บทที่ 5

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ในหัวข้อต่อไปนี้ จะมีการให้นิยาม ตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันของความน่าจะเป็น (probability density function) การหาค่าความคาดหวัง E(X) และค่าความแปรปรวน V(X) ของตัวแปรสุ่มแต่ละชนิด

5.1 การแจกแจงแบบต่อเนื่องของตัวแปรสุ่มแบบเสมอต้นเสมอปลาย (Continuous Uniform Distribution)

นิยาม 5.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง มี f เป็น p.d.f ซึ่งมีนิยามดังนี้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a < x < b \\ 0 & , \text{ค่าอื่นๆของ} x \end{cases}$$

เรียกว่า X มีการแจกแจงแบบต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย ในช่วง $[a,b]$

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.1 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

1. พิสูจน์ว่า $f(x) \geq 0$

   เพราะว่า $b > a$ ดังนั้น $b - a > 0$ และ $\frac{1}{b-a} > 0$

   ฉะนั้น $f(x) \geq 0$ ทุกค่าของ x

2. พิสูจน์ว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dx + \int_{b}^{\infty} 0\,dx$$

$$= \frac{x}{b-a}\Big]_{a}^{b} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

<u>ทฤษฎี 5.1</u> ถ้า X มีการแจกแจงแบบต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลายในช่วง $[a,b]$ แล้ว $E(X) = \frac{b+a}{2}$ และ $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

<u>พิสูจน์</u>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg]_a^b$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{b+a}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a}\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg]_a^b$$

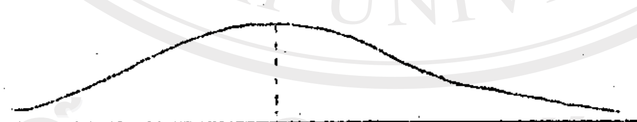
$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$= \frac{b^2+ba+a^2}{3}$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{b^2 + ba + a^2}{3} - \frac{(b^2 + 2ba + a^2)}{4} \\
&= \frac{4b^2 + 4ba + 4a^2 - 3b^2 - 6ba - 3a^2}{12} \\
&= \frac{b^2 - 2ba + a^2}{12} \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}
$$

5.2 การแจกแจงแบบปกติ (Normal Distribution)

การแจกแจงที่สำคัญและใช้มากที่สุดในวิชาสถิติคือ การแจกแจงปกติ กราฟของการแจกแจงปกติเรียกว่าโค้งปกติ (Normal curve) มีลักษณะคล้ายระฆังคว่ำ ดังรูป



ลักษณะการแจกแจงแบบนี้มักมีปรากฏอยู่ตามธรรมชาติ เช่นข้อมูลเกี่ยวกับความสูงของคน คะแนนการทดสอบทางสติปัญญาและอื่น ๆ

ในปี 1733 De moivre ได้สร้างสมการของโค้งปกติ ซึ่งได้กลายมาเป็นรากฐานของทฤษฎีต่าง ๆ ในวิชาสถิติ การแจกแจงปกติบางทีเรียกว่า Gaussian Distribution

<u>นิยาม 5.2</u> ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งมี p.d.f เป็น

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \quad , -\infty < x < \infty$$

สำหรับค่าคงที่ μ และ σ บางตัวที่ $\sigma > 0$ เรียกว่า X มีการ<u>แจกแจงแบบปกติ</u> มี μ, σ^2 เป็นพารามิเตอร์

<u>หมายเหตุ</u> ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.2 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

<u>พิสูจน์</u> 1. เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} > 0$ และ $e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} > 0$ ทุก ๆ ค่าของ x

ดังนั้น $f(x) > 0$ และเมื่อ $x \to \infty$ หรือ $x \to -\infty$ $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0

2. พิสูจน์ว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2} \cdot dx$$

ให้ $Z = \frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}$, $dx = \sqrt{2}\,\sigma\, dZ$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Z^2}\,dZ$$

ให้ $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Z^2}\,dZ$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{2\pi} e^{-r^2}r\,drd\theta$$

$$= \pi$$

$$\therefore\ I = \sqrt{\pi}$$

$$\therefore\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

<u>ทฤษฎี 5.2.1</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งมี μ และ σ^2 เป็นพารามิเตอร์แล้ว $E(X) = \mu$ และ $V(X) = \sigma^2$

<u>พิสูจน์</u>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

ให้ $y = \dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}$ $\quad \therefore\ y \in (-\infty,\ \infty)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\ \sigma y + \mu}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-y^2} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\ \sigma y}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu . e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} \cdot dy$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2} dy + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy^2 + \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-y^2} \right]_{-\infty}^{\infty} + \mu = \mu$$

$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X) \right]^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right)^2} \cdot dx$$

ให้ $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$ $\therefore\ y \in (-\infty, \infty)$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu)^2\ e^{-y^{2/2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 y^2 e^{-y^2/2} dy + 2\mu\sigma \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y e^{-y^2/2} dy$$

$$+ \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

พิจารณา $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 y^2 e^{-y^2/2}\, dy = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y\, d(e^{-y^2/2})$

$$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[y.e^{-y^2/2}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

$$= \sigma^2$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2$$

$$= \sigma^2$$

ในกรณีที่ $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ เรียกการแจกแจงแบบปกตินี้ว่า การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน (Standard normal distribution)

