บทที่ 2

ความรู้พื้นฐาน

การศึกษาในบทนี้จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานเฉพาะที่จำเป็นเพื่อนำไปใช้ในบทที่ 3 และบทที่ 4 ต่อไป โดยจะกล่าวถึงนิยาม ทฤษฎี สำหรับทฤษฎีที่กล่าวถึงจะไม่แสดงการพิสูจน์ไว้ในที่นี้เพราะเป็นทฤษฎีที่ปรากฏอยู่ในหนังสือคณิตศาสตร์เบื้องต้นทั่วไป

สำหรับในบทนี้จะศึกษาตามหัวข้อต่อไปนี้

2.1 เซตและเมตทริกสเปซ (Sets and metric spaces)

2.2 ฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าจริง (Continuous real-valued functions)

2.3 ลำดับ (Sequences)

2.1 <u>เซตและเมตทริกสเปซ</u> (Sets and metric spaces)

<u>นิยาม 2.1.1</u> <u>เซตจำกัด</u> (Finite set) คือเซตว่างหรือเซตที่มีสมาชิก n ตัว เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกตัวหนึ่ง

<u>นิยาม 2.1.2</u> <u>เซตไม่จำกัด</u> (Infinite set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

<u>นิยาม 2.1.3</u> ถ้า A และ B เป็นเซต และถ้าสมาชิกแต่ละตัวของ A เป็นสมาชิกของ B แล้วเรากล่าวว่า A เป็น<u>สับเซต (Subset) ของ B</u> และเขียนว่า $A \subset B$

<u>นิยาม 2.1.4</u> <u>ผลต่าง</u> (Difference) <u>ของเซต B เทียบกับเซต A</u> คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของเซต A แต่ไม่เป็นสมาชิกของเซต B

สัญลักษณ์ A - B แทนผลต่างของเซต B เทียบกับเซต A นั่นคือ $A - B = \{x : x \in A$ และ $x \notin B\}$

<u>นิยาม 2.1.5</u> เซต X ซึ่งสมาชิกของ X เราจะเรียกว่า<u>จุด</u> (Point) เป็นเมตทริกสเปซ ถ้ามีฟังก์ชัน $d : X \times X \longrightarrow R$ ซึ่งมีคุณสมบัติ 3 ประการดังนี้

สำหรับจุด p, q, r ใดๆของ X จะได้ว่า

1. $d(p,q) > 0$ ถ้า $p \neq q$ และ $d(p,p) = 0$
2. $d(p,q) = d(q,p)$
3. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

ฟังก์ชั่น d ที่มีคุณสมบัติทั้ง 3 ประการนี้ เรียกว่า <u>ฟังก์ชันระยะทาง</u> (Distance function) หรือ <u>เมตทริก</u> (Metric) <u>บนเซต X</u> และอสมการในข้อ 3 เรียกว่า <u>อสมการสามเหลี่ยม</u> (The triangle inequality)

บางครั้งเราจะเขียนว่า (X, d) เป็นเมตทริกสเปซ ในกรณีที่เราจะเน้นว่า d เป็นเมตทริกที่กำลังกล่าวถึง

<u>ข้อสังเกต</u> ทุกสับเซตของเมตทริกสเปซเป็นเมตทริกสเปซ

นิยาม 2.1.6 เซต X ซึ่งสมาชิกของ X เราจะเรียกว่า จุด (Point) เป็นเซไม - เมตทริกสเปซ ถ้ามีฟังก์ชัน $d: X \times X \longrightarrow R$ ซึ่งมีคุณสมบัติ 3 ประการดังนี้

1. $d(p,q) \geq 0$ ถ้า $p \neq q$

   $d(p,p) = 0$

2. $d(p,q) = d(q,p)$

3. $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

นิยาม 2.1.7 ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ ซึ่งมี d เป็นเมตทริก ทุกๆจุด และทุกๆเซตข้างล่างนี้เป็นสมาชิกและสับเซตของ X

