# บทที่ 3

# การแจกแจงความน่าจะเป็น

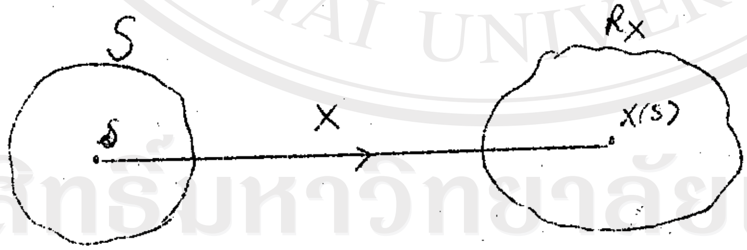
# (Probability Distribution)

## 3.1 ตัวแปรสุ่ม (Random Variables)

### 3.1.1 ความหมาย

นิยาม 3.1.1 S เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มอย่างหนึ่ง ให้ $\mathcal{F}$ เป็นซิกมา-ฟิลด์ของ S เรียกฟังก์ชัน X จากสมาชิก $s \in S$ ไปยังจำนวนจริง $X(s)$ ว่า ตัวแปรสุ่ม ถ้า X มีคุณสมบัติอย่างใดอย่างหนึ่งใน 4 ข้อต่อไปนี้

1. $\{s \in S : X(s) > r\} \in \mathcal{F}, \forall r \in R$
2. $\{s \in S : X(s) \geq r\} \in \mathcal{F}, \forall r \in R$
3. $\{s \in S : X(s) < r\} \in \mathcal{F}, \forall r \in R$
4. $\{s \in S : X(s) \leq r\} \in \mathcal{F}, \forall r \in R$






หมายเหตุ คุณสมบัติแต่ละข้อในนิยาม 3.1.1 เทียบเท่า (equivalent) กับคุณสมบัติที่ว่า $\{s \in S : X(s) \in B\} \in \mathcal{F}$ สำหรับแต่ละช่วง $B \in \mathcal{B}$

<u>ตัวอย่าง 3.1.1</u> โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง ให้ S = {(HHH),(HHT),(HTH),(HTT),(THT),(TTH), (THH), (TTT)} $\mathscr{F}$ เป็นเพาเวอร์เซตของ S ถ้ากำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X แทนจำนวนหัวที่เกิดขึ้น จงเขียนภาพแสดงแซมเปิลสเปซและตัวแปรสุ่ม X


---

3.1.2 <u>ลักษณะของตัวแปรสุ่ม</u>

<u>นิยาม 3.1.2</u> ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่นิยามบนแซมเปิลสเปซ S ถ้า S เป็นเคาเทเบิลเซต (finite หรือ infinite countable) เรียก X ว่าเป็น<u>ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง</u> (Discrete random variable)

นั่นคือ ค่าที่เป็นไปได้ของ X อาจแสดงเป็นค่าตัวเลข $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n, \ldots$ เป็นค่าที่ไม่ต่อเนื่องกัน

<u>ตัวอย่าง 3.1.2</u> จากตัวอย่าง 3.1.1 X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

<u>นิยาม 3.1.3</u> ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่นิยามบนแซมเปิลสเปซ S ถ้า S มีลักษณะเป็นช่วง (interval) เรียก X ว่าเป็น<u>ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง</u> (Continuous random variable)

<u>ตัวอย่าง 3.1.3</u> จะพูดในบทที่ 5

3.1.3 <u>ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม</u>

พิจารณาการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้งในตัวอย่าง 3.1.1

มี $S = \{(HHH),(HHT),(HTH),(THH),(HTT),(THT),(TTH),(TTT)\}$

ให้ $A = \{(HHT),(HTH),(THH)\}$ เป็นเหตุการณ์ใน $S$

ให้ $X$ เป็นจำนวนหัวที่เกิดขึ้น

$X = 2$ คือกรณีที่เหรียญหงายหัว 2 ครั้ง

เรียกเหตุการณ์ $A$ และเซต $\{2\}$ ว่ามีความเทียบเท่ากัน (equivalent event) ซึ่งกำหนดเป็นนิยามดังนี้

<u>นิยาม 3.1.4</u> ในการทดลองอย่างหนึ่ง $S$ เป็นแซมเปิลสเปซที่มีซิกมา-ฟิลด์และความน่าจะเป็น $P$ ที่กำหนดให้คู่หนึ่ง $X$ เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมี $R_X$ เป็นเรนจ์สเปซ ให้ $B$ เป็นเซตย่อยของ $R$ ให้ $A \subseteq S$ ซึ่งกำหนดโดย $A = \{s \in S : X(s) \in B\}$ เรียก $A$ กับ $B$ ว่ามี<u>ความเทียบเท่ากัน</u> (equivalent event) ภายใต้ตัวแปรสุ่ม $X$ ดังรูป


<u>หมายเหตุ</u> โดยปกติเราสนใจเซต $A$ (ที่เกิดจาก $B$ ในนิยาม 3.1.4) ที่เป็นเหตุการณ์หนึ่งใน $S$ เพราะทำให้เราสามารถหาความน่าจะเป็นของ $A$ ได้

<u>ตัวอย่าง 3.1.4</u> ในการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง

ถ้า $A = \{(TTT),(HTT),(THT),(TTH)\}$ และ $B = (-\infty, 1] = \{0,1\}$ เมื่อ X คือจำนวนหัวที่เหรียญหงาย จะเห็นว่าเหตุการณ์ A กับช่วง B มีความเทียบเท่ากันภายใต้ X

