บทที่ 6

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

ก่อนที่จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรสุ่ม จะพูดถึงทฤษฎีนำ 2 ทฤษฎี ต่อไปนี้

__ทฤษฎีนำ 6.0.1__ ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม ที่มี M_X เป็นโมเมนเจนเนอเรติงฟังก์ชัน ถ้า $Y = aX + b$ เป็นตัวแปรสุ่ม จะได้ $M_Y(t) = e^{bt}M_X(at)$

__พิสูจน์__

$$M_Y(t) = E(e^{Yt}) = E(e^{(aX+b)t})$$

$$= e^{bt}\, E(e^{atX})$$

$$= e^{bt}\, M_X(at)$$

__ทฤษฎีนำ 6.0.2__ ถ้า X, Y เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ และ $Z = X + Y$ ดังนั้น m.g.f ของ Z จะเท่ากับผลคูณของ m.g.f ของ X และ Y กล่าวคือ

$M_Z(t) = M_X(t) . M_Y(t)$ เมื่อ M_X, M_Y และ M_Z เป็น m.g.f ของ X, Y และ Z ตามลำดับ

__พิสูจน์__

$$M_Z(t) = E(e^{Zt}) = E(e^{(X+Y)t})$$

$$= E(e^{Xt} . e^{Yt})$$

$$= E(e^{Xt}) . E(e^{Yt}) \quad \text{โดยทฤษฎี 3.6.2}$$

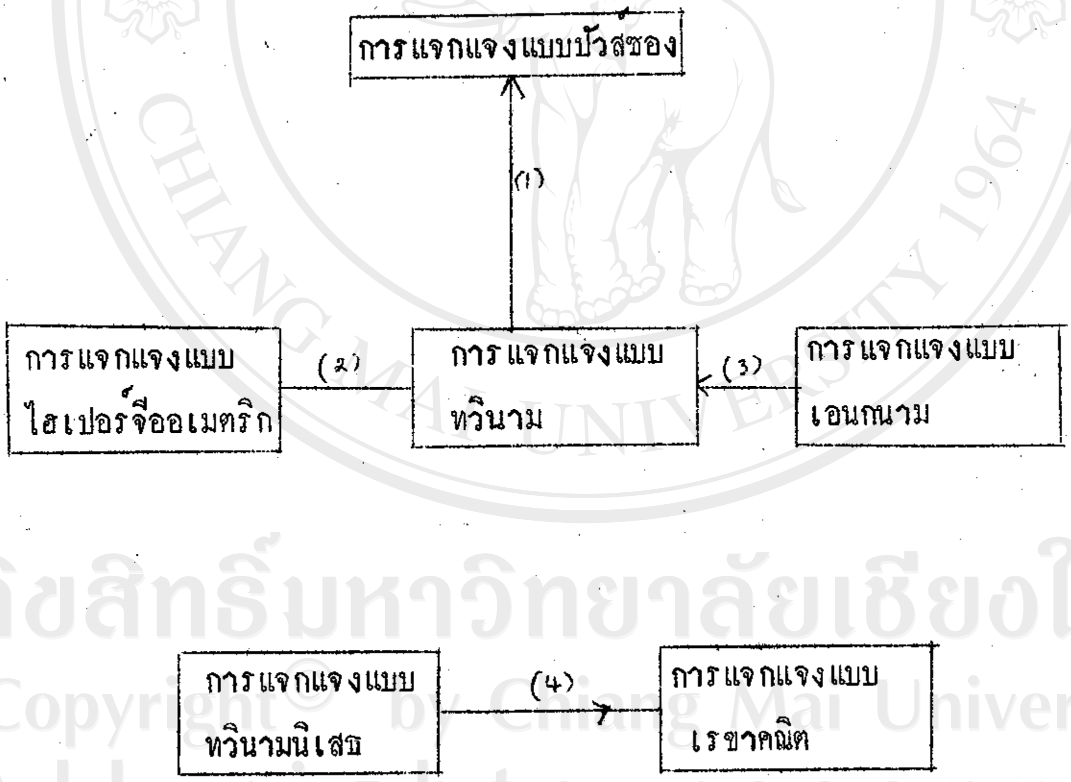
$$= M_X(t) . M_Y(t)$$

ถ้ามีตัวแปรสุ่มอิสระ n ตัวแปร โดยวิธี Mathematical Induction จะได้ว่า ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ และ Z เป็นตัวแปรสุ่ม ซึ่ง $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ จะได้ $M_Z(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$

6.1 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง</u>

ในบทนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์ และความสัมพันธ์ของตัวแปรสุ่มเหล่านั้นสามารถเขียนแสดงเป็นแผนผังได้ดังนี้

<u>รูป ก.</u>



<u>หมายเหตุ</u> $\boxed{a} \longrightarrow \boxed{b}$ หมายถึงภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสมบาง ประการ จะทำให้การแจกแจงแบบ a เข้าใกล้การแจกแจงแบบ b ในบางลักษณะ (In some sense)

6.1.1 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบทวินามและการแจกแจงแบบปัวส์ซอง</u>

