยาม 2.1.1 เซตว่าง (Empty set) คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $\emptyset$ หรือ $\{ \}$

เช่น $\{x/x$ เป็นจำนวนเต็มและ $2x = 3\}$ เป็นเซตว่าง

<u>นิยาม 2.1.2</u> <u>เซตจำกัด</u> (Finite set) คือเซตว่าง หรือเซตที่มีสมาชิก n ตัว เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เช่น $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ มีสมาชิก 6 ตัว

{ก, ข, ค} มีสมาชิก 3 ตัว

<u>หมายเหตุ</u> การเขียนเซตจำกัดที่มีสมาชิกมากๆ ให้เขียนสมาชิก 3, 4 ตัวแรกต่อด้วยจุด 3 จุด ต่อท้ายด้วยสมาชิกตัวสุดท้าย

เช่น $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ มีสมาชิก n ตัว

<u>นิยาม 2.1.3</u> " <u>เซตไม่จำกัด</u> " (Infinite set) คือ เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

เช่น $\{x/x$ เป็นจำนวนเต็มคู่บวก$\}$

<u>หมายเหตุ</u> การเขียนเซตไม่จำกัด ให้เขียนสมาชิกลงไปประมาณ 4, 5 ตัวและต่อท้ายด้วยจุด 3 จุด

เช่น $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

<u>นิยาม 2.1.4</u> ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

1. A เป็น<u>เซตย่อย</u>ของ B (เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$) ก็ต่อเมื่อ

   ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$

เช่น ให้ A คือ เซต $\{1, 2\}$ B คือ เซต $\{1, 2, 3, 4\}$ ฉะนั้น $A \subseteq B$

2. A เท่ากับ B (เขียนแทนด้วย $A = B$) ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

3. A เป็นเซตย่อยแท้ของ B ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตย่อยของ B และ $A \neq B$

เช่น $A = \{0, 2, 3\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ฉะนั้น A เป็นเซตย่อยแท้ของ B

<u>นิยาม 2.1.5</u> " เซตของเซต " (Set of sets)

เซตซึ่งมีสมาชิกเป็นเซตเรียกว่า <u>เซตของเซต</u>

เช่น $K = \{\{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$

<u>นิยาม 2.1.6</u> " เพาเวอร์เซต " (Power set)

ถ้า A เป็นเซตแล้ว เซตของเซตย่อยทั้งหมดของ A

เรียกว่า <u>เพาเวอร์เซตของ A</u> เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P (A)

เช่น A = {3, 4} P (A) = {{3}, {4}, {3, 4}, ∅}

<u>นิยาม 2.1.7</u> " เอกภพสัมพัทธ์ " (Universal set)

ถ้าทุกๆเซตที่กล่าวถึงต่างก็เป็นเซตย่อยของเซตหนึ่งๆ

เรียกเซตนั้นว่า <u>เอกภพสัมพัทธ์</u> แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathcal{U}$

<u>หมายเหตุ</u> ในแต่ละสถานการณ์ เอกภพสัมพัทธ์อาจจะไม่เหมือนกัน ตัวอย่างเช่น ตำราคณิตศาสตร์บางเล่มจะจำกัดขอบเขตอยู่แต่เพียงเซตของจำนวนจริงเท่านั้นขณะที่ตำราอีกเล่มหนึ่งอาจจะขยายขอบเขตของการเป็นเอกภพสัมพัทธ์ในตำราเล่มแรกไปถึงจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งกล่าวได้ว่า เอกภพสัมพัทธ์ของตำราเล่มแรกนั้นคือ เซตของจำนวนจริงทั้งหมด แต่เอกภพสัมพัทธ์ของตำราเล่มที่สองคือ เซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด

ประโยชน์ของการให้นิยามของเอกภพสัมพัทธ์ช่วยให้เราไม่จำเป็นต้องกล่าวถึงขอบเขตของสมาชิกของเซตที่กล่าวถึงบ่อยๆ

<u>นิยาม 2.1.8</u> " ยูเนียน " ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว <u>ยูเนียน</u>ของ A และ B (เขียนแทนด้วย A ∪ B) คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรือ B

เขียนสั้นๆได้เป็น $A \cup B = \{x/x \in A$ หรือ $x \in B\}$

เช่น A = {0, 1, 2} B = {3, 4} A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4}

<u>นิยาม 2.1.9</u> " อินเตอร์เซคชัน " (Intersection)

ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว <u>อินเตอร์เซคชัน</u> ของ A และ B

(เขียนแทนด้วย A ∩ B)คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และ B

เขียนสั้นๆได้เป็น $A \cap B = \{x/x \in A$ และ $x \in B\}$

เช่น A = {a, b, c} B = {b, c, d} A ∩ B = {b, c}

<u>นิยาม 2.1.10</u> " ผลต่าง " (Difference)

ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว <u>ผลต่าง</u>ของ B เทียบกับ A

(เขียนแทนด้วย A - B)คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และไม่อยู่ใน B เขียนสั้นๆได้เป็น