ทฤษฎี 5.2.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าความคาดหวัง μ ค่าความแปรปรวน σ^2 แล้วตัวแปรสุ่ม $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ จะมีการแจกแจงเป็นแบบปกติมาตรฐาน

พิสูจน์ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติ มีค่าความคาดหวัง μ ค่าความแปรปรวน σ^2 และมี $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$, $x \in (-\infty, \infty)$

เป็น p.d.f

จาก $Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ $\therefore Z \varepsilon (-\infty, \infty)$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม $G(z) = P(Z \leq z)$

$$= P(\frac{x-\mu}{\sigma} \leq z)$$

$$= P(x \leq \sigma z + \mu)$$

$$= \int_{-\infty}^{z+\mu} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \cdot dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-w^2/2} \sigma\, dw,$$

$$w = \frac{x-\mu}{\sigma}, \quad dx = \sigma\, dw$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-w^2/2}\, dw$$

$\therefore g(z) = G'(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \; z \;\varepsilon\; (-\infty, \infty)$ ซึ่งเป็นการแจกแจง

แบบปกติที่มี $E(Z) = 0$ และ $V(Z) = 1$

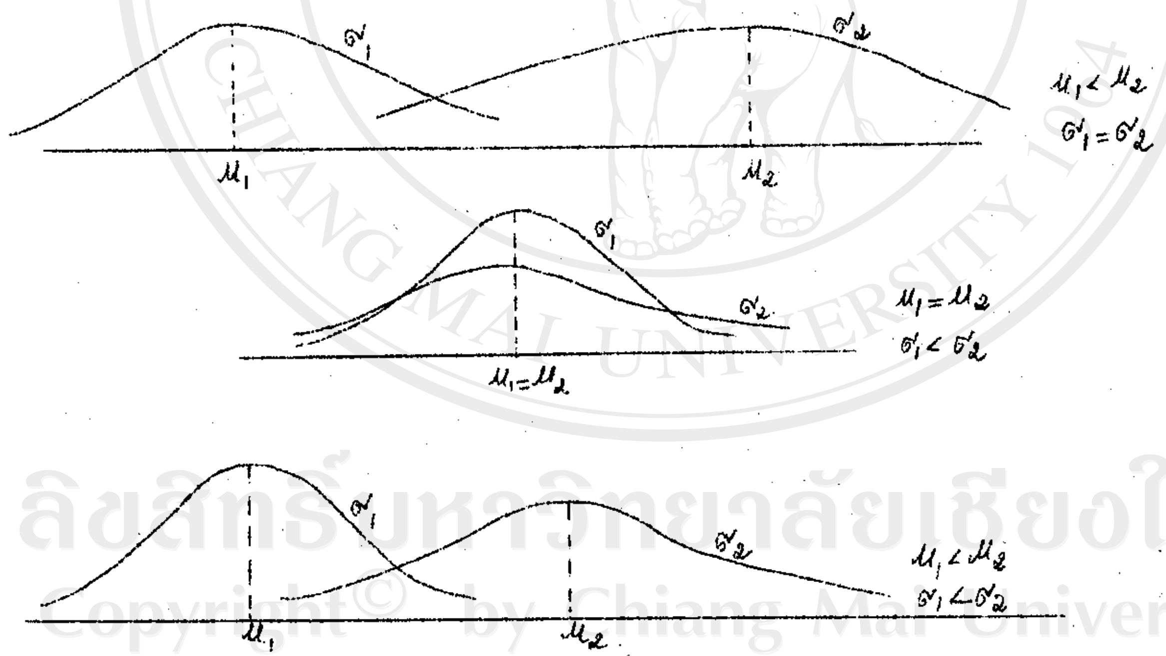
(โดยทฤษฎี 3.2.7 และทฤษฎี 5.2.1)

การแจกแจงแบบปกติมาตรฐานใช้สำหรับช่วยหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติโดยทั่วไปได้ ซึ่งอาศัยพื้นที่ภายใต้โค้งที่แสดงการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานประกอบ ซึ่งพื้นที่ภายใต้โค้งดังกล่าวมีแสดงไว้เป็นตาราง ซึ่งมีอยู่โดยทั่วไป

5.2.3 <u>ลักษณะของโค้งปกติเมื่อ μ และ σ มีค่าต่าง ๆ</u>

โค้งปกติจะมีลักษณะคล้ายระฆังคว่ำ โค้งมีสมมาตรเมื่อเทียบกับแกน $x = \mu$ แสดงว่าทางซ้ายและทางขวาของ μ ลักษณะโค้งจะเป็นเช่นเดียวกัน จุดสูงสุดอยู่ ณ.จุด $x = \mu$ แสดงว่าโค้งจะอยู่ทางซ้ายหรือทางขวาของแกน y ก็ขึ้นอยู่กับค่าของ μ

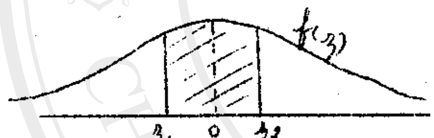
เนื่องจากจุดเปลี่ยนโค้งอยู่ที่จุด $x = \mu \pm \sigma$ ดังนั้นลักษณะของโค้งจะดูโค่งหรือแบนราบขึ้นอยู่กับค่าของ σ ถ้า σ มีค่ามาก จุดเปลี่ยนโค้งห่างจากค่า μ โค้งจะมีลักษณะแบนราบ ถ้า σ มีค่าน้อย จุดเปลี่ยนโค้งอยู่ใกล้ μ โค้งก็จะมีลักษณะโค่งดังแสดงรูป