<u>หมายเหตุ</u> 1. โปรดสังเกตุว่า ถ้า B เป็น borel set ใดของ R จะได้ว่า A ที่เทียบเท่ากับ B นั้นจะเป็นเหตุการณ์ใน S

2. สำหรับ Borel set B ที่อยู่ในแบบ $\{a\}$, $(a,b)$, $(a,b]$, ... $(a, \infty)$ และ $[a, \infty)$ เขียนแทน $P(X \varepsilon B)$ ด้วย $P(X = a)$, $P(a < x < b)$, $P(a < x \leq b)$, $P(a \leq x \leq b)$, $P(x < b)$, $P(x \leq b)$, $P(x > a)$ และ $P(x \geq a)$ ตามลำดับ

<u>ตัวอย่าง 3.1.5</u> ในการโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง ถ้า X เป็นจำนวนหัวที่เหรียญหงาย จงหาค่าของ $P(X = 0)$ และ $P(X \leq 1)$

<u>วิธีทำ</u> 1. $P(X = 0)$ = ความน่าจะเป็นที่เหรียญไม่หงายหัวเลย

$$= P\{(TTT)\} = \frac{1}{8}$$

2. $P(X \leq 1) = P(A)$ เมื่อ $A = \{(TTT),(TTH),(THT),(HTT)\}$

$$= \frac{4}{8}$$

$$= \frac{1}{2}$$

## 3.2 การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability Distribution)

นิยาม 3.2.1 เรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็น หรือการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X ถ้า

1. $f(x) \geq 0$ ทุก ๆ ค่าของ $x \in R_X$
2. $\sum_{x \in R_X} f(x) = 1$
3. $f(x) = P(X = x)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x \in R_X$

หมายเหตุ จะเห็นว่าการแสดงกราฟของคู่ลำดับ $(x_i, f(x_i))$ เรียกว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 3.2.1 จากตัวอย่าง 3.1.1 ถ้า X เป็นจำนวนเหรียญที่หงายหัว เราอาจเขียนตารางแสดงความสัมพันธ์ของ x และ f(x) ได้ดังนี้

| x | $P(X = x) = f(x)$ |
|---|---|
| 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{3}{8}$ |
| 2 | $\frac{3}{8}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ |
| รวม | 1 |

ตัวอย่าง 3.2.2 จากตัวอย่าง 3.2.1 เป็นตารางแสดงการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X เมื่อ X เป็นจำนวนเหรียญที่หงายหัว และ x มีค่าเป็น 0,1,2,3 ซึ่งเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง

<u>นิยาม 3.2.2</u> เรียกฟังก์ชัน f ที่นิยามบน R ว่าเป็น <u>พรอบเบบิลิตีเดนสิตีฟังก์ชัน</u> (เขียนย่อเป็น p.d.f.) ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X ถ้า

1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่า $x \in R$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

3. $$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

<u>ตัวอย่าง 3.2.3</u> กำหนดฟังก์ชัน f โดยมีคุณสมบัติดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & \text{ค่าอื่น ๆ ของ } x \end{cases}$$

จงแสดงว่า f สอดคล้องกับคุณสมบัติข้อ 1 และ 2 ของนิยาม 3.2.2

<u>วิธีทำ</u> 1. จากโจทย์ จะได้ว่า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} (1 - \tfrac{1}{2}x)\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx$$

$$= x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big]_0^2 = 2 - 1 = 1$$

<u>ทฤษฎี 3.2.1</u> สำหรับแต่ละจำนวนจริง a, $P(X = a) = 0$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี f เป็น p.d.f

<u>พิสูจน์</u>

$$0 \leq P(X = a) \leq P(a - \frac{1}{n} < X < a + \frac{1}{n}) = \int_{a-\frac{1}{n}}^{a+\frac{1}{n}} f(x)\,dx \longrightarrow 0$$

เมื่อ $n \longrightarrow \infty$

<u>ทฤษฎี 3.2.2</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี f เป็น p.d.f.

ก. $P(c \leq X < d) = P(c < X < d)$

ข. $P(c < X \leq d) = P(c < X < d)$

ค. $P(c \leq X \leq d) = P(c < X < d)$

<u>พิสูจน์</u> ก. $P(c \leq x < d) = P(X = c) + P(c < X < d)$

$= 0 + P(c < X < d)$

$= p(c < X < d)$

การพิสูจน์ข้อ ข, ค พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้อ ก.

<u>ทฤษฎี 3.2.3</u> $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี f เป็น p.d.f

<u>พิสูจน์</u> $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$ จากทฤษฎี 3.2.2

$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

<u>ทฤษฎี 3.2.4</u> $P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี f เป็น p.d.f

<u>พิสูจน์</u>

$$P(X \leq a) = P\Big(\bigcup_{\substack{n \geq a \\ n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}}} (-n \leq X \leq a)\Big)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(-n \leq X \leq a)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{a} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$$

<u>นิยาม 3.2.3</u> ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม (แบบต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง) จะเรียกฟังก์ชัน F ซึ่ง $F(x) = P(X \leq x)$ สำหรับ $x \in R$ ว่า<u>ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม</u> ( Cumulative distribution function) เขียนย่อเป็น c.d.f) ของ X

ฟังก์ชัน F นี้บางทีเรียกสั้น ๆ ว่า distribution function

<u>ทฤษฎี 3.2.5</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง และ f เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X แล้ว $F(x) = \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in R_X}} f(y)$