แสดงให้เห็นลักษณะต่าง ๆ ดังนี้

การแจกแจงแบบทวินาม	การแจกแจงแบบปัวส์ซอง
1. มี (n, p_n) เป็นพารามิเตอร์	1. มี λ เป็นพารามิเตอร์
2. $f(x) = \binom{n}{x} p_n^x q_n^{n-x}$	2. $f(x) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$
3. $x = 0,1,2,\ldots,n$	3. $x = 0,1,2,\ldots$

<u>เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์</u>

ถ้าให้ $np_n = \lambda > 0$ จะได้ $\lim\limits_{n \to \infty} \binom{n}{x} p_n^x q_n^{n-x} = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปัวส์ซอง

<u>ทฤษฎี 6.1.1</u> ถ้า X_n เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินาม มี (n, p_n) เป็นพารามิเตอร์ $P(X_n = x) = \binom{n}{x} p_n^x q_n^{n-x}$ สำหรับทุก ๆ $n \geq 1$ ให้ $n p_n = \lambda$ สำหรับค่าคงที่ $\lambda > 0$ บางตัว จะได้

$\lim\limits_{n \to \infty} P(X_n = x) = \dfrac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปัวส์ซองมี λ เป็นพารามิเตอร์

<u>พิสูจน์</u> $P(X_n = x) = \binom{n}{x} p_n^x q_n^{n-x} = \binom{n}{x} p_n^x (1 - p_n)^{n-x}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!} p_n^x (1-p_n)^{n-x}$$

เนื่องจาก $n\, p_n = \lambda$ ดังนั้น $p_n = \frac{\lambda}{n}$

$$P(X_n = x) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \left[\frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \ldots \frac{(n-x+1)}{n}\right] \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!} \left[1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{(x-1)}{n}\right)\right] \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{n} \left[1 - \frac{\lambda}{n}\right]^{-x}$$

เมื่อ $n \to \infty$, $p_n \to 0$ จะได้ $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, ...
มีค่าใกล้ 1 และ $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$ มีค่าใกล้ 1

จากนิยามของ e, $e^{-\lambda} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} P(X_n = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

<u>สรุป</u> 1. เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์(1) ในรูป ก. คือ $n\, p_n$ เป็นค่าคงที่

2. ภายใต้เงื่อนไขในข้อ 1. ทำให้เราสามารถประมาณค่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบทวินามด้วยฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบปัวส์ซอง

<u>ตัวอย่าง 6.1.1</u> ชายคนหนึ่งซื้อสลากกินแบ่งงวดละฉบับ 120 งวดติดต่อกัน จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะถูกรางวัลเลขท้าย 2 ตัว

ก. 1 ครั้ง

ข. ไม่ต่ำกว่า 1 ครั้ง

<u>วิธีทำ</u> ความน่าจะเป็นที่สลากแต่ละฉบับจะถูกรางวัลเลขท้าย 2 ตัวคือ

$$p = \frac{1}{100} = 0.01$$

เขาซื้อ 120 งวดติดต่อกัน ดังนั้น $n = 120$

ถ้า X เป็นจำนวนครั้งที่ถูกรางวัล ต้องการหา

ก. $P(X = 1)$

การแจกแจงแบบทวินาม $P(X = 1) = \binom{120}{1}(0.01)^1(1-0.01)^{119}$

ซึ่งยากแก่การคำนวณ จึงใช้การแจกแจงแบบปัวส์ซองในการประมาณค่านี้

$$\lambda = np = 120 \times 0.01 = 1.2$$

$$P(X = 1) = e^{-1.2}(1.2)^1 = 0.3614$$

ข. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) =$

$$= 1 - \frac{e^{-1.2}(1.2)^0}{0!}$$

$$= 1 - 0.3012$$

$$= 0.6988$$

6.1.2 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมตริก และการแจกแจงแบบทวินาม

แสดงให้เห็นลักษณะต่าง ๆ ดังนี้

การแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมตริก	การแจกแจงแบบทวินาม
1. มี (m,n,k) เป็นพารามิเตอร์	1. มี (k,p) เป็นพารามิเตอร์
2. $f(x) = \dfrac{\binom{m}{x}\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}$	2. $f(x) = \binom{k}{x} p^x q^{k-x}$
3. $x = 0,1,2,\ldots,k$	3. $x = 0,1,2,\ldots,k$

เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์

ถ้าให้ $0 < p = \lim\limits_{m,n\to\infty} \dfrac{m}{m+n}$ และ $0 < q = \lim\limits_{m,n\to\infty} \dfrac{n}{m+n}$

และ $k \leq \min(m,n)$

จะได้ $$\lim_{m,n\to\infty} \frac{\binom{m}{x}\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}} = \binom{k}{x} p^x q^{k-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,k$$

<u>ทฤษฎี 6.1.2</u> x เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมตริก มี (m,n,k) เป็นพารามิเตอร์ สำหรับทุก ๆ $m \geq 1$, $n \geq 1$ ให้

$$p = \lim_{m,n\to\infty} \frac{m}{m+n}, \quad q = \lim_{m,n\to\infty} \frac{n}{m+n}$$