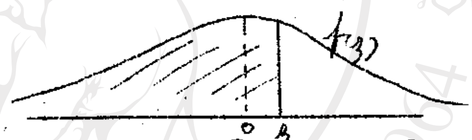
<u>ข้อสังเกต</u> การเขียนรูปโค้งปกติ ปลายโค้งทั้ง 2 ข้างจะไม่ติดแกน x ทั้งนี้เพราะแกน x เป็นเส้น asymptote คือเมื่อ x มีค่ามากขึ้นจนใกล้ ∞ ค่า f(x) จะมีค่าใกล้ 0 แต่ไม่เท่ากับ 0 เส้นกราฟจะอยู่เหนือแกน x แต่ไม่ตัดแกน x

5.2.4 <u>พื้นที่ภายใต้โค้ง</u>

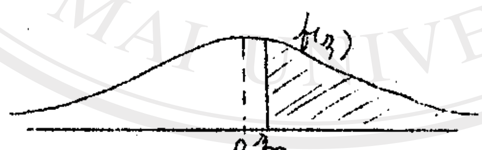
ถ้าจะหาความน่าจะเป็นระหว่างจุดหนึ่งถึงจุดหนึ่ง จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ภายใต้โค้งระหว่างจุดนั้น ๆ เมื่อ z มีการแจกแจงเป็นแบบปกติมาตรฐาน จะหาความน่าจะเป็นระหว่าง z_1 ถึง z_2 ก็หาได้จากพื้นที่ภายใต้โค้งระหว่าง z_1 ถึง z_2 ดังรูป



$$P(z_1 < Z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$



$$P(Z < z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} ds$$



$$P(Z > z) = \int_{z}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ค่าความน่าจะเป็นที่จุดใดจุดหนึ่งคือ $P(X = a)$ อาจมีค่าไม่เป็นศูนย์ และค่า $P(X \leq a)$ จะไม่เท่ากับ $P(X < a)$ หรือ $P(a \leq X \leq b) \neq P(a < X < b)$ แต่สำหรับตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ค่า $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$ ในการหาพื้นที่ใต้โค้งของการแจกแจงปกติมาตรฐาน นักคณิตศาสตร์ได้แสดงไว้เป็นตารางแบบต่าง ๆ ซึ่งเราจะหาพื้นที่ใต้โค้งได้จากตารางดังกล่าว

5.3 การแจกแจงแบบแกมม่า (Gamma Distribution)

5.3.1 ฟังก์ชันแกมม่า

นิยาม 5.3.1 ฟังก์ชันแกมม่า แทนด้วยสัญลักษณ์ Γ กำหนดดังนี้

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx, \quad p > 0$$

ทฤษฎี 5.3.1 $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ สำหรับ $p > 1$

หาได้จาก $\int_0^\infty e^{-x} x^{p-1}\, dx$ โดย integration by parts

ให้ $u = x^{p-1}$ $\quad dv = e^{-x}\, dx$

$$= d(-e^{-x}) \quad \therefore v = -e^{-x}$$

$$\Gamma(p) = \left[-e^{-x} x^{p-1}\right]_0^\infty - \int_0^\infty - e^{-x}(p-1)x^{p-2}\, dx$$

$$= 0 + (p-1)\int_0^\infty e^{-x} x^{p-2}\, dx$$

$$= (p-1)\Gamma(p-1), \quad p > 1$$

กรณีที่ p เป็นจำนวนเต็มบวกคือ $p = n$ จะได้

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$$

$$= (n-1)(n-2)\Gamma(n-2)$$

$$= (n-1)(n-2) \ldots 3.2.1\ \Gamma(1)$$

แต่ $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 1$

ฉะนั้น $\Gamma(n) = (n-1)!$

นิยาม 5.3.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี p.d.f เป็น

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x} , & x > 0 \\ 0 , & \text{ค่าอื่นของ } x \end{cases}$$

สำหรับค่าคงที่ α และ r บางตัวที่ $\alpha > 0$, $r > 0$

เรียก X ว่ามีการแจกแจงแบบแกมมา (Gamma Distribution) มี α, r เป็นพารามิเตอร์

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.3.2 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

1. จะแสดงว่า $f(x) \geq 0$

จาก $f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x} \geq 0$ เพราะว่า $\alpha > 0$, $x > 0$ และ $r > 0$

2. จะแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{0}^{\infty} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x} d(\alpha x)$$

$$= \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r)} = 1$$

ทฤษฎี 5.3.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีการแจกแจงแบบแกมมา ซึ่งมี α และ r เป็นพารามิเตอร์ แล้ว $E(X) = \frac{r}{\alpha}$ และ $V(X) = \frac{r}{\alpha^2}$