$A - B = \{x/x \in A$ และ $x \notin B\}$

เช่น $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ $A - B = \{1, 2\}$

นิยาม 2.1.11 " คอมพลีเมนต์ " (Complement)

ถ้า $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $A \subseteq \mathcal{U}$ คอมพลีเมนต์ของ A (เขียนแทนด้วย A') คือ $\mathcal{U} - A$ เช่น $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $A = \{1, 2, 3\}$ $A' = \{4, 5, 6, \ldots\}$

หมายเหตุ จะใช้สัญลักษณ์ คอมพลีเมนต์ A' ของ A ได้ก็ต่อเมื่อเป็นที่เข้าใจด้วยกันแล้วว่า เอกภพสัมพัทธ์คืออะไร

นิยาม 2.1.12 เซต A และ B จะเรียกว่าเป็น เซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน (Mutually exclusive sets) ถ้า $A \cap B = \emptyset$

ทฤษฎี 2.1.1 " กฎไอเดมโพเทนต์ " (Idempotent laws)

ถ้า A เป็นเซตแล้ว

1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$

ทฤษฎี 2.1.2 " กฎการสลับที่ " (Commutative laws)

ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

ทฤษฎี 2.1.3 " กฎการจัดหมู่ " (Associative laws)

ถ้า A, B และ C เป็นเซตแล้ว

1. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

ทฤษฎี 2.1.4 " กฎการคงรูป " (Identity laws)

ถ้า A เป็นเซตและ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์แล้ว

1. $A \cup \emptyset = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cap \mathcal{U} = A$
4. $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

<u>ทฤษฎี 2.1.5</u> " กฎคอมพลีเมนต์ " (Complement laws)

ถ้า A เป็นเซตและ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์แล้ว

1. $A \cup A' = \mathcal{U}$
2. $A \cap A' = \phi$
3. $\mathcal{U}' = \phi$
4. $\phi' = \mathcal{U}$

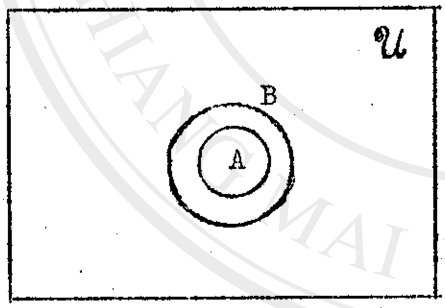
<u>ทฤษฎี 2.1.6</u> " กฎของเดอมอร์กอง " (De Morgan 's laws)

ถ้า A และ B เป็นเซตแล้ว

1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

<u>แผนภาพของวอยลอร์</u> (Euler Venn Diagram)

ความสัมพันธ์ระหว่างเซตและเซตย่อยสามารถแสดงได้โดยแผนภาพที่เรียกว่า - Venn diagram โดยใช้รูปสี่เหลี่ยมแทนเอกภพสัมพัทธ์ ใช้วงกลมแทนเซตต่าง ๆ เช่น $A \subseteq B$ ในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ เขียนแสดงได้ดังนี้



2.2 <u>การจัดลำดับและการจัดหมู่</u> (Permutation and Combination)

" <u>หลักการนับเบื้องต้น</u> " (Fundamental Principle of Counting)

ถ้ามีการกระทำสองอย่างติดต่อกัน การกระทำอย่างแรกมี n_1 วิธี และแต่ละวิธีนั้นทำให้การกระทำอย่างที่สองมี n_2 วิธี ดังนั้นการกระทำอย่างต่อเนื่องกันกระทำได้ $n_1 \times n_2$ วิธี

ในกรณีทั่วไป ถ้ามีการกระทำหลายอย่างเกิดขึ้นติดต่อกันหรือกระทำพร้อมกันการกระทำอย่างแรกมี n_1 วิธี และแต่ละวิธีของการกระทำอย่างแรกนั้นเกิดการกระทำอย่างที่สอง n_2 วิธี และแต่ละวิธีของการกระทำอย่างที่สองเกิดการกระทำอย่างที่สามได้ n_3 วิธี ต่อไปเรื่อยๆ จนถึงการกระทำอย่างที่ k ซึ่งทำได้ n_k วิธี ฉะนั้นการกระทำ k อย่างติดต่อกันนี้ จะมีวิธีกระทำได้ถึง $n_1 \times n_2 \cdot \cdot \cdot \times n_k$ วิธี

<u>ตัวอย่าง 2.2.1</u> การเดินทางจากตำบล ก ไปยังตำบล ข ไปได้ 3 ทางและจากตำบล ข มีทางไปตำบล ค ได้ 5 ทางอยากทราบว่าจากตำบล ก ไปตำบล ค โดยผ่านตำบล ข ได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> จากตำบล ก ไปยังตำบล ข จะได้ 3 ทางและไปยังตำบล ค ได้ 5 ทาง ฉะนั้นออกจากตำบล ก ผ่านตำบล ข ถึงตำบล ค ได้ $3 \times 5 = 15$ วิธี

<u>นิยาม 2.2.1</u> " การจัดลำดับ " (Permutation)

คือ การนำของที่แตกต่างกัน n สิ่งมาเรียงลำดับกัน r สิ่ง ($r \leq n$) โดยถือลำดับเป็นสำคัญ เรียกว่า <u>การจัดลำดับ</u>ของของ n สิ่งคราวละ r สิ่ง

<u>ตัวอย่าง 2.2.2</u> มีเลข 5 ตัว 1, 2, 3, 4, 5 นำมาจัดลำดับคราวละ 3 ตัวจะจัดได้เป็น 1 2 3, 1 3 2, 2 3 4, 3 4 5, 2 4 3, . . .