จะได้ $$\lim_{n\to\infty} P(X_n = x) = \binom{k}{x} p^x q^{k-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,k$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบทวินาม

<u>พิสูจน์</u> $P(X_n = x) = \dfrac{\binom{m}{x}\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}$

$$= \frac{m!\ n!\ (m+n-k)!}{(m-x)!\left[n-(k-x)\right]!(m+n)!} \cdot \frac{k!}{x!(k-x)!}$$

$$= \frac{\binom{k}{x} m(m-1)(m-2)\ldots(m-(x-1))n(n-1)\ldots\left[n-(k-x-1)\right]}{(m+n)\ldots\left[(m+n)-(k-1)\right]}$$

เอา $m + n$ หารทั้งเศษและส่วน

$$= \binom{k}{x}\left(\frac{m}{m+n}\right)\left(\frac{m}{m+n}-\frac{1}{m+n}\right)\ldots\left(\frac{m}{m+n}-\frac{(x-1)}{m+n}\right)\cdot\left(\frac{n}{m+n}\right)\left(\frac{n}{m+n}-\frac{1}{m+n}\right)$$

$$\ldots\left(\frac{n}{m+n}-\frac{(k-x)-1}{m+n}\right)\cdot\left[1\cdot\left(1-\frac{1}{m+n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m+n}\right)\right]^{-1}$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{m,n\to\infty} \dfrac{m}{m+n} = p$ และ $\lim\limits_{m,n\to\infty} \dfrac{n}{m+n} = q$

จะได้ $\lim\limits_{m,n\to\infty} \dfrac{\binom{m}{x}\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}} = \binom{k}{x} p^x q^{k-x}$

<u>สรุป</u> 1. เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์(2) ในรูป ก. คือ

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{m}{m+n} = p \quad \text{และ} \quad \lim_{m,n\to\infty} \frac{n}{m+n} = q$$

2. ภายใต้เงื่อนไขในข้อ 1 ทำให้เราสามารถประมาณค่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมตริกด้วยฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบทวินาม

ตัวอย่าง 6.1.2 มีหลอดไฟ 100 หลอด เป็นหลอดเสีย 20 หลอด ถ้าหยิบมาอย่างสุ่ม 10 หลอด หาความน่าจะเป็นที่จะเป็นหลอดเสีย 4 หลอด

วิธีทำ จากการแจกแจงแบบไฮเปอร์จีออเมตริก

จะได้ $m = 20$ $n = 80$ $k = 10$ $x = 4$ เมื่อ X เป็นจำนวนหลอดไฟเสียที่หยิบได้

$$P(X=4) = \frac{\binom{m}{x}\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}} = \frac{\binom{20}{4}\binom{80}{6}}{\binom{100}{10}} = \frac{\frac{20!}{16!\ 4!}\ \frac{80!}{74!\ 6!}}{\frac{100!}{90!\ 10!}}$$

จะเห็นว่าตัวเลขที่ปรากฏมีค่ามาก ทำให้ยากในการคำนวณ ฉะนั้นเราจึงประมาณค่าได้โดยใช้การแจกแจงแบบทวินาม โดยให้

$$p = \frac{m}{m+n} = \frac{20}{100} = 0.20 = \text{ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดเสีย}$$

$$q = 1 - p = 0.80$$

$$P(X = 4) = \binom{k}{x}p^x q^{k-x} = \binom{10}{4}(0.2)^4(0.8)^6 = 0.0881$$

6.1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบทวินามและการแจกแจงแบบเอนกนาม

เราทราบมาแล้ว หรือเห็นได้ชัดว่าเมื่อ k ในหัวข้อ 4.7 เท่ากับ 2 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบเอนกนาม จะกลายเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบทวินาม

ดังนั้นความสัมพันธ์ (3) ในรูป ก. จะเห็นได้ชัด

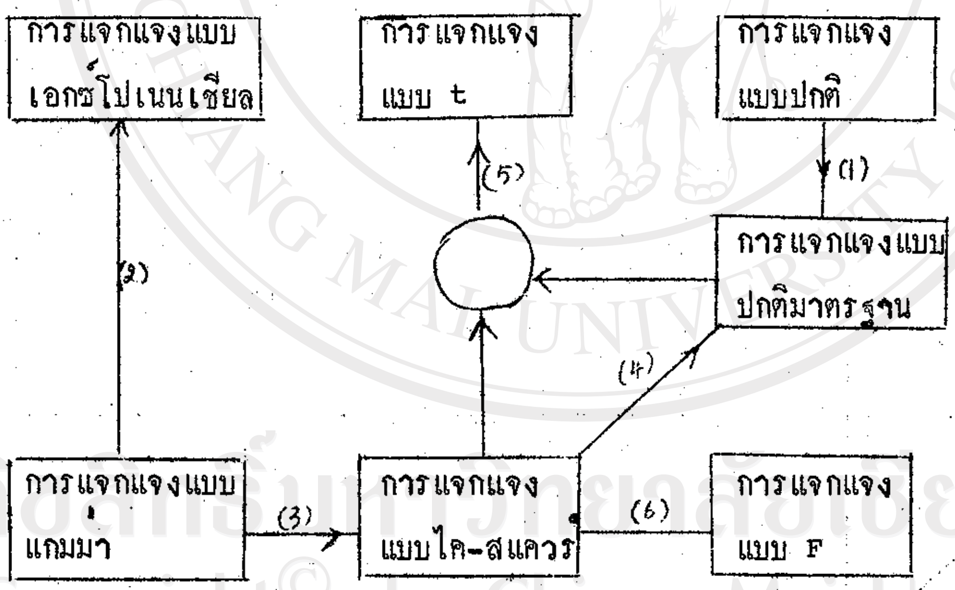
6.1.4 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบทวินามนิเสธและการแจกแจงแบบเรขาคณิต