1. เนเบอร์ฮูด (Neighborhood) ของจุด x คือ เซตในลักษณะ $N_r(x) = \{y \in X \,/\, d(x,y) < r\}$ สำหรับแต่ละ $r > 0$ เรียก r ใน $N_r(x)$ ว่ารัศมี ของ $N_r(x)$

2. เรียกจุด x ว่าเป็นจุดลิมิต (Limit point) ของเซต E ถ้าในแต่ละเนเบอร์ฮูดของ x มีจุด y ซึ่ง $x \neq y$ และ $y \in E$

3. E เป็นเซตปิด (Closed set) ถ้าทุกๆจุดลิมิตของ E อยู่ใน E

4. จุด x จะเป็นจุดภายใน (Interior point) ของ E ถ้ามีเนเบอร์ฮูด N ของ x ซึ่ง $N \subset E$

5. E เป็นเซตเปิด (Open set) ถ้าทุกๆจุดของ E เป็นจุดภายในของ E

6. E เป็นเซตที่มีขอบเขต (Bounded set) ถ้ามีจำนวนจริง M ซึ่ง $d(x,y) < M$ สำหรับทุกๆ $x, y \in E$

ตัวอย่าง 2.1.8 ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และให้ d_u เป็นฟังก์ชันจาก $R \times R$ ไปยัง R นั่นคือ $d_u : R \times R \longrightarrow R$ โดยที่ $d_u(x,y) = |x - y|$ จะได้ว่า d_u เป็นเมตทริกบน R และ d_u ในตัวอย่างนี้ก็คือระยะทางบนเส้นจำนวนจริงนั่นเอง และเรียก (R, d_u) ว่า เมตทริกปกติ (Usual metric space)

ทฤษฎี 2.1.9 สมมุติว่า $Y \subset X$ และ X เป็นเมตทริกสเปซ ดังนั้น สับเซต E ของ Y จะเป็นเซตเปิดใน Y ก็ต่อเมื่อ

$E = Y \cap G$ สำหรับเซตเปิด G ของ X บางตัว

พิสูจน์ ดู [1] หน้า 47

<u>บทแทรก 2.1.10</u> สมมุติว่า $Y \subset X$ และ X เป็นเมตทริกสเปซ ดังนั้น สับเซต K ของ Y จะเป็นเซตปิดใน Y ก็ต่อเมื่อ $K = Y \cap F$ สำหรับเซตเปิด F ของ X บางตัว

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 48

<u>บทแทรก 2.1.11</u> สับเซต F ของเมตทริกสเปซ X เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ คอมพลีเมนท์ของ F เป็นเซตเปิด

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 44

<u>นิยาม 2.1.12</u> ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ ให้ $E \subset X$ และให้ E' เป็นเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ E ใน X <u>โคลสเชอร์ (Closure) ของ E</u> คือเซต $\bar{E} = E \cup E'$

<u>ทฤษฎี 2.1.13</u> ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ และ $E \subset X$ ดังนั้น

1. $\bar{E}$ เป็นเซตปิด
2. $E = \bar{E}$ ก็ต่อเมื่อ E เป็นเซตปิด

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 46

<u>ทฤษฎี 2.1.14</u> ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ และ $E \subset X$ ถ้า E เป็นเซตจำกัดแล้วจะได้ว่า E เป็นเซตปิด

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 44

2.2 ฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชันค่าจริง

นิยาม 2.2.1 ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ ให้ $A \subset X$ และ $B \subset R$ เป็นเซตสองเซตใดๆที่ไม่ใช่เซตว่างทั้งคู่ สมมุติว่า ถ้า $x \in A$ เราจะเลือกสมาชิกของ B หนึ่งตัวมาเป็นคู่ของ x แล้วเขียนแทนด้วย $f(x)$ เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปสู่ B (f is a function from A into B) เขียนว่า $f:A \longrightarrow B$ เรียกเซต A ว่าเป็น โดเมน (Domain) ของ f (ซึ่งบางครั้งเราจะพูดว่า f นิยามบน A) เรียกสมาชิก $f(x)$ ของ B ว่าเป็น ค่าของ f ที่ x (f(x) is the value of f at x) เรียกเซตที่ประกอบไปด้วยทุกๆค่าของ f ว่า เรนจ์ (Range) ของ f