พิสูจน์

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{\alpha}{\Gamma(r)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(r)} \int_{0}^{\infty} (\alpha x)^{(r+1)-1} e^{-\alpha x}\, d(\alpha x)$$

$$= \frac{\Gamma(r+1)}{\alpha\,\Gamma(r)}$$

$$= \frac{r\,\Gamma(r)}{\alpha\,\Gamma(r)}$$

$$= \frac{r}{\alpha}$$

$$E(X^2) = \int_{0}^{\infty} x^2 \frac{\alpha}{\Gamma(r)} e^{-\alpha x} (\alpha x)^{r-1} dx = \frac{1}{\alpha^2\Gamma(r)} \int_{0}^{\infty} (\alpha x)^{(r+2)-1} e^{-\alpha x} d(\alpha x)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2\Gamma(r)} \Gamma(r+2)$$

$$= \frac{r(r+1)\Gamma(r)}{\alpha^2\Gamma(r)}$$

ฉะนั้น $V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

$$= \frac{r(r+1)}{\alpha^2} - \frac{r^2}{\alpha^2}$$

$$V(X) = \frac{r}{\alpha^2}$$

5.4 การแจกแจงแบบไค-สแคว (The Chi-Square Distribution)

เป็นผลตามมาจากการแจกแจงแบบแกมม่า โดยกำหนด $\alpha = \frac{1}{2}$, $r = \frac{n}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

นิยาม 5.4 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งมี p.d.f เป็น

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} , x > 0$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n บางตัว

เรียก X ว่ามีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ มี degree of freedom เท่ากับ n (n เป็นพารามิเตอร์) เขียนย่อว่า $X \sim \chi^2_n$ หมายถึง X มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ มี degree of freedom เท่ากับ n

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.4 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งการพิสูจน์อาศัยหมายเหตุของนิยาม 5.3.2

ทฤษฎี 5.4 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ ซึ่งมี n เป็นพารามิเตอร์แล้ว E(X) = n และ V(X) = 2n

พิสูจน์ โดยทฤษฎี 5.3.2

5.5 การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล(The Exponential Distribution)

การแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล เป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงแบบแกมมา ที่มี r = 1

นิยาม 5.5 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี p.d.f เป็น

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} , \quad x > 0$$

สำหรับค่าคงที่ α บางตัวที่ α > 0

เรียก X ว่ามีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียลที่มี α เป็นพารามิเตอร์

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.5 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งการพิสูจน์ อาศัยหมายเหตุของนิยาม 5.3.2

ทฤษฎี 5.5 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล ซึ่งมี α เป็นพารามิเตอร์ แล้ว $E(X) = \frac{1}{\alpha}$ และ $V(X) = \frac{1}{\alpha^2}$

พิสูจน์ โดยทฤษฎี 5.3.2

5.6 การแจกแจงแบบเบต้า (The Beta Distribution)

นิยาม 5.6.1 Beta Function กำหนดด้วยสัญลักษณ์ β มีนิยามดังนี้

$$\beta(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx \quad \text{สำหรับ } s > 0,\ t > 0$$

นิยาม 5.6.2 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมี p.d.f เป็น

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(s,t)}\, x^{s-1}(1-x)^{t-1} & ,\ 0 < x < 1 \\ 0 & ,\ \text{ค่าอื่นของ } x \end{cases}$$

สำหรับค่าคงที่ s และ t บางตัวที่ $s > 0,\ t > 0$

เรียก X ว่ามีการแจกแจงแบบเบต้า ที่มี s, t เป็นพารามิเตอร์

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.6.2 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

1. จะแสดงว่า $f(x) \geq 0$

$$f(x) = \frac{1}{\beta(s,t)}\, x^{s-1}(1-x)^{t-1} \geq 0 \quad \text{เพราะค่าของ}x \text{ อยู่ในช่วง } 0 \text{ ถึง } 1$$

2. จะแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{\beta(s,t)} x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta(s,t)} \int_{0}^{1} x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta(s,t)} \beta(s,t) = 1$$

<u>ทฤษฎี 5.6.1</u>

$$\beta(s,t) = \frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad \text{สำหรับ} \quad s > 0,\ t > 0$$

<u>พิสูจน์</u>

จาก $\Gamma(s) = \int_{0}^{\infty} x^{s-1} e^{-x}\,dx,\ s > 0$

$$\Gamma(t) = \int_{0}^{\infty} y^{t-1} e^{-y}\,dy,\ t > 0$$

ให้ $x = \frac{u^2}{2}$, $y = \frac{v^2}{2}$ จะได้ $dx = udu$ และ $dy = vdv$

$$\therefore \Gamma(s)\,\Gamma(t) = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \left(\frac{u^2}{2}\right)^{s-1} \left(\frac{v^2}{2}\right)^{t-1} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot e^{-\frac{v^2}{2}}\, u.v\, dudv$$

ให้ $u = r\cos\theta$ และ $v = r\sin\theta$ ได้ $dudv = rdrd\theta$

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \left(\frac{r^2\cos^2\theta}{2}\right)^{s-1} \left(\frac{r^2\sin^2\theta}{2}\right)^{t-1} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot$$

$$r^2 \sin\theta\cos\theta \, rdr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \left(\frac{r^2}{2}\right)^{s+t-1} (\cos\theta)^{2s-1}(\sin\theta)^{2t-1} \cdot$$

$$e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\theta$$

ให้ $w = \frac{r^2}{2}$ $\therefore dw = rdr$

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^{\infty} w^{s+t-1} e^{-w} dw \cdot \int_0^{\pi/2} 2(\cos\theta)^{2s-1}(\sin\theta)^{2t-1} d\theta$$