เราทราบมาแล้ว หรือเห็นได้ชัดว่า เมื่อ k ในนิยาม 4.6 เป็น 1 ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบทวินามนิเสธ จะกลายเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบเรขาคณิต

ดังนั้นความสัมพันธ์ (4) ในรูป ก. จะเห็นได้ชัด

6.2 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

ในหัวข้อนี้ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ซึ่งมีเงื่อนไขต่าง ๆ ที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์ เงื่อนไขเหล่านั้นได้แก่ ความเกี่ยวข้องกันระหว่างค่าพารามิเตอร์ และเงื่อนไขอื่น ๆ ดังจะได้กล่าวต่อไป และความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้สามารถแสดงเป็นแผนผังได้ดังนี้



รูป ข.

6.2.1 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบปกติและการแจกแจงแบบปกติ-มาตรฐาน</u>

เห็นได้ชัดว่า ถ้า μ และ σ^2 ของนิยาม 5.2.1 เป็น 0 และ 1 ตามลำดับแล้ว p.d.f ของการแจกแจงแบบปกติจะกลายเป็น p.d.f ของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

6.2.2 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบแกมมาและการแจกแจงแบบเอกซ์-โปเนนเชียล</u>

เห็นได้ชัดว่า ถ้า r ในนิยาม 5.3.2 เท่ากับ 1 แล้ว p.d.f ของการแจกแจงแบบแกมมาจะกลายเป็น p.d.f ของการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนน-เชียล

6.2.3 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบแกมมาและการแจกแจงแบบ-ไค-สแควร์</u>

เห็นได้ชัดว่า ถ้า α และ r ในนิยาม 5.3.2 เป็น $\frac{1}{2}$ และ $\frac{n}{2}$, $n \in I^+$ ตามลำดับแล้ว p.d.f ของการแจกแจงแบบแกมมาจะกลายเป็น p.d.f ของการแจกแจงแบบไค-สแควร์

6.2.4 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบไค-สแควร์และการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน</u>

<u>การแจกแจงแบบไค-สแควร์</u>	<u>การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน</u>
1. มี n เป็นพารามิเตอร์	1. มี $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$
2. มี p.d.f เป็น $f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$	2. มี p.d.f เป็น $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$
3. $x > 0$	3. $-\infty < z < \infty$

เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ให้ $Y = X^2$ จะได้ Y มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ มี degree of freedom เท่ากับ 1 ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 6.2.4.1 ถ้า X มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน ให้ $Y = X^2$ แล้ว Y จะมีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ที่มี degree of freedom เท่ากับ 1

พิสูจน์ ให้ f เป็น p.d.f ของ X

และ g เป็น p.d.f ของ Y

$$\therefore\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty < x < \infty \quad \therefore\ y \geq 0$$

เมื่อ $Y = X^2$ จะหา g(Y) ดังนี้

สำหรับ $Y > 0$, $g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f(\sqrt{y}) + f(-\sqrt{y})\right]$

$$f(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}},\ f(-\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}$$

$$\therefore\ g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\,\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot y^{\frac{1}{2}-1} . e^{-\frac{y}{2}},\ y > 0,\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

ซึ่งเป็น p.d.f ของการแจกแจงไค-สแควร์ที่มี degree of freedom เป็น 1

<u>ทฤษฎี 6.2.4.2</u> ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ ซึ่งมีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานแล้ว $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ จะมีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ที่มี degree of freedom เท่ากับ n

<u>พิสูจน์</u> จากนิยามของ M.g.f ของ χ_n^2 เราทราบว่า

$$M_{\chi_n^2}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}$$

ทำนองเดียวกัน $M_{\chi_1^2}(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

ฉะนั้น โดยทฤษฎีนำ 6.0.2 จะได้

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdot M_{X_2}(t) \ldots M_{X_n}(t)$$

$$= (1 - 2t)^{-\frac{n}{2}}$$

ซึ่งเป็น m.g.f ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ ไค-สแควร์ที่มี degree of freedom เท่ากับ n (โดยทฤษฎี 3.5.2)

<u>สรุป</u> 1. เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์ (4) ในรูป ข. คือ $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ เมื่อ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

2. จากเงื่อนไขในข้อ 1 จะได้ว่า Y มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ที่มี n เป็น degree of freedom