<u>พิสูจน์</u> ให้ S เป็นแซมเปิลสเปซของ X

$$F(x) = P(X = x)$$

$$= P(\{s \in S / X(s) \leq x\})$$

$$= P(\{s \in S / X(s) = y,\ y \leq x\})$$

$$F(x) = \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in R_X}} P(\{s \in S / X(s) = y\})$$

$$= \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in R_X}} P(X = y)$$

$$= \sum_{\substack{y \leq x \\ y \in R_X}} f(y)$$

<u>ทฤษฎี 3.2.6</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง และ f เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X แล้ว $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

---

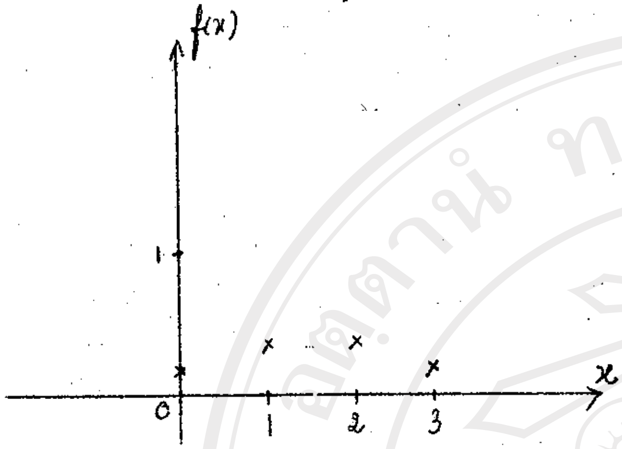
<u>พิสูจน์</u> $F(x) = P(X \leq x)$

$= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ จากทฤษฎี 3.2.4

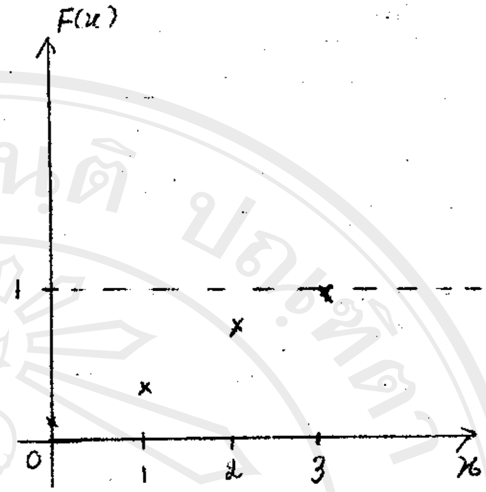
<u>ตัวอย่าง 3.2.4</u> จากตัวอย่าง 3.2.1 สามารถเขียนตารางแสดง F(x) ได้ดังนี้

| x | $f(x) = P(X = x)$ | $F(x) = P(X \leq x)$ |
|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{8}$ |
| 2 | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{8}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 1 |
| รวม | 1 | |

สามารถแสดงรูปได้ดังนี้




รูปแสดงฟังก์ชันของความน่าจะเป็นของ X




รูปแสดง c.d.f

---

<u>ตัวอย่าง 3.2.5</u> กำหนด $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} , & 0 < x < 2 \\ 0 , & \text{ค่าอื่นของ } x \end{cases}$

สมมติว่า f เป็น p.d.f ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X ตัวหนึ่ง

จงหา c.d.f

<u>วิธีทำ</u> $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$$

ถ้า $x \leq 0$ $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,ds = 0$$

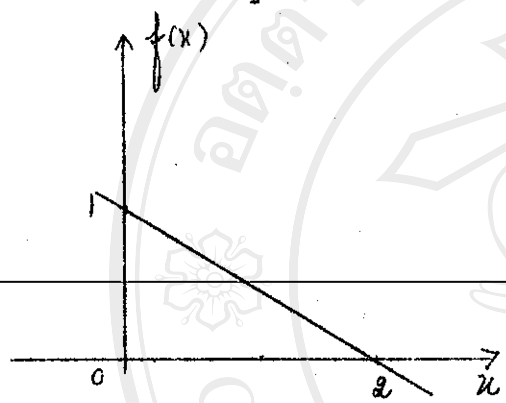
ถ้า $0 < x < 2$ $$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,ds + \int_{0}^{x} (1 - \frac{s}{2})\,ds = x - \frac{x^2}{4}$$

ถ้า $x \geq 2$ $$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,ds + \int_{0}^{2} (1 - \frac{s}{2})\,ds + \int_{2}^{x} 0\,ds$$

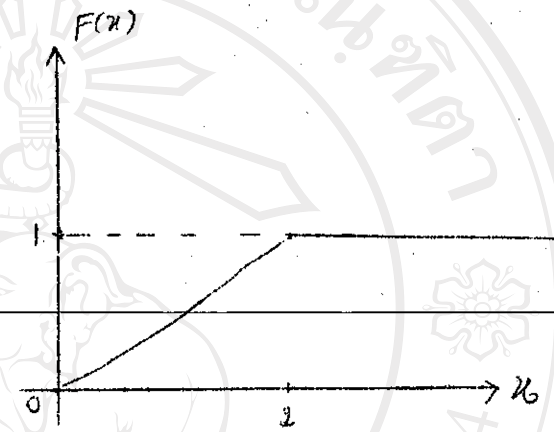
$$= 0 + 1 + 0 = 1$$

$$\text{จะได้ } F(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \leq 0 \\ x - \frac{x^2}{4} & , \; 0 < x < 2 \\ 1 & , \; x \geq 2 \end{cases}$$