<u>ทฤษฎี 2.2.1</u> มีของ n สิ่งที่แตกต่างกันนำมาจัดลำดับคราวละ r สิ่ง ($r \leq n$) จะกระทำได้ ${}^nP_r$ วิธีซึ่ง

$$ {}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdot\cdot\cdot(n-r+1) $$

การพิสูจน์ อาศัยหลักการนับเบื้องต้น

<u>ตัวอย่าง 2.2.3</u> มีเลข 5 ตัวคือ 1, 2, 3, 4 และ 5 นำมาจัดลำดับคราวละ 3 ตัว จะจัดลำดับได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> $n = 5, \quad r = 3,$

วิธีที่จะจัดได้ทั้งหมด $= {}^nP_r = {}^5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$ วิธี

<u>ทฤษฎี 2.2.2</u> ถ้ามีของ n สิ่ง แบ่งเป็น k ชนิด แต่ละชนิดเหมือนกันมีจำนวน $n_1, n_2, \ldots, n_k$ สิ่ง ตามลำดับ นำมาจัดลำดับคราวละทั้งหมด กระทำได้

$$\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \ldots\ n_k!} \text{ วิธี}$$

<u>พิสูจน์</u> สิ่งของทั้งหมด n สิ่ง แบ่งเป็น k ชนิด

ชนิดที่ 1 ซึ่งเหมือนกันมีจำนวน n_1 สิ่ง

ชนิดที่ 2 ซึ่งเหมือนกันมีจำนวน n_2 สิ่ง

.
.
.

ชนิดที่ k ซึ่งเหมือนกันมีจำนวน n_k สิ่ง

โดยที่ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ นำมาจัดลำดับทั้งหมด

สมมติว่าจัดลำดับสิ่งของ k ชนิดได้ x วิธี ซึ่งจะพบว่า

ชนิดที่ 1 สิ่งของที่เหมือนกัน n_1 สิ่ง ถ้าไม่เหมือนกันจะจัดลำดับได้ $n_1!$ วิธี

ชนิดที่ 2 สิ่งของที่เหมือนกัน n_2 สิ่ง ถ้าไม่เหมือนกันจะจัดลำดับได้ $n_2!$ วิธี

....

ชนิดที่ k สิ่งของที่เหมือนกัน n_k สิ่ง ถ้าไม่เหมือนกันจะจัดลำดับได้ $n_k!$ วิธี

ดังนั้นสิ่งของทั้งหมดถ้าไม่เหมือนกันจะจัดลำดับได้

$$x \cdot n_1!\ n_2!, \ldots n_k! \text{ วิธี}$$

แต่ถ้าคิดจากสิ่งของทั้งหมด n สิ่ง (k ชนิด) ถ้าไม่เหมือนกันจะจัดลำดับได้ n! วิธี

ดังนั้น $X\, n_1!\, n_2!\, n_3! \ldots n_k! = n!$

$$X = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

ตัวอย่าง 2.2.4 มีธง 8 ผืน สีแดง 2 ผืน สีขาวและสีน้ำเงินอย่างละ 3 ผืน อยากทราบว่าจะมีการส่งสัญญาณธงสีได้กี่วิธี โดยเอาธงเหล่านั้นผูกติดกับเชือกในแนวดิ่ง

วิธีทำ มีธงทั้งหมด 8 ผืน ที่ซ้ำกันคือสีแดง 2 ผืน สีขาวและสีน้ำเงินอย่างละ 3 ผืน

ดังนั้นสลับที่เป็นสัญญาณต่าง ๆ ได้ $\frac{8!}{2!\ 3!\ 3!} = 560$ วิธี

นิยาม 2.2.2 "การจัดหมู่" (Combination)

คือการนำของที่แตกต่างกัน n สิ่ง มาจัดกลุ่ม (โดยไม่ถือการสลับที่เป็นสำคัญ) คราวละ r สิ่ง เรียกว่าการจัดหมู่ ของของ n สิ่ง คราวละ r สิ่ง

ตัวอย่าง 2.2.5 มีคน 5 คน ก ข ค ง จ นำมาจัดหมู่คราวละ 3 คน จะจัดได้เป็น กขค กขง กขจ ขคง ขคจ ...