6.2.5 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน การแจกแจงแบบไค-สแควร์ และการแจกแจงแบบ t

แสดงให้เห็นลักษณะต่าง ๆ ได้ดังนี้

การแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน	การแจกแจงแบบไค-สแควร์	การแจกแจงแบบ t
1. มี $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$	1. มี n เป็นพารามิเตอร์	1. มี n เป็นพารามิเตอร์
2. $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$	2. $f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}$	2. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cdot (\frac{t^2}{n}+1)^{-(n+1)/2}$
3. $-\infty < z < \infty$	3. $x > 0$	3. $-\infty < t < \infty$

เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์

อาศัยฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม $\frac{U}{V}$ เมื่อ U และ V เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ จะได้ว่า T มีการแจกแจงแบบ t ถ้า $T = \frac{U}{V}$

เมื่อ U มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

V มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์

ทฤษฎี 6.2.5 ถ้า U เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน V เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ ที่มี n เป็นพารามิเตอร์ และ U, V เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ แล้วตัวแปรสุ่ม T ซึ่ง $T = \frac{U}{V}$ จะมีการแจกแจงแบบ t ที่มี degree of freedom เท่ากับ n

พิสูจน์ ให้ g และ h เป็น p.d.f ของ U และ V ตามลำดับ

$$\therefore\ g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{2}} \quad , -\infty < u < \infty$$

$$h(v) = \frac{2(\frac{n}{2})^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\, v^{n-1}\, e^{-\frac{n}{2}v^2} \quad , 0 < v < \infty$$

ให้ $v = x,\ u = tx$ เมื่อ $x > 0$

โดยทฤษฎี 3.6.5 ถ้าให้ f เป็น p.d.f ของ T จะได้

$$f(t) = \int_0^\infty g(u)\ h(v)\ |v|\ dv$$

$$= \int_0^\infty xg(tx)\ h(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \left[x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(t^2x^2)}\ \frac{2(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\, x^{n-1} e^{-\frac{n}{2}x^2}\right] dx$$

$$= \frac{2(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^n e^{-\frac{x^2}{2}(t^2+n)}\ dx$$

ให้ $x = y(t^2+n)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \therefore\ dx = (t^2+n)^{-\frac{1}{2}}\ dy$

ฉะนั้น

$$f(t) = \frac{2^{-\frac{(n-1)}{2}}\ n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})\ \sqrt{\pi}} \int_0^\infty y^n (t^2+n)^{-\frac{n}{2}} . e^{-\frac{y^2}{2}} (t^2+n)^{-\frac{1}{2}}\ dy$$

$$= \frac{2^{-\frac{(n-1)}{2}} . n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}) . \sqrt{\pi}}\ (t^2+n)^{-\frac{(n+1)}{2}} \int_0^\infty y^n e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy$$

อาศัย $\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x}\,dx,\ p > 0$

ดังนั้น $\int_0^{\infty} y^n e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^{\infty} \left(\frac{y^2}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}\, d\left(\frac{y^2}{2}\right)$

$$= 2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$f(t) = \frac{2^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)}\; n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}} \cdot (t^2+n)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}\; 2^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{(n)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)} n^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}$$

$\therefore f(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ ซึ่งเป็น p.d.f ของการแจกแจงแบบ t

<u>สรุป</u>

1. เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์(5) ในรูป ข.คือ ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม $\frac{U}{V}$ เมื่อ U และ V เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ
2. จากเงื่อนไขในข้อ 1. ทำให้ $T = \frac{U}{V}$ มีการแจกแจงเป็นแบบ t เมื่อ U มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน V มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์

6.2.6 <u>ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงแบบไค-สแควร์ และการแจกแจงแบบ F</u>

แสดงให้เห็นลักษณะต่าง ๆ ได้ดังนี้

<u>การแจกแจงแบบไค-สแควร์</u>	<u>การแจกแจงแบบ F</u>
1. มี n เป็นพารามิเตอร์	1. มี (m,n) เป็นพารามิเตอร์
2. $f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$	2. $f(w) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} w^{\frac{m}{2}-1} (1+w)^{-\frac{m+n}{2}}$
3. $x > 0$	3. $w > 0$

<u>เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์</u>

อาศัยฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในรูป $\frac{U}{V}$ โดยที่ U และ V เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ จะได้ว่า Z มีการแจกแจงแบบ F ถ้า $Z = \frac{U/m}{V/n}$ เมื่อ U และ V มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ มี m,n เป็น degree of freedom ตามลำดับ ดังทฤษฎีต่อไปนี้

<u>ทฤษฎี 6.2.6</u> ถ้า U และ V เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์ มี m และ n เป็น degree of freedom ตามลำดับ แล้วตัวแปรสุ่ม Z ซึ่ง

$Z = \frac{U/m}{V/n}$ จะมีการแจกแจงแบบ F ที่มี (m,n) เป็นพารามิเตอร์

<u>พิสูจน์</u> ให้ g และ h เป็น p.d.f ของ U และ V ตามลำดับ

ดังนั้น $g(u) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot u^{\frac{m}{2}-1} \cdot e^{-\frac{u}{2}}$

$$h(v) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\ \Gamma(\frac{n}{2})}\ v^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{v}{2}}$$