ซึ่งแสดงรูปได้ดังนี้




รูปแสดง p.d.f




รูปแสดง c.d.f

<u>ทฤษฎี 3.2.7</u>

1. ถ้า F เป็น c.d.f ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี f เป็น p.d.f จะได้ว่า $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$ ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ x

2. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ถ้า x,y เป็นสมาชิกที่อยู่ถัดกันใน $R_X$ โดยที่ $x < y$ และ F เป็น c.d.f ของ X แล้วจะได้ว่า $P(X = y) = F(y) - F(x)$

<u>พิสูจน์</u> 1. $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

2. $$F(y) = \sum_{\substack{z \leq y \\ z \in R_X}} f(z)$$

$$F(y) = f(y) + \sum_{\substack{z \leq x \\ z \in R_X}} f(z) = P(X = y) + F(x)$$

ดังนั้น $P(X = y) = F(y) - F(x)$

<u>ตัวอย่าง 3.2.6</u> x เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี F เป็น c.d.f กำหนดโดย

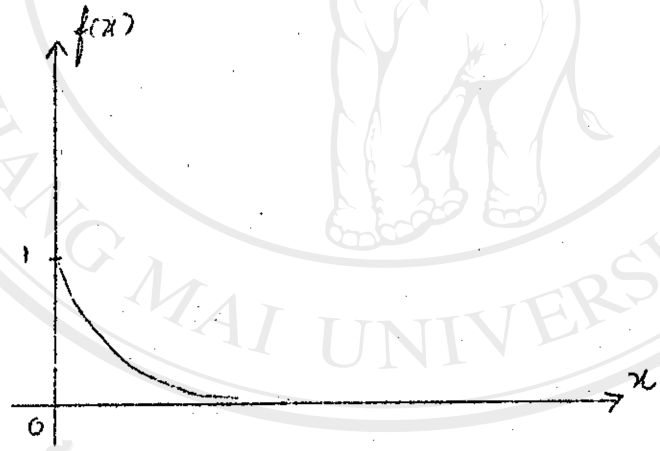
$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1-e^{-x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$ จงหา p.d.f(f(x))

<u>วิธีทำ</u> $f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$

ถ้า $x < 0$ จะได้ $f(x) = 0$

ถ้า $x > 0$ จะได้ $f(x) = \frac{d}{dx}(1 - e^{-x}) = e^{-x}$

ให้ $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ e^{-x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$ ซึ่งแสดงดังรูป






## 3.3 <u>ค่าความคาดหวังของตัวแปรสุ่ม</u> (Expectation of random variables)

<u>นิยาม 3.3.1</u> ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมี f เป็นฟังก์ชันของความน่าจะเป็น เรียก $\sum_{x \in R_X} x\, f(x)$ ว่า <u>ค่าความคาดหวัง</u>ของ X แทนด้วยสัญลักษณ์ E(X) นั่นคือ $E(X) = \sum_{x \in R_X} x\, f(x)$

<u>ตัวอย่าง 3.3.1</u> กล่องใบหนึ่งมีลูกปิงปองขนาดเท่ากันอยู่ 10 ลูก แต่ละลูกเขียนหมายเลขกำกับไว้ลูกละ 1 หมายเลขดังนี้

หมายเลข 1 จำนวน 3 ลูก

หมายเลข 2 จำนวน 3 ลูก

หมายเลข 3 จำนวน 2 ลูก

หมายเลข 4 จำนวน 2 ลูก

ถ้าหยิบลูกปิงปองขึ้นมา 1 ลูก ให้ X เป็นจำนวนแต้มที่ปรากฏบนลูกปิงปอง จงหา E(X)

<u>วิธีทำ</u>

| $x$ | $f(x) = P(X = x)$ | $x\,f(x)$ |
|---|---|---|
| 1 | $f(1) = \frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ |
| 2 | $f(2) = \frac{3}{10}$ | $\frac{6}{10}$ |
| 3 | $f(3) = \frac{2}{10}$ | $\frac{6}{10}$ |
| 4 | $f(4) = \frac{2}{10}$ | $\frac{8}{10}$ |

$$\sum_{x \in R_X} x\,f(x) = \frac{3}{10} + \frac{6}{10} + \frac{6}{10} + \frac{8}{10} = \frac{23}{10} = 2.3 = E(X)$$

<u>นิยาม 3.3.2</u> ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี f เป็น p.d.f เรียก $\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$ ว่า <u>ค่าความคาดหวังของ X</u> แทนด้วยสัญลักษณ์ E(X)

นั่นคือ $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$

<u>ตัวอย่าง 3.3.2</u> ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี f เป็น p.d.f โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x , & 0 \leq x < 2 \\ 0 , & \text{ค่าอื่นของ } x \end{cases}$$

จงหา E(X)

<u>วิธีทำ</u>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} x(1 - \tfrac{1}{2}x)\,dx + \int_{2}^{\infty} 0\,dx$$

$$= \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2$$

$$= \frac{2}{3}$$

3.3.1 <u>คุณสมบัติของค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม</u>

1. $E(c) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $E(cX) = cE(X)$ , X เป็นตัวแปรสุ่ม, c เป็นค่าคงที่
3. $E(X + d) = E(X) + d$, X เป็นตัวแปรสุ่ม, d เป็นค่าคงที่
4. $E(cX+d) = cE(X) + d$, X เป็นตัวแปรสุ่ม, c, d เป็นค่าคงที่
5. $E\left[\sum_{i=1}^{n} c_i X\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X)$ , X เป็นตัวแปรสุ่ม, c เป็นค่าคงที่
6. ถ้า $X > 0$ ดังนั้น $E(X) \geq 0$, X เป็นตัวแปรสุ่ม
7. ถ้า $X > Y$ ดังนั้น $E(X) \geq E(Y)$ เมื่อ X, Y เป็นตัวแปรสุ่ม
8. $|E(X)| \leq E(|X|)$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่ม