ทฤษฎี 2.2.3 มีของ n สิ่ง นำมาจัดหมู่คราวละ r สิ่ง จะกระทำได้ $\binom{n}{r} = {}^{n}c_{r}$ วิธี โดยที่ ${}^{n}c_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$

พิสูจน์ นำสิ่งของมาจัดหมู่ที่ละ r สิ่งจากทั้งหมด n สิ่ง สมมติมีวิธีที่จะจัดได้ทั้งหมด X วิธี ดังนั้น $\binom{n}{r} = X$

ถ้านำแต่ละวิธีของการจัดหมู่มาจัดลำดับในแต่ละวิธีนั้น จะสลับที่กันได้อีก $r!$ วิธี

ดังนั้นการจัดลำดับจะจัดได้ทั้งหมด $r!\,X$ วิธี

แต่การจัดลำดับของคราวละ r สิ่งจากของ n สิ่งมี ${}^{n}p_{r}$ วิธี

ดังนั้น $^{n}p_{r} = r!\ X$

$$X = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

$$^{n}c_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\ r!}$$

<u>ตัวอย่าง 2.2.6</u> มีคน 5 คนคือ ก ข ค ง และ จ นำมาจัดหมู่คราวละ 3 คน จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี

จะจัดหมู่ได้ทั้งหมด $= {}^{5}c_{3} = \frac{5!}{(5-3)!\ 3!} = 10$ วิธี

<u>ทฤษฎี 2.2.4</u> ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

เป็นการกระจายการยกกำลังที่เป็นจำนวนเต็มบวกของจำนวน 2 จำนวน ให้เป็นผลบวกของพจน์ต่าง ๆ ดังนี้

$$(a+b)^{n} = \binom{n}{0}a^{n} + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^{2} + \dots + \binom{n}{n}b^{n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}\ b^{k}$$

การพิสูจน์ใช้วิธีอุปมัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)

<u>ตัวอย่าง 2.2.7</u> จงกระจาย $(x+3y)^{5}$ ในรูปผลบวกของพจน์ต่าง ๆ

$$(x+3y)^{5} = \binom{5}{0}x^{5}(3y)^{0} + \binom{5}{1}x^{4}(3y) + \binom{5}{2}x^{3}(3y)^{2} + \binom{5}{3}x^{2}(3y)^{3}$$

$$+ \binom{5}{4}x(3y)^{4} + \binom{5}{5}x^{0}(3y)^{5}$$

$$= x^{5} + 15x^{4}y + 90x^{3}y^{2} + 270x^{2}y^{3} + 405xy^{4} + 243y^{5}$$

2.3 ความน่าจะเป็น (Probability)

ในการศึกษาเรื่องความน่าจะเป็นที่จะกล่าวต่อไปนี้ จะอาศัยความรู้ต่าง ๆ เรื่องเซตมาอธิบายคำต่าง ๆ ในเรื่องความน่าจะเป็น

ในการกระทำอย่างใดอย่างหนึ่ง ถ้าผลจากการกระทำนั้นสามารถรู้ล่วงหน้าว่าจะเกิดเหตุการณ์ต่าง ๆ อย่างใด ก็ไม่จำเป็นต้องใช้ความน่าจะเป็นเพราะความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อย่างหนึ่งจะมีความหมายก็ต่อเมื่อยังไม่ทราบว่าเหตุการณ์จะเกิดขึ้นมากน้อยอย่างไรหรือไม่

ก่อนที่จะศึกษาเรื่องความน่าจะเป็นขอแนะนำให้รู้จักกับคำบางคำที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นดังนี้

นิยาม 2.3.1 "การทดลองสุ่ม" (Random experiment) คือการกระทำที่เราไม่สามารถทำนายผลลัพธ์ล่วงหน้า

ตัวอย่าง 2.3.1 ทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก สังเกตุจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ซึ่งอาจเป็นหน้า 1,2,3,4,5 หรือ 6 แต่เราไม่สามารถทราบได้ว่าลูกเต๋าจะหงายหน้าอะไรแน่ใน 6 หน้านี้ การทดลองเช่นนี้เรียกว่า การทดลองสุ่ม

นิยาม 2.3.2 "แซมเปิลสเปซ" (Sample space)

ถ้า $S = \{X_\lambda , \lambda \varepsilon I\}$ สำหรับ index set I เซตหนึ่งเป็นกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองอย่างหนึ่งแล้วเรียกเซต S ว่าเป็น แซมเปิลสเปซ ของการทดลองสุ่มนั้น และเรียกสมาชิกของแซมเปิลสเปซ S ว่า จุดตัวอย่าง (sample point) ของการทดลองสุ่ม

หมายเหตุ ในกรณีที่แซมเปิลสเปซ S เป็นอันเคาเทเบิล (uncountable) จะยังไม่กล่าวในที่นี้

ตัวอย่าง 2.3.2 จากตัวอย่าง 2.3.1 แซมเปิลสเปซ S เป็น $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ จุดตัวอย่างคือ 1,2,3,4,5 และ 6

ตัวอย่าง 2.3.3 ในการเลือกจำนวนเต็มบวกหนึ่งตัวจากจำนวนเต็มบวกทั้งหมด จะมีแซมเปิลสเปซเป็น $S = \{1,2,3,\ldots\}$ จุดตัวอย่างคือ 1,2,3,...

