บทที่ 8

บทสรุป

จากการศึกษาเรื่องของตัวแปรสุ่ม การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม และความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม พบว่ามีคุณสมบัติ และลักษณะต่าง ๆ สรุปได้ดังนี้

8.1 ตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่มจำแนกเป็น 2 ประเภทคือ

1. ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง
2. ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

8.2 การแจกแจงฟังก์ชันของความน่าจะเป็น

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็น (probability function) เมื่อ $f(x)$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ $x \in R_X$
2. $\sum_{x \in R_X} f(x) = 1$
3. $f(x) = P(X = x)$ สำหรับทุกค่าของ $x \in R_X$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง $f(x)$ เป็นพรอบเบบิลิตี้เดนสิตี-ฟังก์ชัน (probability density function) เมื่อ $f(x)$ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ $x \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$

8.3 ค่าคาดหวังและค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง $E(X) = \sum_{x \in R_X} x\ f(x)$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\,dx$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

8.4 แบบต่าง ๆ ของการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มมีหลายแบบดังแสดงให้เห็นในรูปตารางพร้อมทั้งฟังก์ชันของการแจกแจง ค่าความคาดหวังและค่าความแปรปรวนดังนี้

	แบบของการแจกแจงความน่าจะเป็น	f(x)	E(X)	V(X)
	แบบไม่ต่อเนื่อง			
1.	การแจกแจงแบบเสมอต้นเสมอปลาย	$\frac{1}{n}$ สำหรับทุก $x \in R_X$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$
2.	การแจกแจงทวินาม	$\binom{n}{x} p^x q^{n-x}$, $q = 1-p$, $0 < p < 1$, $x = 0,1,2,\ldots,n$	np	npq

	แบบการแจกแจงความน่าจะเป็น	f(x)	E(X)	V(X)
3.	การแจกแจงปัวส์ซอง	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x=0,1,2,\ldots$ $\lambda > 0$	λ	λ
4.	การแจกแจงเอนก-นาม	$\binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}$ $\sum_{i=1}^{k} x_i = n, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$	-	-
5.	การแจกแจงไฮเปอร์-จีออเมตริก	$\frac{\binom{m}{x}\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}$, $x=0,1,2,\ldots,k$	$\frac{km}{m+n}$	$\frac{kmn(m+n-k)}{(m+n)^2(m+n-1)}$
6.	การแจกแจงเรขา-คณิต	$pq^{x-1}, x=1,2,3,\ldots$ $q =$ k, [illegible], ...	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
7.	การแจกแจงทวินาม-นิเสธ	$\binom{x-1}{k-1} p^{k} q^{x-k}$ $x=k,k+1,\ldots$	$\frac{k}{p}$	$\frac{kq}{p^2}$

	แบบของการแจกแจงความน่าจะเป็น	f(x)	E(X)	V(X)
	แบบต่อเนื่อง			
1.	การแจกแจงต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย	$\frac{1}{b-a}$, $a < x < b$ 0 , ค่าอื่นๆ ของ x	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
2.	การแจกแจงปกติ	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$, $-\infty < x < \infty$ $\sigma^2 > 0$	μ	σ^2
3.	การแจกแจงแกมม่า	$\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x}, x>0$ 0 , $x \leq 0$ $\alpha > 0$, $r > 0$	$\frac{r}{\alpha}$	$\frac{r}{\alpha^2}$
4.	การแจกแจงไค-สแคว	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}$, $x > 0$	n	2n
5.	การแจกแจงเอกซ์-โปเนนเชียล	$\alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$

แบบของการแจกแจงความน่าจะเป็น	f(x)	E(X)	V(X)
6. การแจกแจงเบต้า	$\begin{cases} \frac{1}{\beta(s,t)} x^{s-1}(1-x)^{t-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{, ค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ $s > 0, t > 0$	$\frac{s}{s+t}$	$\frac{st}{(s+t+1)(s+t)^2}$
7. การแจกแจงแบบ-เออแลง	$\begin{cases} x^{\alpha-1} e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & \text{, ค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ $\alpha > 0$	α	α
8. การแจกแจงไวบูล	$\begin{cases} abx^{b-1}e^{-ax^b} & , x > 0 \\ 0 & \text{, ค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ $a, b > 0$	$a^{-\frac{1}{b}}\Gamma(1+\frac{1}{b})$	$a^{-\frac{2}{b}}\left[\Gamma(1+\frac{2}{b}) - \Gamma(1+\frac{1}{b})\right]$
9. การแจกแจงลอกนอร์-มอล	$\begin{cases} \frac{1}{x\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\delta^2}} & , x>0 \\ 0 & \text{, ค่าอื่น ๆ} \end{cases}$ $\delta > 0$	$e^{\frac{1}{2}\delta^2+\mu}$	$(e^{\delta^2}-1)e^{\delta^2+2\mu}$

แบบของการแจกแจงความน่าจะเป็น	f(x)	E(X)	V(X)
10. การแจกแจง Cauchy	$\frac{\sigma}{\pi} \cdot \frac{1}{\sigma^2 + (x-\mu)^2}$ $-\infty < x < \infty$ $-\infty < \mu < \infty$ $\sigma > 0$	not exist	not exist
11. การแจกแจงแบบ t	$\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} (\frac{t^2}{n}+1)^{-(\frac{n+1}{2})}$ $-\infty < t < \infty$	0	$\frac{n}{n-2}$
12. การแจกแจงแบบ F	$\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} w^{\frac{m}{2}-1} (1+w)^{-(\frac{m+n}{2})}$ $w > 0$	$\frac{n}{n-2}$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

8.5 ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

เงื่อนไขที่ทำให้เกิดความสัมพันธ์ แยกกล่าวเป็น 3 ข้อดังนี้

8.5.1 สัมพันธ์กันด้วยค่าพารามิเตอร์

ความเกี่ยวข้องกันระหว่างค่าพารามิเตอร์ทำให้เกิดความสัมพันธ์กันได้เช่น การแจกแจงแกมมาและการแจกแจงไค-สแควร์ จากฟังก์ชันการแจกแจงของแกมมา

$$f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(r)}(\alpha x)^{r-1} e^{-\alpha x} \qquad \alpha = \frac{1}{2},\ r = \frac{n}{2}$$

จะได้ฟังก์ชันการแจกแจงเป็น $f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันของการแจกแจงไค-สแควร์

8.5.2 สัมพันธ์กันโดยอาศัยฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม (Function of random variables)

เช่นการแจกแจงแบบ t จะนิยามในรูป $T = \frac{U}{V}$ เมื่อ

เมื่อ U มีการแจกแจงแบบปกติ

V มีการแจกแจงไค-สแควร์

8.5.3 สัมพันธ์กันโดยอาศัย Central Limit Theorem (C.L.T)

จะได้ว่าการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทั้งแบบไม่ต่อเนื่องและแบบต่อเนื่อง จะเข้าสู่การแจกแจงปกติ คือสามารถประมาณค่าได้โดยอาศัยการแจกแจงปกติ