3.3.2 ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม (Variance of random variable)

ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มหนึ่ง เป็นตัวที่บอกให้ทราบว่าค่าต่าง ๆ ของตัวแปรสุ่มชนิดนั้นมีการกระจายออกจากค่าที่คาดว่าควรจะเป็น (Expected value) ของการแจกแจงนั้นโดยเฉลี่ยเป็นเท่าใด

นิยาม 3.3.3 ให้ x เป็นตัวแปรสุ่ม ค่าความแปรปรวนของ x แทนด้วยสัญลักษณ์ V(X) มีค่าดังนี้ $V(X) = E([X - E(X)]^2)$

3.3.3 คุณสมบัติของค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม

1. $V(c) = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $V(cX) = c^2V(X)$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่ม, c เป็นค่าคงที่
3. $V(X + d) = V(x)$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่ม, d เป็นค่าคงที่
4. $V(cX + d) = c^2V(X)$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่ม, c,d เป็นค่าคงที่
5. $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่ม
6. $V(X) = E(X(X - 1) + E(X) - [E(X)]^2)$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง 3.3.3 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก ให้ X มีค่าเป็น 2 เท่าของแต้มที่ลูกเต๋าหงาย จงหา V(X)

ทอดลูกเต๋า 1 ลูก ได้ $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

$X(1) = 2$

$X(2) = 4$

$X(3) = 6$

$X(4) = 8$

$X(5) = 10$

$X(6) = 12$

$X(S) = \{2,4,6,8,10,12\}$

$$f(2) = f(4) = f(6) = f(8) = f(10) = f(12) = \frac{1}{6}$$

$$E(X) = \sum_{x \in X(S)} x\, f(x)$$

$$= 2.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6} + 8.\frac{1}{6} + 10.\frac{1}{6} + 12.\frac{1}{6}$$

$$= 7$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in X(S)} x^2\, f(x)$$

$$= 4.\frac{1}{6} + 16.\frac{1}{6} + 36.\frac{1}{6} + 64.\frac{1}{6} + 100.\frac{1}{6} + 144.\frac{1}{6}$$

$$= 60.7$$

---

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= 60.7 - 49 = 11.7$$

<u>ตัวอย่าง 3.3.4</u> ให้ $X$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องและ $f$ เป็น p.d.f ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & , -1 \le x \le 0 \\ 1 - x & , 0 < x \le 1 \end{cases}$$ จงหา $V(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x(1-x)\,dx$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_{0}^{1} = \frac{1}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

## 3.4 โมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม (Moments of random variables)

ถ้า $g(X)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม X และเลือก $g(X) = X^k$ สำหรับจำนวนเต็มบวก k บางตัว ค่าความคาดหวังของ $g(X)$ นี้เรียกว่า โมเมนต์ที่ k ของตัวแปรสุ่ม X

หมายเหตุ ถ้า g เป็นตัวแปรสุ่มบน $(R, \mathcal{B})$ แล้ว $g(X)$ จะเป็นตัวแปรสุ่มด้วย ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม นอกจากนี้ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม (บนแซมเปิล-สเปซเดียวกัน) แล้ว $X + Y$, $XY$ และ $X/Y$ จะเป็นตัวแปรสุ่มด้วย

นิยาม 3.4.1 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ค่า $E(X^k)$, $k = 1,2,\ldots$ เรียกว่า เป็นโมเมนต์ที่ k ของตัวแปรสุ่ม X

หมายเหตุ 1) ก. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง จะได้

$$E(X^k) = \sum_{x \varepsilon R_X} x^k f(x)$$

ข. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง จะได้

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$$

2) จากนิยามนี้จะเห็นว่า $E(X)$ เป็นกรณีเฉพาะของโมเมนต์ที่ k เมื่อ $k = 1$

นิยาม 3.4.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม และ $\mu = E(X)$ ค่า $E\left[(X-\mu)^k\right]$ เมื่อ $k = 1,2,\ldots$ เรียกว่า โมเมนต์ที่ k รอบศูนย์กลางของตัวแปรสุ่ม X

หมายเหตุ 1) ก. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง จะได้

$$E\left[(X-\mu)^k\right] = \sum_{x \varepsilon R_X} (x-\mu)^k f(x)$$

ข. ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง จะได้

$$E\left[(X-\mu)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k f(x)\,dx$$

2) จากนิยาม 3.4.2 จะได้คุณสมบัติของโมเมนต์ดังนี้

ก. โมเมนต์ที่ 1 รอบศูนย์กลางมีค่าเป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$E\left[(x-\mu)\right] = 0$$

ข. โมเมนต์ที่ 2 รอบศูนย์กลางคือค่าความแปรปรวน กล่าวคือ

$$E\left[(x-\mu)^2\right] = V(X)$$

---

## 3.5 <u>โมเมนเจนเนอเรติงฟังก์ชัน</u> (Moment-Generating Functions) และ <u>แคแรคเตอริสติกฟังก์ชัน</u> (Characteristic functions)