นิยาม 2.3.3 "ฟิลด์" (field) เรียกเซต $\mathcal{F}$ ของเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ เซตหนึ่งว่าเป็นฟิลด์ของ $\mathcal{U}$ ถ้าสอดคล้องตามคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\mathcal{F}$ ไม่เป็นเซตว่าง
2. ถ้า A อยู่ใน $\mathcal{F}$ แล้ว A' อยู่ใน $\mathcal{F}$ ด้วย
3. ถ้า $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ แล้ว $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$ ด้วย

หมายเหตุ จะเห็นว่าแต่ละฟิลด์ $\mathcal{F}$ ของ $\mathcal{U}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ และ $\emptyset \in \mathcal{F}$

ตัวอย่าง 2.3.2 ให้ $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathcal{U}\}$ จะได้ $\mathcal{F}$ เป็นฟิลด์

นิยาม 2.3.4 "ซิกมา-ฟิลด์" (σ- field) เรียกเซต $\mathcal{F}$ ของเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ เซตหนึ่งว่าเป็นซิกมา-ฟิลด์ของ $\mathcal{U}$ ถ้า $\mathcal{F}$ มีคุณสมบัติเป็นฟิลด์ และมีคุณสมบัติเพิ่มคือ ถ้า $A_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$ แล้ว $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ ด้วย

ตัวอย่าง 2.3.3 ให้ $\mathcal{F} = P(N)$ โดยที่ N เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ดังนั้นจะได้ว่า $\mathcal{F}$ เป็นซิกมา-ฟิลด์

หมายเหตุ 1. ถ้าแฟมมิลี่ $\{\mathcal{F}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ ของซิกมา-ฟิลด์ของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ โดยที่ $\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ จะเป็นซิกมา-ฟิลด์ของ $\mathcal{U}$ ด้วย เรียก $\mathcal{F}$ นี้ว่าเป็นซิกมา-ฟิลด์ที่ generated โดยแฟมมิลี่ $\{\mathcal{F}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$

2. ให้ $\mathcal{C}$ เป็นแฟมมิลี่ของเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ และให้ $\{\mathcal{F}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ เป็นแฟมมิลี่ของซิกมา-ฟิลด์ของ $\mathcal{U}$ ที่ $\Lambda \neq \emptyset$ และ $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_\lambda$ ทุก ๆ $\lambda \in \Lambda$ ดังนั้นซิกมา-ฟิลด์ $\mathcal{F}$ ที่ generated โดยแฟมมิลี่ $\{\mathcal{F}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ จะเป็นซิกมา-ฟิลด์ที่เล็กที่สุดที่มี $\mathcal{C}$ เป็นเซตย่อย เราจึงเรียกซิกมา-ฟิลด์ $\mathcal{F}$ ว่าเป็นซิกมา-ฟิลด์ที่ generated โดย $\mathcal{C}$

3. พิจารณาเซต R ของจำนวนจริงทั้งหมด ให้นิยาม $\mathcal{B}$ ว่าเป็นซิกมา-ฟิลด์ของ R ที่ generated โดย แฟมมิลี่ของช่วงเปิดทั้งหมดของ R ($\mathcal{B}$ มีจริงโดยข้อ 2 ข้างบน) เรียกสมาชิกของ $\mathcal{B}$ ว่า Borel set

โดยนิยามของซิกมา-ฟิลด์ จะเห็นว่าทุก ๆ ช่วงในลักษณะใดลักษณะหนึ่งต่อไปนี้เป็น Borel set (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$, $[a,b]$, $(-\infty,b)$, $(-\infty, b]$, (a,∞) และ $[a,\infty)$

<u>นิยาม 2.3.5</u> "ความน่าจะเป็น" (probability)

<u>ความน่าจะเป็น</u> P ของซิกมา-ฟิลด์ $\mathcal{F}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathcal{F}$ ไปยัง R เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด ($P : \mathcal{F} \to R$) ซึ่งสอดคล้องตามคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $P(A) \geq 0$, $A \in \mathcal{F}$
2. $P(\mathcal{U}) = 1$
3. $P(\cup A_j) = \Sigma P(A_j)$ ถ้า $\{A_j\} \subseteq \mathcal{F}$ โดยที่ A_i, A_j เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันสำหรับ $i \neq j$

ถ้า P เป็นความน่าจะเป็นของซิกมา-ฟิลด์ $\mathcal{F}$ แล้ว เรียกสมาชิกของ $\mathcal{F}$ ว่าเหตุการณ์ (events) ภายใต้ P

เพื่อความสะดวกในบางครั้งเราอาจจะพูดถึงเหตุการณ์โดยละความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องไว้

<u>ตัวอย่าง 2.3.4</u> จากตัวอย่าง 2.3.1 แซมเปิลสเปซ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ของการโยนลูกเต๋า 1 ลูก พิจารณาซิกมา-ฟิลด์ $\mathcal{F} =$ เพาเวอร์เซตของ S สำหรับแต่ละ $A \in \mathcal{F}$