แต่ $\Gamma(s+t) = \int_0^{\infty} e^{-w}(w)^{s+t-1} dw$

และ $\beta(s,t) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2s-1}(\sin\theta)^{2t-1} d\theta$ ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

จาก $\beta(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx$

ถ้าให้ $x = \sin^2\theta$ จะได้ $1 - x = 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

ดังนั้น $\beta(s,t) = \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{s-1} (\cos^2\theta)^{t-1} \cdot 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$$\beta(s,t) = 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2s-1}\theta \cos^{2t-1}\theta \, d\theta$$

ฉะนั้น $\Gamma(s)\Gamma(t) = \Gamma(s+t) \cdot \beta(s,t)$

นั่นคือ $\beta(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

<u>ทฤษฎี 5.6.2</u> ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบต้า ซึ่งมี s,t เป็น พารามิเตอร์แล้ว $E(X) = \frac{s}{s+t}$ และ $V(X) = \frac{st}{(s+t+1)(s+t)^2}$

<u>พิสูจน์</u>

$$E(X) = \int_0^1 x\ f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\beta(s,t)}\ x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^s}{\beta(s,t)}\ (1-x)^{t-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta(s,t)} \int_0^1 x^{(s+1)-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

$$= \frac{\beta(s+1,t)}{\beta(s,t)}$$

$$= \frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t+1)} \cdot \frac{\Gamma(s+t)}{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}$$

$$= \frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(s+t)}{\Gamma(s+t+1)\,\Gamma(s)}$$

$$E(X) = \frac{s\,\Gamma(s)\,\Gamma(s+t)}{(s+t)\,\Gamma(s+t)\,\Gamma(s)} = \frac{s}{s+t}$$

$$E(X^2) = \int_0^1 \frac{x^2 x^{s-1}(1-x)^{t-1}}{\beta(s,t)}\,dx$$

$$= \frac{1}{\beta(s,t)} \int_0^1 x^{s+2-1}\ (1-x)^{t-1}\,dx$$

$$= \frac{\beta(s+2,t)}{\beta(s,t)}$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(s+2)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t+2)} \cdot \frac{\Gamma(s+t)}{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}$$

$$= \frac{(s+1)\,\Gamma(s+1)\,\Gamma(s+t)}{(s+t+1)\,\Gamma(s+t+1)\,\Gamma(s)}$$

$$= \frac{(s+1)\,s\,\Gamma(s)\,\Gamma(s+t)}{(s+t+1)(s+t)\,\Gamma(s+t)\,\Gamma(s)}$$

$$= \frac{s(s+1)}{(s+t+1)(s+t)}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= \frac{s(s+1)}{(s+t+1)(s+t)} - \frac{s^2}{(s+t)^2}$$

$$= \frac{s^3 + s^2 + s^2t + st - s^3 - s^2t - s^2}{(s+t+1)(s+t)^2}$$

$$= \frac{st}{(s+t+1)(s+t)^2}$$

5.7 <u>การแจกแจงแบบเออแลง</u> (Erlang Distribution)

การแจกแจงแบบเออแลงเป็นกรณีพิเศษของการแจกแจงแบบแกมมา ที่มี α ในนิยาม 5.3.2 เป็น 1

<u>นิยาม 5.7</u> ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี p.d.f เป็น

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}\, e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

สำหรับค่าคงที่ α บางตัวที่ $\alpha > 0$

เรียกx ว่ามีการ<u>แจกแจงแบบเออแลง</u>ที่มี α เป็นพารามิเตอร์

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.7 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งการพิสูจน์ อาศัยหมายเหตุของนิยาม 5.3.2

ทฤษฎี 5.7 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีการแจกแจงแบบเออแลง ซึ่งมี α เป็นพารามิเตอร์ แล้ว $E(X) = \alpha$ และ $V(X) = \alpha$

พิสูจน์ โดยทฤษฎี 5.3.2

5.8 การแจกแจงแบบไวบูล (Weibull Distribution)

นิยาม 5.5 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องซึ่งมี p.d.f เป็น

$$f(x) = \begin{cases} abx^{b-1} e^{-ax^b}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

สำหรับค่าคงที่ a, b บางตัวที่ $a > 0$, $b > 0$

เรียก X ว่ามีการแจกแจงแบบไวบูลที่มี a, b เป็นพารามิเตอร์

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.8 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

1. จะแสดงว่า $f(x) \geq 0$

$a, b > 0$ และ $x^{b-1} > 0$, $e^{-ax^b} > 0$ ดังนั้น $f(x) \geq 0$

2. จะแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} abx^{b-1} e^{-ax^b}\,dx$$

$$= -\int_{0}^{\infty} e^{-ax^b}\,d(-ax^b)$$

$$= -\left[e^{-ax^b}\right]_0^{\infty} = -(-1) = 1$$

<u>ทฤษฎี 5.8</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีการแจกแจงแบบไวบูล ซึ่งมี a,b เป็นพารามิเตอร์แล้ว $E(X) = a^{-\frac{1}{b}} \Gamma(1 + \frac{1}{b})$ และ

$$V(X) = a^{-\frac{2}{b}} \left[\Gamma(1 + \tfrac{2}{b}) - \Gamma^2(1 + \tfrac{1}{b}) \right]$$