<u>นิยาม 3.5.1</u> ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมี f(x) เป็นฟังก์ชันของความน่าจะเป็นแล้ว<u>แคแรคเตอริสติกฟังก์ชัน</u> ของ X (c.h.f) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\phi_X$ เป็นฟังก์ชันบน R ที่นิยามโดย $\phi_x(t) = E(e^{itX})$, $i = \sqrt{-1}$ เป็นจำนวนจินตภาพ

$$= (E \cos tX + iE \sin tX),\ t \in R$$

จากนิยาม 3.2.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง จะได้

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \sum_{x \in R_X} e^{itx} f(x)$$

จากนิยาม 3.2.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง จะได้

$$\phi_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

นิยาม 3.5.2 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่งมี f(x) เป็นฟังก์ชันของความน่าจะเป็นแล้ว โมเมนเจนเนอเรติงฟังก์ชันของ X (m.g.f) แทนด้วยสัญลักษณ์ $M_X(t)$ คือฟังก์ชันบน R ที่นิยามโดย

$$M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \in R$$

จากนิยาม 3.3.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง จะได้

$$M_X(t) = \sum_{x \in R_X} e^{tx} f(x)$$

จากนิยาม 3.3.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง จะได้

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

3.5.3 คุณสมบัติของ c.h.f

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม

1. $\phi_X(0) = 1$

2. $\phi_{X+d}(t) = e^{itd}\, \phi_X(t)$ เมื่อ d เป็นค่าคงที่

3. $\phi_{cX}(t) = \phi_X(ct)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

ตัวอย่าง 3.5.1 โยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง ถ้า X เป็นจำนวนเหรียญที่หงายหัว จงหา $\phi_X(t)$ และ $M_X(t)$

วิธีทำ

| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{3}{8}$ |
| 2 | $\frac{3}{8}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ |

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_{x \epsilon R_X} e^{itx} f(x)$$

$$= e^0 \cdot \frac{1}{8} + e^{it} \cdot \frac{3}{8} + e^{2it} \cdot \frac{3}{8} + e^{3it} \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8}(1 + 3e^{it} + 3e^{2it} + e^{3it}) = \frac{1}{8}(1 + e^{it})^3$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x \epsilon R_X} e^{tx} f(x)$$

$$= e^0 \cdot \frac{1}{8} + e^t \cdot \frac{3}{8} + e^{2t} \cdot \frac{3}{8} + e^{3t} \cdot \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{8} (1 + 3e^t + 3e^{2t} + e^{3t})$$

$$= \frac{1}{8}(1 + e^t)^3$$

<u>ตัวอย่าง 3.5.2</u> ถ้า $x$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งมี $f(x)$ เป็น p.d.f กำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & , 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{ค่าอื่นของ } x \end{cases}$$ จงหา $\phi_X(t)$ และ $M_X(t)$

<u>วิธีทำ</u> $\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx$

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_0^2 e^{itx}\,(1 - \tfrac{1}{2}x)\,dx$$

$$= \int_0^2 e^{itx}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^2 e^{itx}\,x.dx$$

$$= \frac{1}{it}\,e^{itx} - \frac{1}{2it}xe^{itx} - \frac{1}{2t^2}\,e^{itx}\Big]_0^2$$

$$= \frac{1}{it}\,(e^{2it}-1) - \frac{1}{2it}.\,2e^{2it} -$$

$$\frac{1}{2t^2}\,(e^{2it} - 1)$$

$$= \frac{1}{it}e^{2it} - \frac{1}{it} - \frac{1}{it}\,.\,e^{2it} - \frac{1}{2t^2}\,e^{2it}$$

$$+ \frac{1}{2t^2}$$

$$\phi_X(t) = \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{it} - \frac{e^{2it}}{2t^2}$$

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\,f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 e^{tx}(1 - \tfrac{x}{2})\,dx$$

$$= \frac{e^{tx}}{t} - \frac{xe^{tx}}{2t} + \frac{e^{tx}}{2t^2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2t^2}\,(e^{2t} - 2t - 1)$$

<u>ทฤษฎี 3.5.1</u> (Uniqueness Theorem)

สำหรับแคแรคเตอริสติกแต่ละค่าก็จะมีฟังก์ชันของการแจกแจงของตัวแปรสุ่มเพียงค่าเดียวที่สอดคล้องกับค่าแคแรคเตอริสติกนั้น ๆ

<u>ทฤษฎี 3.5.2</u> (Uniqueness Theorem)

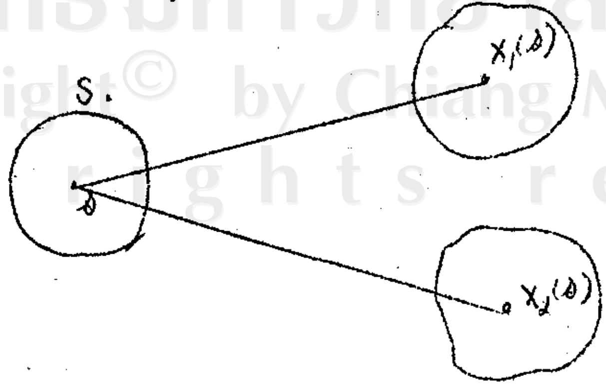
ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ ที่มี $M_X(t)$ และ $M_Y(t)$ เป็นโมเมนเจนเนอเรติงฟังก์ชันตามลำดับ ถ้า $M_X(t) = M_Y(t)$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ t ดังนั้นจะได้ว่า X และ Y มีการแจกแจงความน่าจะเป็นอย่างเดียวกัน