ให้ $P(A) = \dfrac{\text{จำนวนสมาชิกใน } A}{6}$

ดังนั้นจะเห็นว่า P เป็นความน่าจะเป็นของ $\mathcal{F}$ และทุก ๆ เซตย่อย A ของ S จะเป็นเหตุการณ์ภายใต้ P

<u>ตัวอย่าง 2.3.5</u> ในตัวอย่างนี้สมมติว่าเหรียญ ๆ หนึ่ง ซึ่งเมื่อเหรียญนี้ถูกโยนไปแล้วจะมีอยู่ครั้งหนึ่งเสมอที่จะเกิดหัว

ให้ $S = \{1,2,3,\ldots\}$ เป็นแซมเปิลสเปซของครั้งที่ n (โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก) ของการเกิดหัวครั้งแรกของการโยนเหรียญ 1 เหรียญ

ให้ $\mathcal{F} =$ เพาเวอร์เซตของ S สำหรับทุก ๆ $n \in S$ ให้ $P(\{n\}) = \dfrac{1}{2^n}$

ดังนั้น P เป็นความน่าจะเป็นของ $\mathcal{F}$ และแต่ละเซตย่อย A ของ S เป็นเหตุการณ์ภายใต้ P

<u>หมายเหตุ</u> 1. สำหรับตัวอย่างที่ซิกมา-ฟิลด์ $\mathcal{F}$ ไม่ใช่เพาเวอร์เซตของเอกภพสัมพัทธ์นั้น จะยังไม่ขอกล่าวในที่นี้

2. จากตัวอย่าง 2.3.4 และตัวอย่าง 2.3.5 จะเห็นว่าเรามีโอกาสเลือกความน่าจะเป็นของซิกมา-ฟิลด์หนึ่งได้มากกว่า 1 วิธี แต่ในทางปฏิบัติเราจะสนใจเฉพาะความน่าจะเป็นที่เราสามารถนำไปประยุกต์ในทางสถิติได้ หมายความว่าในแต่ละแซมเปิลสเปซ S นั้นเราจะพิจารณาความน่าจะเป็น P ที่เหมาะสม ดังจะได้พบเห็นต่อไป

<u>ทฤษฎี 2.3.1</u> ถ้า ϕ เป็นเซตว่างแล้ว $p(\emptyset) = 0$

จาก $\mathcal{U} = \mathcal{U} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \ldots$

$$p(\mathcal{U}) = p(\mathcal{U}) + p(\emptyset) + p(\emptyset) + \ldots$$

$$1 = 1 + p(\emptyset) + p(\emptyset) + \ldots$$

ดังนั้น $p(\emptyset) = 0$

<u>ทฤษฎี 2.3.2</u> $0 \leq p(E) \leq 1$ เมื่อ $E \in \mathcal{F}$ เป็นจริงตามนิยาม 2.3.5

<u>ทฤษฎี 2.3.3</u> $p(E') = 1 - p(E)$ เมื่อ $E \in \mathcal{F}$

จาก $E \cup E' = \mathcal{U}$

$$p(E \cup E') = p(\mathcal{U})$$

$$p(E) + p(E') = 1$$

$$p(E') = 1 - p(E)$$

<u>ทฤษฎี 2.3.4</u> ถ้า E_1, E_2 เป็นสมาชิกของ $\mathcal{F}$ และ $E_1 \subseteq E_2$ แล้ว $p(E_2 - E_1) = p(E_2) - p(E_1)$

$$E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1)$$

$$p(E_2) = p_1(E_1 \cup (E_2 - E_1))$$

$$= p(E_1) + p(E_2 - E_1)$$

เพราะว่า $E_1, E_2 - E_1$ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

ดังนั้น $p(E_2 - E_1) = p(E_2) - p(E_1)$

<u>บทแทรก 2.3.1</u> ถ้า $E_1 \subseteq E_2$ แล้ว $p(E_1) \leq p(E_2)$

เมื่อ $E_1 \subseteq E_2$ จะได้ $E_2 = E_1 + (E_2 - E_1)$

$$p(E_2) = p(E_1) + p(E_2 - E_1)$$

ดังนั้น $p(E_1) \leq p(E_2)$

<u>ทฤษฎี 2.3.5</u> ถ้า E_1, E_2 เป็นสมาชิกใด ๆ ใน $\mathcal{F}$ จะได้

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

จาก $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1 \cap E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2 - (E_1 \cap E_2))$$
$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

<u>บทแทรก 2.3.2</u> ถ้า E_1, E_2 เป็นเหตุการณ์ใน $\mathcal{F}$ ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันแล้ว

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

<u>ทฤษฎี 2.3.6</u> ให้ P เป็นความน่าจะเป็นของซิกมา-ฟิลด์ $\mathcal{F}$ ของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$

1. ถ้า $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ โดยที่ $A_n \varepsilon \mathcal{F}$ ทุก ๆ $n \geq 1$ ดังนั้น