จาก $Z = \frac{U/m}{V/n}$ ให้ $W = \frac{U}{V}$ ดังนั้น $Z = \frac{n}{m} W$

ให้ p.d.f ของ W เป็น f(w)

จากทฤษฎี 3.6.5 จะได้ $f(w) = \int_0^{\infty} g(vw)\,h(v)\ |v|\ dv$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(vw)^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot e^{-\frac{vw}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{v}{2}} \cdot v^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\ \Gamma(\frac{n}{2})}\, v\,dv$$

$$= \frac{w^{\frac{m}{2}-1} \cdot 2^{-(\frac{m+n}{2})}}{\Gamma(\frac{m}{2})\ \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{2}(w+1)}\ v^{\frac{m+n}{2}-2}\ dv$$

$$= \frac{w^{\frac{m}{2}-1}\ (1+w)^{-(\frac{m+n}{2})}}{\Gamma(\frac{m}{2})\ \Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{\infty} e^{-\frac{v}{2}(w+1)} \left[\frac{v(w+1)}{2}\right]^{\frac{(m+n)}{2}-1} \cdot d\left[v(\frac{w+1}{2})\right]$$

$$= \frac{w^{\frac{m}{2}-1}\ (1+w)^{-(\frac{m+n}{2})}}{\Gamma(\frac{m}{2})\ \Gamma(\frac{n}{2})}\ \Gamma(\frac{m+n}{2})$$

ดังนั้น $f(w) = \frac{(\frac{m+n}{2})}{(\frac{m}{2})\ \ (\frac{n}{2})}\ w^{\frac{m}{2}-1}\ (1+w)^{-(\frac{m+n}{2})}$ ซึ่งเป็น p.d.f

ของการแจกแจงแบบ F ที่มี (m,n) เป็นพารามิเตอร์

สรุป 1. เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์ (6) ในรูป ข. คือ ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในรูป $\frac{U}{V}$ เมื่อ U และ V เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ

2. จากเงื่อนไขในข้อ 1 ทำให้ $Z = \frac{U/m}{V/n}$ มีการแจกแจงเป็นแบบ F เมื่อ U และ V มีการแจกแจงแบบไค-สแควร์

6.3 The Central Limit Theorem

ทฤษฎี 6.3.1 " The Central Limit Theorem"

ถ้า $X_1, X_2, \ldots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ n ตัวแปร ซึ่งมีการแจกแจงเป็นอย่างเดียวกัน มี $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ ให้ $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ จะได้ว่า $E(Y) = n\mu$ และ $V(Y) = n\sigma^2$ และให้ Z_n ที่ $Z_n = \frac{Y - n\mu}{\sqrt{n\sigma}}$ จะมีการแจกแจงเข้าใกล้การแจกแจงแบบปกติมาตรฐานเมื่อ $n \to \infty$

พิสูจน์ จากที่กำหนด $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\mu$

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = n\sigma^2$$

พิจารณา m.g.f ของตัวแปรสุ่ม Z_n (จะแสดงว่า m.g.f ของ Z_n กับ m.g.f ของการแจกแจงแบบปกติมาตรฐานเป็นอย่างเดียวกัน)

ให้ M เป็น m.g.f ของ X_i

$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ จากทฤษฎีนำ 6.0.2 ได้ $M_Y(t) = [M(t)]^n$

และ Z_n เป็น linear function ของ Y ดังนั้นจากทฤษฎีบท 6.0.1 ได้

$$M_{Z_n}(t) = e^{-\sqrt{n}\mu/\sigma} \left[M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \right]^n$$

$$\ln M_{Z_n}(t) = -\frac{n\mu t}{\sigma} + n \ln M\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)$$

กระจาย M(t) ในแบบ Maclurin series

$$M(t) = 1 + M'(0)t + \frac{M''(0)t^2}{2!} + R, \quad R \text{ เป็น Remainder term}$$

จาก $M'(0) = \mu$ และ $M''(0) = \mu^2 + \sigma^2$

ดังนั้น $M(t) = 1 + \mu t + \left(\frac{\mu^2 + \sigma^2}{2}\right) t^2 + R$

$$\ln M_{Z_n}(t) = \frac{-\sqrt{n}\,\mu t}{\sigma} + n \ln \left[1 + \frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)}{2n\sigma^2} t^2 + R \right]$$

กระจาย ln(1 + x) แบบ Maclurin จะได้

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad |x| < 1$$

ในกรณีนี้ $x = \frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{(\mu^2 + \sigma^2)}{2n\sigma^2} t^2 + R$

ถ้า n มีค่ามากพอ x จะมีค่าน้อยกว่า 1 แทนค่า x จะได้

$$\ln M_{Z_n}(t) = -\frac{n\mu t}{\sigma} + n\left[\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + (\mu^2 + \sigma^2) \frac{t^2}{2n\sigma^2} + R - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu t}{\sqrt{n}\sigma} + (\mu^2 + \sigma^2)\frac{t^2}{2n\sigma^2} + R\right)^2 + \cdots \right]$$