<u>พิสูจน์</u>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{\infty} abx^{b}\, e^{-ax^{b}}\, dx$$

ให้ $u = ax^b$ ฉะนั้น $u \in (0,\infty)$

$$dx = \frac{du}{abx^{b-1}} \quad \text{และ} \quad x = \left(\frac{u}{a}\right)^{\frac{1}{b}}$$

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} a^{-\frac{1}{b}}\, u^{\frac{1}{b}}\, e^{-u}\, du$$

$$= a^{-\frac{1}{b}} \int_{0}^{\infty} e^{-u}\, u^{(1 + \frac{1}{b} - 1)}\, du$$

$$= a^{-\frac{1}{b}} \Gamma(1 + \tfrac{1}{b})$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} abx^{b+1}\, e^{-ax^{b}}\, dx$$

ให้ $u = ax^b$

$$E(X^2) = \int_{0}^{\infty} a^{-\frac{2}{b}}\, u^{\frac{2}{b}}\, e^{-u}\, du = a^{-\frac{2}{b}} \int_{0}^{\infty} u^{(1 + \frac{2}{b} - 1)}\, e^{-u}\, du$$

$$= a^{-\frac{2}{b}} \Gamma(1 + \tfrac{2}{b})$$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= a^{-\frac{2}{b}}\Gamma(1+\tfrac{2}{b}) - a^{-\frac{2}{b}}\Gamma^2(1+\tfrac{1}{b})$$

$$= a^{-\frac{2}{b}}\left[\Gamma(1+\tfrac{2}{b}) - \Gamma^2(1+\tfrac{1}{b})\right]$$

5.9 <u>การแจกแจงแบบลอกนอร์มอล</u> (Lognormal distribution)

<u>นิยาม 5.9</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี p.d.f เป็น

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\,\delta\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\delta^2}} & , x > 0 \\ 0 & , x \le 0 \end{cases}$$

สำหรับค่าคงที่ μ และ δ บางตัวที่ $\delta > 0$

เรียก X ว่ามีการแจกแจง<u>แบบลอกนอร์มอล</u>ที่มี μ และ δ เป็นพารามิเตอร์

<u>หมายเหตุ</u> ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.9 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

1. จะแสดงว่า $f(x) \geq 0$

เพราะว่า $x > 0$, $\delta > 0$ ดังนั้น $\dfrac{1}{x\delta\sqrt{2\pi}} > 0$

$$e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{\delta^2}} > 0$$ ฉะนั้น $f(x) > 0$

2. จะแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . dx$$

ให้ $y = \ln x \quad \therefore y \in (-\infty, \infty)$

$$x = e^{y} \qquad dx = e^{y}\,dy$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^{y}\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} . e^{y} . dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} . dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} . \sqrt{2\pi}\,\sigma$$

$$= 1$$

<u>ทฤษฎี 5.9</u> ถ้า x เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีการแจกแจงแบบลอกนอร์มอล ซึ่งมี μ, σ เป็นพารามิเตอร์ แล้ว

$$E(X) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2+\mu} \quad \text{และ} \quad V(X) = (e^{\sigma^2}-1)e^{\sigma^2+2\mu}$$

<u>พิสูจน์</u> $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{x}{x\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . dx$$

ให้ $y = (\ln x-\mu) \quad \therefore \ y \in (-\infty,\infty)$

$$x = e^{\mu+y} \,.\, dx = e^{\mu+y}\, dy$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \,.\, e^{\mu+y} \,.\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(y-\sigma^2)^2/2\sigma^2 + \sigma^4+2\sigma^2\mu/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \,.\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\sigma)^2}{2\sigma^2}} \,.\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2+\mu} \,.\, dy$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma^2+\mu} \,.\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\sigma)^2}{2\sigma^2}} \,.\, dy$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma^2+\mu} \,.\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \,.\, \sqrt{2\pi}\,.\,\sigma$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sigma^2+\mu}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,.\, dx$$

ให้ $y = \ln x-\mu \quad \therefore \ y \in (-\infty,\infty)$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\,y+\mu}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{y+\mu} \cdot dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-2\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \frac{4\sigma^4+4\sigma^2\mu}{2\sigma^2}} . dy$$

$$= e^{2\sigma^2+2\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-2\sigma^2)^2}{2\sigma^2}} \cdot dy$$

$$= e^{2\sigma^2+2\mu} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \sqrt{2\pi}\,\sigma$$

$$E(X^2) = e^{2\sigma^2+2\mu}$$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = e^{2\sigma^2+2\mu} - e^{\sigma^2+2\mu}$$

$$= (e^{\sigma^2}-1)\; e^{\sigma^2+2\mu}$$

5.10 <u>การแจกแจงแบบ Cauchy</u> (Cauchy Distribution)

<u>นิยาม 5.10</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี p.d.f เป็น

$$f(x) = \frac{\theta}{\pi} \cdot \frac{1}{\theta^2 + (x-\mu)^2} , -\infty < x < \infty$$

สำหรับค่าคงที่ μ, θ บางตัวที่ $\theta > 0$ เรียก X ว่ามีการแจกแจงแบบ <u>cauchy</u> ซึ่งมี μ, θ เป็นพารามิเตอร์

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.10 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