นิยาม 2.2.2 ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ ให้ $A \subset X$ และ $B \subset R$ เป็นเซตสองเซตใดๆ และให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปสู่ B ถ้า $E \subset A$ เรานิยาม $f(E)$ ว่าเป็นเซตซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิก $f(x)$ ทั้งหมดโดยที่ $x \in E$ เรียก $f(E)$ ว่าเป็น อิมเมจ (Image) ของ E ภายใต้ f (ดังนั้น $f(A)$ ก็คือเรนจ์ของ f นั่นเอง และขอให้สังเกตว่า $f(A) \subset B$) ถ้า $f(A) = B$ เราจะพูดว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปบน B

(ให้สังเกตว่าในที่นี้คำว่า <u>ไปบน</u> เป็นกรณีพิเศษของ <u>ไปสู่</u>)

เขียนว่า $f : A \xrightarrow{\text{ไปบน}} B$

ถ้า $E \subset B$ เรานิยามให้ $f^{-1}(E)$ เป็นเซตซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิก $x \in A$ ทั้งหมดซึ่ง $f(x) \in E$ เรียก $f^{-1}(E)$ ว่าเป็น <u>อินเวอร์จอิมเมจ</u> (Inverse image) <u>ของ E ภายใต้ f</u> ถ้าหาก E มีสมาชิกเพียงตัวเดียวคือ y เราจะเขียน $f^{-1}(y)$ แทน $f^{-1}(\{y\})$

<u>นิยาม 2.2.3</u> ให้ $X \neq \emptyset$ และให้ $f : X \longrightarrow R$ (เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง) เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขต (Bounded function) ถ้ามีจำนวนจริง M ซึ่งทำให้ $|f(x)| \leq M$ สำหรับทุกๆ $x \in X$

<u>นิยาม 2.2.4</u> ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ และฟังก์ชัน $f : X \longrightarrow R$ เรียกสมาชิก $b \in R$ ว่าเป็น <u>จุดลิมิต</u> (limit point) <u>ของ f ที่จุด c</u> โดยที่ c เป็นจุดลิมิตจุดหนึ่งของ $E \subset X$ ถ้าสำหรับทุกๆเนเบอร์ฮูด V ของ b จะมีเนเบอร์ฮูด U ของ c ซึ่งถ้า $x \in U \cap E$ และ $x \neq c$ แล้วจะได้ว่า $f(x) \in V$

ในกรณีนี้ เราจะเขียนว่า $f(x) \longrightarrow b$ ในขณะที่ $x \longrightarrow c$ หรือ $b = \lim_{x \to c} f(x)$

สัญลักษณ์ที่เขียนแทนจุดลิมิตดังกล่าวนี้ไม่เป็นสัญลักษณ์ที่คลุมเคลือ

ทั้งนี้เพราะจะมีจุดลิมิตของฟังก์ชันที่จุด(คงที่)ใดๆได้อย่างมากหนึ่งค่าเท่านั้น

<u>ข้อสังเกต</u> จากนิยาม 2.2.4 c อาจจะเป็นจุดอยู่ภายนอก E ก็ได้ และถึงแม้ว่า c จะเป็นจุดใน E ก็<u>ไม่จำเป็น</u>ที่จะสรุปได้ว่า

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$

<u>นิยาม 2.2.5</u> ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ และฟังก์ชัน $f : X \longrightarrow R$ ให้ a เป็นจุดใน $E \subset X$ เรากล่าวว่า <u>f มีความต่อเนื่อง</u> หรือ <u>เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด a</u> (f is continuous at a) ถ้าสำหรับแต่ละเนเบอร์ฮูด V ของ $f(a)$ ใน R จะมีเนเบอร์ฮูด U ของ a ใน X (ปกติจะขึ้นอยู่กับ V ที่กำหนดให้) ซึ่งถ้า $x \in U \cap E$ แล้วจะได้ว่า $f(x) \in V$