คูณ n และบวกลบกัน จะมีพจน์หนึ่งทางขวามือที่เป็น $\frac{t^2}{2}$ นอกนั้นมีส่วนเป็น n ยกกำลังต่าง ๆ และพจน์ที่คูณกับ R มีค่าเป็น 0 เมื่อ $n \to \infty$ ดังนั้น ถ้าให้ $n \to \infty$ ได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} \ln M_{Z_n}(t) = \frac{t^2}{2}$$

และ $\lim\limits_{n \to \infty} M_{Z_n}(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$ ซึ่งเป็น m.g.f ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

ดังนั้นเราได้ว่า Z_n มีการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน

อาศัย Contral limit theorem การหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบต่าง ๆ สามารถหาค่าได้โดยใช้การแจกแจงแบบปกติ ซึ่งจะกล่าวต่อไป

6.4 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องและตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

อาศัย central limit theorem เมื่อ n มีค่ามาก ๆ เราพอจะประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องและแบบต่อเนื่องโดยอาศัยค่าความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน ซึ่งในหัวข้อนี้จะเป็นการแสดงตัวอย่างดังกล่าว

6.4.1 การประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบทวินามโดยอาศัยค่าความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน

ตัวอย่าง 6.4.1 ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 120 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้า 6 อย่างมาก 15 ครั้ง

วิธีทำ ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ลูกเต๋าขึ้นหน้า 6

x มีการแจกแจงแบบทวินามที่มี $p = \frac{1}{6}$, $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, $n = 120$

np = ค่าเฉลี่ย $= 120 \times \frac{1}{6} = 20$

$\sqrt{npq} = \sqrt{120 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{16.67} = 4.08$

= ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sigma$

ต้องการหา $P(X \leq 15) \sim P(X \leq 15.5)$

ขยายช่วงเพราะการแจกแจงแบบทวินามเป็นการแจกแจงแบบไม่ต่อเนื่อง

($a \sim b$ หมายถึง b เป็นค่าประมาณของ a)

$= P(Z < Z_0)$

ในที่นี้ $Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma}$ $\therefore Z_0 = \frac{15.5 - \bar{X}}{\sigma} = \frac{15.5 - 20}{4.08} = -1.1$

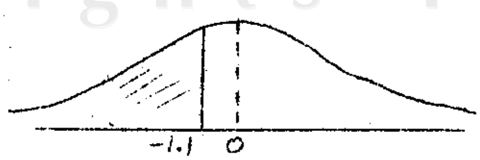
$P(X \leq 15) \sim P(Z \leq -1.1)$

$= 1 - P(Z > 1.1)$

$= 1 - 0.8643$

$= 0.1357$

ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นหน้า 6 อย่างมาก 15 ครั้ง มีค่าประมาณ 0.1357



6.4.2 <u>การประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบปัวส์ซองโดยอาศัยค่าความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน</u>

<u>ตัวอย่าง 6.4.2</u> ธนาคารแห่งหนึ่งโดยเฉลี่ยแล้วในแต่ละวันจะมีผู้โทรศัพท์เข้ามา 400 ครั้ง จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้โทรศัพท์เข้ามา 450 ครั้งในแต่ละวัน

ข. ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้โทรศัพท์เข้ามาไม่น้อยกว่า 450 ครั้งในแต่ละวัน

<u>วิธีทำ</u> ให้ x เป็นจำนวนครั้งที่จะมีผู้โทรศัพท์เข้ามาแต่ละวัน

และ $\lambda = 400$ ดังนั้นค่าเฉลี่ย $\sqrt{np} = \sqrt{400} = 20$

ต้องการหา

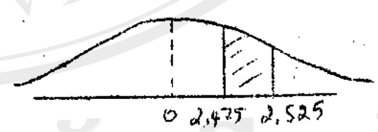
ก. $P(X = 450) \sim P(449.5 < X < 450.5)$ ขยายช่วงเพื่อให้คลุมค่าที่ต้องการ

$$= P(Z_2 < Z < Z_1)$$

ในที่นี้ $Z = \dfrac{X - \bar{X}}{\sigma}$

$$Z_1 = \frac{450.5 - 400}{20} = 2.525$$

$$Z_2 = \frac{449.5 - 400}{20} = 2.475$$



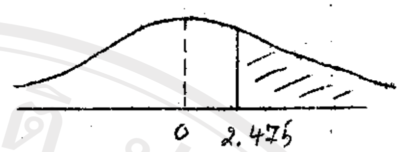
$$P(X = 450) \sim P(2.475 < Z < 2.525)$$

$$= 0.009 \quad \text{จากตารางค่า } Z$$

$\therefore$ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้โทรศัพท์เข้ามา 450 ครั้งในแต่ละวันประมาณ 0.009