## 3.6 <u>การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มหลายมิติ</u>

ในการทดลองใด ๆ อาจกำหนดตัวแปรสุ่มได้หลายแบบต่าง ๆ กัน บางครั้งอาจกำหนดตัวแปรสุ่มที่ต่างกันมากกว่าสองตัวแปรได้

<u>นิยาม 3.6.1</u> ถ้า S เป็นแซมเปิลสเปซของการทดลองอย่างหนึ่ง ให้ $X_1$, $X_2, \ldots, X_n$ ( n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $\geq 1$) เป็นตัวแปรสุ่มบน S จะเรียก $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ว่า<u>ตัวแปรสุ่ม n มิติ</u> (ของ S)

<u>ตัวอย่าง 3.6.1</u> ถ้า $X_1$ และ $X_2$ เป็นตัวแปรสุ่มบนแซมเปิลสเปซ S แล้ว $(X_1, X_2)$ คือตัวแปรสุ่ม 2 มิติ (ของ S)



<u>หมายเหตุ</u> 1. ถ้า $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง เรียก $(X_1, \ldots, X_n)$ ว่าเป็นตัวแปรสุ่ม n มิติ (ของ S) แบบไม่ต่อเนื่อง

2. ถ้า $X_1, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เรียก $(X_1, \ldots, X_n)$ ว่าเป็นตัวแปรสุ่ม n มิติ (ของ S) แบบต่อเนื่อง

<u>นิยาม 3.6.2</u> (1) เรียกฟังก์ชัน $f(x,y)$ ว่าเป็น<u>ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม</u> (joint probability function) ของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X และ Y ถ้า

1. $f(x,y) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ $(x,y)$

2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$

3. $P\left[(X,Y) \in \mathcal{B}\right] = \sum_{\mathcal{B}} \sum f(x,y)$ เมื่อ $\mathcal{B}$ คือ Borel set ใด ๆ

(2) เรียกฟังก์ชัน $f(x,y)$ ว่าเป็น<u>ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม</u> (joint probability function) ของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y ถ้า

1. $f(x,y) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ $(x,y)$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

3. $P\left[(X,Y) \in \mathcal{B}\right] = \iint_{\mathcal{B}} f(x,y)\,dx\,dy$ เมื่อ $\mathcal{B}$ คือ Borel set ใด ๆ

<u>นิยาม 3.6.3</u> ถ้า $(X,Y)$ เป็นตัวแปรสุ่มสองมิติ ซึ่งมี $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม <u>การแจกแจงมาร์จินัล</u>ของ f (marginal probability distribution) เมื่อเทียบกับ X และ Y กำหนดโดยฟังก์ชัน $f_X$ และ $f_Y$ ตามลำดับ ดังนี้

1. แบบไม่ต่อเนื่อง

$$f_X(x) = \sum_{y \in R_Y} f(x,y)$$

$$f_Y(y) = \sum_{x \in R_X} f(x,y)$$

2. แบบต่อเนื่อง

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

<u>ตัวอย่าง 3.6.1</u> กำหนดให้ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมของ X และ Y คือ

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x,y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาการแจกแจงมาร์จินัล $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$

<u>วิธีทำ</u>

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4}\, dy = \left[ \frac{xy}{3} + \frac{xy^3}{4} \right]_0^1 = \frac{x}{2}$$

$$\text{ฉะนั้น} \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & , \quad \text{ค่าอื่น ๆ ของ } x \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \int_{0}^{2} \frac{x(1 + 3y^2)}{4}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8}\right]_0^2 = \frac{1 + 3y^2}{2}$$

$$\text{ฉะนั้น} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1 + 3y^2}{2} & , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad \text{ค่าอื่น ๆ ของ } y \end{cases}$$

3.6.1 ตัวแปรสุ่มอิสระ (Independent random variables)

นิยาม 3.6.4 ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่มสองมิติ ตัวแปรสุ่ม X และ Y จะเรียกว่าตัวแปรสุ่มอิสระ ถ้า $f(x,y) = g(x).h(y)$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นรวม, g และ h เป็นการแจกแจงมาร์จินัลของ X และ Y ตามลำดับ

3.6.2 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม (Functions of random variables)

การที่ตัวแปรสุ่ม Z เกี่ยวข้องกับตัวแปรสุ่มสองมิติ (X, Y) ใด ๆ เขียนเป็น $Z = H(X, Y)$ โดยที่ $X = X(s)$, $Y = Y(s)$, $s \in S$ ดังนั้น $Z(s) = H\left[X(s), Y(s)\right]$ เรียก Z ว่าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม X และ Y

นิยาม 3.6.5 ให้ (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่มสองมิติ ซึ่งมี f(x,y) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงรวม ค่าความคาดหวังของ $Z = H(X, Y)$ เมื่อ Z เป็นตัวแปรสุ่มกำหนดโดย

1. $$E(Z) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} H(x,y)\, f(x,y)$$

เมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง

2. $$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H(x,y)\, f(x,y)\,dxdy$$

เมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ทฤษฎี 3.6.1 ถ้า (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่มสองมิติซึ่งมี f(x,y) เป็นฟังก์ชันการแจกแจงรวม ถ้า $Z = H_1(X, Y)$ และ $W = H_2(X, Y)$ เป็นตัวแปรสุ่มแล้ว จะได้ว่า $E(Z + W) = E(Z) + E(W)$