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

2. ถ้า $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ โดยที่ $A_n \varepsilon \mathcal{F}$ ทุก ๆ $n \geq 1$ ดังนั้น

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

<u>พิสูจน์</u>

1. $$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - A_2) + \ldots + P(A_n - A_{n-1}) + \ldots$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left[P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - A_2) + \ldots + P(A_n - A_{n-1}) \right]$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left[P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) + P(A_3) - P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_{n-1}) \right]$$

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

2. ถ้า $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ โดยที่ $A_n \in \mathcal{F}$ ทุก ๆ $n \geq 1$ ดังนั้นจะได้ $A_1' \subset A_2' \subset A_3' \subset \dots \subset A_n' \subset \dots$

จากข้อ 1

ได้ว่า
$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n') = \lim_{n \to \infty} P(A_n')$$

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)' = \lim_{n \to \infty} P(A_n')$$

$$1 - P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \left[1 - P(A_n) \right]$$

ดังนั้น จะได้
$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

2.4 <u>ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข</u> (Conditional probability)

<u>นิยาม 2.4.1</u> ให้ P เป็นความน่าจะเป็นของซิกมา-ฟิลด์ $\mathcal{F}$ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B ภายใต้ P ภายในเหตุการณ์ A ที่กำหนดให้ โดยที่ $P(A) > 0$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(B/A)$ กำหนดดังนี้

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

<u>ตัวอย่าง 2.4.1</u> หยิบไพ่ 2 ใบจากไพ่ทั้งสำรับ โดยหยิบทีละใบแบบไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ไพ่หน้า K ทั้ง 2 ใบ

<u>วิธีทำ</u> ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ K ในการหยิบครั้งแรก

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ K ในการหยิบครั้งที่ 2

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ K ทั้ง 2 ใบคือ $P(A \cap B)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

<u>ทฤษฎี 2.4.1</u> ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ภายใต้ความน่าจะเป็น P ดังนั้น

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots$$
$$\ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-1})$$

การพิสูจน์อาศัยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

<u>ตัวอย่าง 2.4.2</u> แดงหยิบไพ่ 3 ใบจากไพ่ทั้งสำรับทีละใบ โดยไม่ใส่คืน หาความน่าจะเป็นที่เขาจะหยิบไพ่ได้ดอกจิกในการหยิบครั้งที่หนึ่ง ได้โพแดงในการหยิบครั้งที่สอง และได้โพดำในการหยิบครั้งที่สาม

<u>วิธีทำ</u> ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ดอกจิก ในการหยิบครั้งที่หนึ่ง

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพแดง ในการหยิบครั้งที่สอง

A_3 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพดำ ในการหยิบครั้งที่สาม

ต้องการหา $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2)$$

$$= \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} \cdot \frac{13}{50}$$

$$= \frac{169}{10200}$$

<u>นิยาม 2.4.2</u> เหตุการณ์ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ ภายใต้ความน่าจะเป็น P ของซิกมา-ฟิลด์หนึ่งของแซมเปิลสเปซ S เรียกว่าเป็น<u>พาร์ทิชัน</u> (partition) ถ้า

ก. $P(B_i) > 0$ สำหรับทุก ๆ i

ข. $B_i \cap B_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

ค. $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

<u>ตัวอย่าง 2.4.3</u> ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก สังเกตจำนวนแต้มบนหน้าที่ลูกเต๋าหงาย ได้ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ถ้า B_1, B_2, B_3 เป็นเหตุการณ์ ซึ่ง $B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3\}$, $B_3 = \{4,5,6\}$ จะเห็นว่า B_1, B_2, B_3 เป็นพาร์ทิชันของ S ถ้า C_1 และ C_2 เป็นเหตุการณ์ซึ่ง $C_1 = \{1,2,3,4\}$ $C_2 = \{4,5,6\}$

จะเห็นว่า C_1 และ C_2 ไม่เป็นพาร์ทิชันของ S

<u>ทฤษฎี 2.4.2</u> ถ้า A เป็นเหตุการณ์ภายใต้ความน่าจะเป็น P ของซิกมา-ฟิลด์หนึ่งของแซมเปิลสเปซ S และ $B_1, B_2, \ldots, B_k$ เป็นพาร์ทิชันของ S แล้ว

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)+\ldots+ P(B_k)\ P(A/B_k)$$

<u>พิสูจน์</u>

เพราะว่า $S = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$ และ $A \subseteq S$

ดังนั้น $A = A \cap S = A \cap (B_1 \cup \ldots \cup B_k)$

หรือ $A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_k \cap A)$

เพราะว่า $B_i \cap B_j = \emptyset$ เมื่อ $i \neq j$

เพราะฉะนั้น $B_1 \cap A,\ B_2 \cap A,\ \ldots\ B_k \cap A$

เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

ดังนั้น $P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_k \cap A)$

แต่ $P(B_1 \cap A) = P(B_1)\ P(A/B_1)$

$P(B_2 \cap A) = P(B_2)\ P(A/B_2)$

$\vdots$

$P(B_k \cap A) = P(B_k)\ P(A/B_k)$

ฉะนั้น $P(A) = P(B_1)\ P(A/B_1) + P(B_2)\ P(A/B_2) + \ldots +$

$P(B_k)\ P(A/B_k)$

<u>ทฤษฎี 2.4.3</u> " (Baye's Formula) "