ข. $P(X \geq 450) \sim P(X > 449.5)$

$$= P(Z > Z_0)$$



$$Z_0 = \frac{449.5 - 400}{20} = 2.475$$

$P(X \geq 450) \quad P(Z > 2.475)$

$$= 0.0067$$

∴ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้โทรศัพท์เข้ามาไม่น้อยกว่า 450 ครั้งในแต่ละวันประมาณ 0.0067

6.4.3 <u>การประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบทวินามนิเสธโดยอาศัยค่าความน่าจะเป็นแบบปกติมาตรฐาน</u>

<u>ตัวอย่าง 6.4.3</u> ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ที่ต้องการในการทดลองครั้งหนึ่งมีค่า 0.25 จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ที่ต้องการ 48 ครั้งในการทดลองทั้งหมดไม่เกิน 150 ครั้ง

<u>วิธีทำ</u> ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ทดลอง

ต้องการหา $P(X \leq 150)$ เมื่อ $r = 48$

$p =$ ความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ที่ต้องการในการทดลองแต่ละครั้ง

$= 0.25$

$q = 1 - p = 0.75$

$E(X)$ = ค่าเฉลี่ย $\frac{r}{p} = \frac{48}{0.25} = 192$

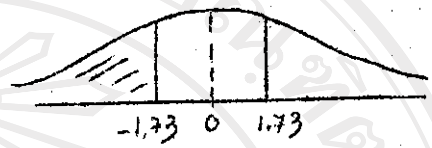
$V(X)$ = ค่าความแปรปรวน $= \frac{rq}{p^2} = \frac{(48)(0.75)}{(0.25)^2} = 576$

ต้องการหา $P(X \le 150) \sim P(X < 150.5)$

$$= P(Z < Z_0)$$

เมื่อ $Z_0 = \dfrac{150.5 - 192}{\sqrt{576}}$

$$= -1.73$$



$$P(X \le 150) \sim P(X < 150.5)$$
$$= P(Z < -1.73)$$
$$= 1 - P(Z > 1.73)$$
$$= 0.418$$

ความน่าจะเป็นที่จะได้เหตุการณ์ที่ต้องการ 48 ครั้ง ในการทดลองทั้งหมดไม่เกิน 150 ครั้ง ประมาณ 0.418

6.4.4 <u>การประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลายโดยอาศัยการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน</u>

<u>ตัวอย่าง 6.4.4</u> There are a number of independent noise voltages say V_i, $i = 1,2,\ldots,20$. Let V be the sum of the voltages recieved, ie $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$. Suppose that each of the random variables V_i is Uniform distributed over the interval $[0,10]$. Compute the probability that the total incoming voltage exceeds 105 volts.

V_i มีการกระจายแบบเสมอต้นเสมอปลายในช่วง $[0,10]$

$E(V_i) = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{0+10}{2} = 5$ ดังนั้น $E(V) = 5 \times 20 = 100$

$V(V_i) = \dfrac{(b-a)^2}{12} = \dfrac{100}{12}$ ดังนั้น $V(V) = \dfrac{100}{12} \times 20 = \dfrac{500}{3}$

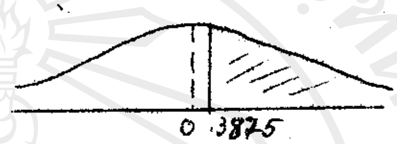
เปลี่ยน V เป็น Z ได้ $Z = \dfrac{V - E(V)}{\sqrt{V(V)}} = \dfrac{V - 100}{\sqrt{500/3}}$

ต้องการหา $P(V > 105) \sim P\left(Z > \dfrac{105 - 100}{10\sqrt{5/3}}\right)$

$$= P(Z > 0.3875)$$

$$= 0.352$$

$\therefore P(V > 105) \sim 0.352$



6.4.5 <u>การประมาณค่าความน่าจะเป็นแบบเอกซ์โปเนนเชียลโดยอาศัยการแจกแจงแบบปกติมาตรฐาน</u>

<u>ตัวอย่าง 6.4.5</u> An electric device has a life length T which is exponential distribution with parameter 0.001. If 100 such device are tested what is the probability that $950 < \bar{T} < 1100$

<u>วิธีทำ</u> เปลี่ยน $\bar{T}$ เป็น Z

เมื่อ T มีการแจกแจงแบบเอกซ์โปเนนเชียล

$$E(T) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.001} = 1{,}000$$

$$V(T) = \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{(0.001)^2} = 1{,}000{,}000$$

ดังนั้น $V(\bar{T}) = \dfrac{1{,}000{,}000}{100} = 10{,}000$

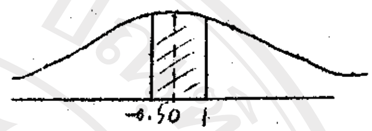
$$Z = \frac{\bar{T} - 1{,}000}{100}$$

ต้องการหา $P(950 < \bar{\bar{T}} < 1,100) \sim P\left(\frac{950-1,000}{100} < Z < \frac{1,100-1,000}{100}\right)$

$$= P(-0.5 < Z < 1)$$

$$= \emptyset(1) - \emptyset(0.5)$$

$$= 0.5328$$



$P(950 < \bar{\bar{T}} < 1,100) \quad 0.5328$