1. จะแสดงว่า $f(x) \geq 0$

เพราะว่า $\sigma > 0$, $(x-\mu)^2 > 0$ ดังนั้น $f(x) > 0$

2. จะแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \cdot dx$$

ให้ $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $dy = \frac{dx}{\sigma}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan y \Big]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right] = 1$$

สำหรับค่าความคาดหวังของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงแบบ cauchy หาค่าไม่ได้ (does not exist)

เนื่องจาก $E(X) = \frac{\sigma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{1+y^2}\,dy + \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2}$

แต่ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\,dy}{1+y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} = \ln(1+y^2) \Big|_{-\infty}^{\infty}$ ซึ่งหาค่าไม่ได้ ดังนั้น ค่าความคาดหวัง $E(X)$ และค่าความแปรปรวน $V(X)$ จึงหาค่าไม่ได้

5.11 การแจกแจงแบบ t หรือ Student's-t (t-distribution)

การแจกแจงแบบ t หรือแบบ student's-t จะนิยามในรูปฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม โดย $T = U/V$ เมื่อ U เป็น $N(0,1)$ และ $V \sim \chi^2_n$ และ U,V เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ ซึ่งจะได้แสดงรายละเอียดภายหลัง

นิยาม 5.11 ถ้า T เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี p.d.f เป็น

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-(\frac{n+1}{2})}, \quad -\infty < t < \infty$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n บางตัวเรียก T ว่ามีการแจกแจงแบบ t หรือ student's-t ซึ่งมี n เป็นพารามิเตอร์

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.11 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

1. จะแสดงว่า $f(t) \geq 0$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-(\frac{n+1}{2})} \geq 0$$ เพราะ t ยกกำลังสองเป็นบวกเสมอ

2. จะแสดงว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{t^2}{n} + 1)^{-(\frac{n+1}{2})} .dt$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{t^2}{n} + 1)^{-(\frac{n+1}{2})} .dt$$

ให้ $\sqrt{(\frac{t^2}{n} + 1)} = y$

$\therefore\ t^2 = n(y^2-1)\ ,\ \ t = n^{\frac{1}{2}} (y^2-1)^{\frac{1}{2}}$ สำหรับ $t \geq 0$

$$dt = n^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2}(y^2-1)^{-\frac{1}{2}} d(y^2-1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\,\Gamma(\frac{1}{2})} (y^2)^{-(\frac{n+1}{2})} . n^{\frac{1}{2}} .$$

$$\tfrac{1}{2} (y^2-1)^{-\frac{1}{2}} d(y^2-1)$$ โดยที่ $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$= \frac{1}{\beta(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})} \int_{0}^{\infty} \frac{(y^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\left[1+(y^2-1)\right]^{\frac{n+1}{2}}} .d(y^2-1)$$

<u>หมายเหตุ</u> $\int_{0}^{1} x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx = \int_{0}^{\infty} \frac{y^{s-1}}{(1+y)^{s+t}} .dy$ โดยให้ $y = \frac{x}{1-x}$

ฉะนั้น $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\beta(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})} . \beta(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}) = 1$

<u>ทฤษฎี 5.11</u> ถ้า T เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีการแจกแจงเป็นแบบ t หรือ student's-t ที่มี n เป็นพารามิเตอร์แล้ว $E(T) = 0$ ถ้า $n \neq 1$ และ $V(T) = \frac{n}{n-2}$ ถ้า $n > 2$

<u>พิสูจน์</u> $$E(T) = \int_{-\infty}^{\infty} t.f(t)\,dt$$

$$= \frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-(\frac{n+1}{2})} d\left(\frac{t^2}{n}+1\right)$$

$$= \frac{n}{2\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left. \frac{(\frac{t^2}{n}+1)^{-(\frac{n+1}{2})}}{-(\frac{n+1}{2})+1} \right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= 0$$

$$E(T^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-(\frac{n+1}{2})} \cdot dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-(\frac{n+1}{2})} \cdot dt$$

ให้ $\sqrt{(1+\frac{t^2}{n})} = y$

$\therefore t^2 = n(y^2-1)$, $t = n^{\frac{1}{2}}(y^2-1)^{\frac{1}{2}}$ สำหรับ $t \geq 0$

$$dt = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}(y^2-1)^{-\frac{1}{2}}\, d(y^2-1)$$

$$E(T^2) = 2\int_0^{\infty} n(y^2-1)\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}(y^2)^{-(\frac{n+1}{2})} \cdot \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2}(y^2-1)^{-\frac{1}{2}}\,d(y^2-1)$$

$$= \frac{n\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty}(y^2-1)^{\frac{1}{2}}\,(y^2)^{-(\frac{n+1}{2})}\,d(y^2-1)$$

$$= \frac{n\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{\infty}\frac{(y^2-1)^{\frac{3}{2}-1}}{\left[1+(y^2-1)\right]^{\frac{n-2}{2}+\frac{3}{2}}}\,d(y^2-1)$$

จาก $\beta(s,t) = \int_0^{\infty}\frac{y^{s-1}}{(1+y)^{s+t}}\,dy$

$$E(T^2) = \frac{n\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\beta(\tfrac{3}{2},\tfrac{n-2}{2})$$

$$= \frac{n\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}$$

$$= \frac{n\,\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}$$

$$= \frac{n\cdot\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}-1} = \frac{n}{n-2}$$

$$V(T) = E(T^2) - \left[E(T)\right]^2$$

$$= \frac{n}{n-2}$$

5.12 <u>การแจกแจงแบบ F</u> (F distribution)