พิสูจน์ 1. แบบไม่ต่อเนื่อง

$$E(Z + W) = \Sigma\, \Sigma \left[ H_1(x,y) + H_2(x,y) \right] f(x,y)$$

$$= \Sigma\, \Sigma\, H_1(x,y)\, f(x,y) + \Sigma\, \Sigma\, H_2(x,y) f(x,y)$$

$$= E(Z) + E(W)$$

2. แบบต่อเนื่อง

$$E(Z + W) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[ H_1(x,y) + H_2(x,y) \right] f(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_1(x,y)\, f(x,y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} H_2(x,y)\, f(x,y)\,dxdy$$

$$= E(Z) + E(W)$$

<u>บทแทรก 3.6</u> ถ้า X,Y เป็นตัวแปรสุ่มใด ๆ จะได้ $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$

$$E(X + Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\, f(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)\, dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f(x,y)\, dxdy$$

$$= E(X) + E(Y)$$

สำหรับกรณีแบบไม่ต่อเนื่องไม่พิสูจน์ในที่นี้

<u>ทฤษฎี 3.6.2</u> ให้ (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่มสองมิติ ถ้า X, Y เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ แล้ว $E(XY) = E(X)\ E(Y)$

<u>พิสูจน์</u> (แสดงเฉพาะแบบต่อเนื่อง)

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f(x,y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy$$

$$= E(X)\ E(Y)$$



<u>ทฤษฎี 3.6.3</u> ให้ (X, Y) เป็นตัวแปรสุ่มสองมิติแบบต่อเนื่องที่มี f เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม ให้ $Z = H_1(X, Y)$ และ $W = H_2(X, Y)$ เป็นตัวแปรสุ่มซึ่ง $H_1$ และ $H_2$ สอดคล้องคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $Z = H_1(X, Y)$ และ $W = H_2(X, Y)$ สามารถแก้หาค่า x และ y ในเทอมของ z และ w ได้ค่าเดียวคือ $x = G_1(z,w)$, $y = G_2(z,w)$

2. The partial derivatives $\frac{\partial G_1}{\partial z}$ , $\frac{\partial G_1}{\partial w}$ , $\frac{\partial G_2}{\partial z}$ และ $\frac{\partial G_2}{\partial w}$ มีค่าต่อเนื่องและหาค่าได้

ดังนั้นการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมของ (z, w) สมมติเป็น k(z, w) กำหนดได้โดย $k(z,w) = f\left[G_1(z,w), G_2(z,w)\right] \left|J(z,w)\right|$

โดยที่ $J(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial z} & \frac{\partial G_1}{\partial w} \\ \frac{\partial G_2}{\partial z} & \frac{\partial G_2}{\partial w} \end{vmatrix}$

ซึ่ง J(z,w) เรียกว่า The jacobian of the transformation

$(x,y) \dashrightarrow (z,w)$

3.6.3 <u>การแจกแจงของผลคูณและผลหารของตัวแปรสุ่มอิสระ</u>

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มที่อยู่ในรูปผลคูณและผลหารของสองตัวแปรสุ่ม X และ Y ได้แก่ XY และ X/Y

<u>ทฤษฎี 3.6.4</u> ให้ (X,Y) เป็นตัวแปรสุ่มสองมิติแบบต่อเนื่อง และ X,Y เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ มี f เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม ซึ่ง $f(x,y) = f_X(x)\ f_Y(y)$

ให้ W = XY ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของ W สมมติเป็น p กำหนดโดย

$$p(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z)\ f_Y\left(\frac{w}{z}\right) \left|\frac{1}{z}\right| dz$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $w = xy\ (= H_2(x,y))$

สมมติ $z = x$ $(= H_1(x, y))$ ดังนั้น $x = z(= G_1(z, w))$

และ $y = w/z$ $(= G_2(z,w))$

$$\text{Jacobian} = J(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial z} & \frac{\partial G_1}{\partial w} \\ \frac{\partial G_2}{\partial z} & \frac{\partial G_2}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{w}{z^2} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{z}$$

ฉะนั้นการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมของ $W = XY$ และ $Z = X$ คือ

$$k(z,w) = f_X(z)\ f_Y(w/z)\ \left|\frac{1}{z}\right|$$

การแจกแจงมาร์จินัลของ $W$ คือ

$$p(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z)\ f_Y(w/z)\ \left|\frac{1}{z}\right|\ dz$$

<u>ทฤษฎี 3.6.5</u> ให้ $(X,Y)$ เป็นตัวแปรสุ่มสองมิติแบบต่อเนื่อง ซึ่ง $X$ และ $Y$ เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ ให้ $Z = X/Y$ ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของ $Z$ สมมติเป็น $q$ กำหนดโดย $q(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(zw)\ f_Y(w)\ |w|\ dw$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $z = x/y = (H_1(x,y)$ สมมุติ $w = y(= H_2(x,y))$

ดังนั้น $x = zw = G_1(z,w)$ , $y = w = G_2(z,w)$

$$J(z,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial z} & \frac{\partial G_1}{\partial w} \\ \frac{\partial G_2}{\partial z} & \frac{\partial G_2}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w$$

ถ้า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมของ $X$ และ $Y$ แล้ว ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมของ $Z = X/Y$ และ $W = Y$ คือ

$$k(z,w) = f(G_1(z,w),\ G_2(z,w))\ |w|$$

$$= f(zw,\ w)\ |w|$$

$$= f_X(zw)\ f_Y(w)\ |w|$$

ฉะนั้นการแจกแจงมาร์จินัลของ $Z$ คือ

$$q(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(zw)\ f_Y(w)\ |w|\ dw$$

---