ให้ P เป็นความน่าจะเป็นของซิกมา-ฟิลด์หนึ่งของแซมเปิลสเปซ S ถ้า $B_1, B_2, \ldots, B_n$ เป็นพาร์ทิชันของแซมเปิลสเปซ S ซึ่ง $P(B_i) \neq 0$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots, n$ และ A เป็นเหตุการณ์ภายใต้ P ซึ่ง $P(A) \neq 0$ จะได้ว่า

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)}, \quad k = 1,2,3,\ldots, n$$

หรือเขียนใหม่ได้ว่า

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k)\ P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A/B_i)}, \quad k = 1,2,\ldots, n$$

<u>พิสูจน์</u> เมื่อ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ เป็นพาร์ทิชันของ S

ฉะนั้น $B_i \cap B_j = \emptyset$ สำหรับ $i \neq j$

แสดงว่า $(B_1 \cap A), (B_2 \cap A), \ldots, (B_n \cap A)$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup \ldots \cup (B_n \cap A)$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + \ldots + P(B_n \cap A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)$$

จากนิยาม 2.4.1 $P(B_k/A) = \dfrac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$

ฉะนั้น $P(B_k/A) = \dfrac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)}$, $k = 1,2,\ldots, n$

แต่ $P(B_i \cap A) = P(B_i)\ P(A/B_i)$

ดังนั้น $P(B_k/A) = \dfrac{P(B_k)\ P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A/B_i)}$, $k = 1,2,\ldots,n$

<u>ตัวอย่าง 2.4.4</u> โรงงานแห่งหนึ่งมีเครื่องจักร 3 เครื่อง A,B,C ซึ่งสามารถผลิตสินค้าได้ 50%, 30% และ 20% ตามลำดับของปริมาณสินค้าทั้งหมดที่ผลิตจากโรงงานแห่งนี้ เปอร์เซนต์ของสินค้าที่พบข้อบกพร่องซึ่งผลิตโดยเครื่องจักรทั้งสาม คือ 3% 4% และ 5% ตามลำดับ ถ้าเลือกสินค้ามาชิ้นหนึ่งโดยวิธีสุ่ม และพบว่าสินค้านั้นมีข้อบกพร่อง จงหาความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นนั้นผลิตโดยเครื่องจักร A

ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ (จุดตัวอย่าง) ที่ผลิตโดยเครื่องจักร A

B_1 เป็นเหตุการณ์ (จุดตัวอย่าง) ที่ผลิตโดยเครื่องจักร B

C_1 เป็นเหตุการณ์ (จุดตัวอย่าง) ที่ผลิตโดยเครื่องจักร C

D เป็นเหตุการณ์ ที่สินค้ามีข้อบกพร่อง ต้องการหา $P(A_1/D)$

จาก $P(A_1/D) = \dfrac{P(A_1)\,P(D/A_1)}{P(A_1)P(D/A_1)+P(B_1)P(D/B_1)+P(C_1)P(D/C_1)}$

$$= \frac{(0.5)(0.03)}{(0.5)(0.03)+(0.3)(0.04)+(0.2)(0.05)}$$

$$= \frac{15}{37}$$

2.5 <u>เหตุการณ์อิสระ</u> (Independent events)

<u>นิยาม 2.5.1</u> A และ B จะเรียกว่า<u>เหตุการณ์อิสระ</u> ก็ต่อเมื่อ

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

<u>ตัวอย่าง 2.5.1</u> จากตัวอย่าง 2.3.1 มีแซมเปิลสเปซ S เป็น $\{1,2,3,4,5,6\}$ ให้ $A = \{2,4,6\}$, $B = \{2,5\}$, $C = \{2,4,5\}$

$P(A \cap B) = P(2) = \frac{1}{6}$

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

ดังนั้น $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$

$P(A \cap C) = P(2,4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A) = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap C) \neq P(A)\,P(C)$

ดังนั้นเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์อิสระ ในขณะที่เหตุการณ์ A และ C ไม่ใช่เหตุการณ์อิสระ

<u>นิยาม 2.5.2</u> เหตุการณ์ A_j, $j = 1,2,\ldots, n$ จะเรียกว่า mutually independence ก็ต่อเมื่อ $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$ และจะเรียกว่า pair wise independent ถ้า $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j), i \neq j$

<u>ตัวอย่าง 2.5.2</u> ให้ $S = \{1,2,3,4\}$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

และ $A_1 = \{1,2\}$ $A_2 = \{1,3\}$ $A_3 = \{1,4\}$

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \{1\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1\}$$

จะแสดงว่า A_1, A_2, A_3 เป็น pairwise independence

เพราะว่า $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

แต่ $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

แสดงว่า A_1, A_2, A_3 เป็น pairwise independent

แต่ไม่ใช่ mutually independence