การแจกแจงแบบ F จะนิยามในรูปฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม $F = \frac{U/m}{V/n}$ โดยที่ U และ V มีการแจกแจงแบบ ไค-สแควมี m, n เป็น degree of freedom ตามลำดับ ซึ่งจะได้แสดงรายละเอียดภายหลัง

<u>นิยาม 5.12</u> ถ้า F เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี p.d.f เป็น

$$f(w) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, w^{\frac{m}{2}-1}(1+w)^{-(\frac{m+n}{2})}, \quad w > 0$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก m และ n บางตัว

เรียก F ว่ามี<u>การแจกแจงแบบ F</u> มี (m, n) เป็นพารามิเตอร์

<u>หมายเหตุ</u> ฟังก์ชัน f ในนิยาม 5.12 สอดคล้องคุณสมบัติสองข้อแรกของนิยาม 3.2.2 ของการเป็น p.d.f ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

1. จะแสดงว่า $f(w) \geq 0$

   เพราะว่า $w > 0$ ดังนั้น $f(w) > 0$

2. จะแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\,dw = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\,dw = \int_{0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, w^{\frac{m}{2}-1}(1+w)^{-(\frac{m+n}{2})}\,dw$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_{0}^{\infty} w^{\frac{m}{2}-1}(1+w)^{-(\frac{m+n}{2})}\,dw$$

ให้ $w = \frac{u}{1-u}$ ดังนั้น $u = \frac{w}{1+w}$ และ $u \in (0,1)$ เมื่อ $w \in (0,\infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(w)\,dw = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 \frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(1-u)^{\frac{m}{2}-1}} \cdot \frac{1}{(1-u)^{-(\frac{m+n}{2})}} \cdot \frac{du}{(1-u)^2}$$

$$= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})} \int_0^1 u^{\frac{m}{2}-1}(1-u)^{\frac{n}{2}-1}\,du$$

$$= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2})} \cdot \beta(\frac{m}{2},\frac{n}{2}) = 1$$

<u>ทฤษฎี 5.12</u> ถ้า F เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มีการแจกแจงเป็นแบบ F ที่มี (m,n) เป็นพารามิเตอร์แล้ว $E(F) = \frac{m}{n-2}$ ถ้า $n > 2$

$$V(F) = \frac{2m(m+n-2)}{(n-2)^2(n-4)} \quad \text{ถ้า } n > 4$$

<u>พิสูจน์</u> $$f(w) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} w^{\frac{m}{2}-1}(1+w)^{-(\frac{m+n}{2})}$$

ให้ $w = \frac{u}{1-u}$ ดังนั้น $u = \frac{w}{1+w}$

$$E(F) = \int w\, f(w)\,dw$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} w^{\frac{m}{2}}(1+w)^{-(\frac{m+n}{2})}\,dw$$

$$E(F) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 \frac{u^{\frac{m}{2}}}{(1-u)^{m/2}} \cdot \frac{1}{(1-u)^{-\frac{m+n}{2}}} \cdot \frac{du}{(1-u)^2}$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \int_0^1 u^{\frac{m}{2}} (1-u)^{\frac{n}{2}-2}\, du$$

$$= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \cdot \beta(\frac{m}{2}+1, \frac{n}{2}-1)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)\,\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{m}{2}+\frac{n}{2})}$$

$$= \frac{\frac{m}{2}\Gamma(\frac{m}{2}) \cdot \Gamma(\frac{n}{2}-1)}{\Gamma(\frac{m}{2})(\frac{n}{2}-1)\,\Gamma(\frac{n}{2}-1)}$$

$$= \frac{m}{n-2}$$

$$E(w^2) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\,\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^\infty w^{\frac{m}{2}+1} (1+w)^{-\frac{m+n}{2}}\, dw$$

ให้ $u = \frac{w}{1+w}$ ดังนั้น $w = \frac{u}{1-u}$

$$E(w^2) = \frac{1}{\beta(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \int_0^1 \frac{u^{\frac{m}{2}+1}}{(1-u)^{\frac{m}{2}+1}} \cdot \frac{1}{(1-u)^{-\frac{m+n}{2}}} \cdot \frac{du}{(1-u)^2}$$

$$= \frac{1}{\beta(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \int_0^1 u^{\frac{m}{2}+1} (1-u)^{\frac{n}{2}-3}\, du$$

$$E(w^2) = \frac{1}{\beta(\frac{m}{2}, \frac{n}{2})} \beta(\frac{m}{2} + 2, \frac{n}{2} - 2)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + 2) \Gamma(\frac{n}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{m}{2} + \frac{n}{2})}$$

$$= \frac{(\frac{m}{2} + 1)(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{n}{2} - 2)}{\Gamma(\frac{m}{2})(\frac{n}{2} - 1)(\frac{n}{2} - 2) \Gamma(\frac{n}{2} - 2)}$$

$$= \frac{(m + 2)m}{(n - 2)(n - 4)}$$

$$V(F) = E(F^2) - \left[E(F)\right]^2$$

$$= \frac{m(m+2)}{(n-2)(n-4)} - \frac{m^2}{(n-2)^2}$$

$$= \frac{2m(m+n-2)}{(n-2)^2(n-4)}$$