2.3 <u>ลำดับ</u> (Sequences)

<u>นิยาม 2.3.1</u> <u>ลำดับ</u> (Sequences) ในเซต S เซตหนึ่งที่ $S \neq \emptyset$ หมายถึงฟังก์ชัน $f : N \longrightarrow S$ โดยที่ N เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติ ถ้า $f(n) = x_n \in S$ สำหรับ $n \in N$ เรานิยมเขียนแทนลำดับ f นี้ด้วยสัญลักษณ์ $\{x_n\}$ หรือ $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ หรือ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ หรือ (x_n) เรียกค่า x_n ของ f ว่า <u>พจน์ที่ n ของลำดับ $\{x_n\}$</u>

นิยาม 2.3.2 ให้ (Y, d) เป็นเมตทริกสเปซ และให้ $X = \{x_n\}$ เป็นลำดับในเซต Y เรียกสมาชิก x ของ Y ว่าเป็น ลิมิต (limit) ของ X ถ้าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

" สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็ม N_ε (ขึ้นอยู่กับ ε) ซึ่งทำให้ $d(x_n, x) < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ n ที่ $n \geq N_\varepsilon$ "

ในกรณีเช่นนี้เราอาจกล่าวว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x หรือกล่าวว่า ลำดับ X เป็นลำดับที่คอนเวอร์จ ถ้าลำดับใดไม่มีลิมิตเรียกลำดับนั้นว่า ไดเวอร์จ (diverge)

ต่อไปนี้เราจะเขียน $x_n \longrightarrow x$ หรือ $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ เพื่อแสดงว่า $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ x หรือ x คือลิมิตของ $\{x_n\}$ และเรียก $X = \{x_n\}$ ว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขต (bounded sequence) ถ้าเซต $\{x_n : n \geq 1\}$ เป็นเซตที่มีขอบเขตในเมตทริกสเปซ Y

นิยาม 2.3.3 ให้ (Y, d) เป็นเมตทริกสเปซ และให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับใดๆในเซต Y เราพิจารณาลำดับ $\{n_k\}$ ของจำนวนธรรมชาติ ซึ่ง $n_1 < n_2 < \cdots$ เราเรียกลำดับ $\{x_{n_k}\}$ ว่า ลำดับย่อย (Subsequence) ของ $\{x_n\}$

ทฤษฎี 2.3.4 ทุกๆลำดับที่มีขอบเขตในเซต R จะมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับที่ลู่เข้า

พิสูจน์ ดู [1] หน้า 87

<u>ทฤษฎี 2.3.5</u> ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ ซึ่งมี d เป็นเมตทริก ถ้า x เป็นจุดลิมิตของ $E \subset X$ แล้วจะมีลำดับในเซต E ที่ลู่เข้าสู่ x

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 79

<u>ทฤษฎี 2.3.6</u> ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับในเมตทริกสเปซ X ถ้าจุด x และจุด y ในเซต X ต่างก็เป็นจุดลิมิตของ $\{x_n\}$ แล้วจะได้ว่า $x = y$

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 78

<u>ทฤษฎี 2.3.7</u> ให้ X เป็นเมตทริกสเปซ และฟังก์ชัน $f : X \longrightarrow R$ ให้ a เป็นจุดอยู่ในเซต X ดังนั้นข้อความต่อไปนี้สมมูลย์กัน

1. f มีความต่อเนื่องที่ a
2. ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ มาให้จะหาจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ $x \in X$ ที่ $d(x,a) < \delta$.
3. ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับใดๆในเมตทริกสเปซ X ซึ่งลู่เข้าสู่ a ในเซต X แล้วลำดับ $\{f(x_n)\}$ จะลู่เข้าสู่ f(a) ใน R ภายใต้เมตทริกปกติเสมอ

<u>พิสูจน์</u> ดู [1] หน้า 160