บทที่ 3

เงื่อนไขที่เพียงพอของการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง 1

(A Sufficient Condition for Continuity 1)

การศึกษาในบทนี้จะศึกษาบทความของ R.F. DICKMAN JR. ในหัวข้อ " On Condition Implying Continuity of Real - Valued Function " ซึ่งลงในวารสาร MATHEMATICS MAGAZINE ฉบับที่ 45 ประจำเดือน กันยายน - ตุลาคม ปี 1972 เป็นการศึกษาการเป็น วีคลี่ - โคลส (Weakly - closed) ของฟังก์ชันค่าจริงบนเมตทริกสเปซ (X, d) และการศึกษาเกี่ยวกับการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของฟังก์ชัน f เมื่อ ฟังก์ชัน f เป็นวีคลี่ - โคลส และฟังก์ชัน $g(x) = (1 + d(x,x_0))f(x)$ เป็นวีคลี่ - โคลส

<u>นิยาม 3.1</u> ให้ (X, d) เป็นเมตทริกสเปซ เราเรียกฟังก์ชัน $f : X \longrightarrow R$ ว่า <u>วีคลี่ - โคลส</u> (Weakly-closed) <u>ที่จุด $x_0 \in X$</u> ถ้า $f(\bigcup_{n=0}^{\infty} x_n)$ เป็นเซตปิดใน R สำหรับทุกๆลำดับ $\{x_n\}$ ในเซต X ที่ $x_n \longrightarrow x_o$

ถ้าฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่แต่ละจุดในเซต X เราเรียกฟังก์ชัน f ว่า <u>วีคลี่ - โคลส บน X</u>

<u>ทฤษฎี 3.2</u> ให้ (X, d) เป็นเมตทริกสเปซ ให้ x_o เป็นจุดอยู่ในเซต X ฟังก์ชั่น f เป็นฟังก์ชั่นค่าจริงที่มีขอบเขตบนเซต X ซึ่ง $f(x) \neq 0$ สำหรับทุกๆสมาชิก x ใน X และถ้าฟังก์ชั่น f และ g ซึ่ง $g(x) = (1 + d(x,x_o))f(x)$ เป็นวีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o จะได้ว่า ฟังก์ชั่น f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากฟังก์ชั่น $f : X \longrightarrow R$ มีขอบเขต

เพราะฉะนั้น $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in X$ เมื่อ M เป็นจำนวนจริงบวกตัวหนึ่ง

สมมุติว่า ฟังก์ชั่น f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

ดังนั้นมีลำดับ $\{x_n\}$ ที่ $x_n \longrightarrow x_o$ แต่ $f(x_n) \not\longrightarrow f(x_o)$

เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนจริง $\varepsilon_o > 0$ ซึ่ง

$$|f(x_n) - f(x_o)| > \varepsilon_o \qquad \text{i.o.}$$

นั่นคือมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่ง

$$|f(x_{n_k}) - f(x_o)| > \varepsilon_o \qquad \forall k$$

เนื่องจาก $\{f(x_{n_k})\} \subset [-M , M]$

ดังนั้นจะมีลำดับย่อย $\{f(x_{m_k})\}$ ของ $\{f(x_{n_k})\}$ ที่เป็นลำดับที่ลู่เข้า

ให้ $y = \lim_{k \to \infty} f(x_{m_k})$ จะได้ว่า $y \neq f(x_o)$

ให้ $C_n = \{f(x_o)\} \cup \{f(x_{m_k}) : k \geq n\}$ สำหรับ-จำนวนเต็มบวก n แต่ละตัว

เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o และ

$x_{m_k} \longrightarrow x_o$

ดังนั้นแต่ละเซต C_n เป็นเซตปิด จะได้ว่า $y \in C_n$

เพราะฉะนั้น $y = f(x_o)$ หรือ $y \in \{f(x_{m_k}) : k \geq n\}$ $\forall n$

แต่เนื่องจาก $y \neq f(x_o)$

เพราะฉะนั้น $y \in \{f(x_{m_k}) : k \geq n\}$ $\forall n$

ดังนั้น $y = f(x_{m_k})$ i.o.

นั่นคือจะมีลำดับย่อย $\{x_{p_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ที่ $y = f(x_{p_k})$ $\forall k$

เราจะพิสูจน์ว่า $g(x_o) \neq y$ และ $g(x_{p_k}) \neq y$

$$g(x_o) = (1 + d(x_o, x_o))f(x_o)$$

$$= (1 + 0)f(x_o)$$

$$= f(x_o) \neq y$$

สำหรับ $k > 0$ จะได้

$$g(x_{p_k}) = (1 + d(x_{p_k}, x_o))f(x_{p_k})$$

$$= (1 + d(x_{p_k}, x_o))y$$

$$\neq y$$

(เนื่องจาก $d(x_{p_k}, x_o) > 0$ และ $y \neq 0$)

เมื่อ $x_{p_k} \longrightarrow x_o$

เพราะฉะนั้น $g(x_{p_k}) \longrightarrow y$

ให้ $C = \{g(x_o)\} \cup \{g(x_{p_k}):k \geq 1\}$

ดังนั้น $y \notin C$ และ C เป็นเซตปิด

แต่ $y \in \overline{C}$ (เพราะว่า $g(x_{p_k}) \longrightarrow y$)

เพราะฉะนั้น $y \in \overline{C} = C$ ซึ่งขัดแย้งกับ $y \notin C$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o □

<u>ข้อสังเกต</u> ในบางสถานการณ์ ฟังก์ชั่น f และ g ในทฤษฎี 3.2 จะไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o พร้อมกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 3.2.1</u> (f ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o แต่ g เป็น วีคลี่-โคลส ที่จุด x_o)

ให้ $$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

(ในที่นี้เมตทริกสเปซ (x, d) คือสับสเปซของ R)

จะแสดงว่า f ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด $x_o = 0$

ให้ $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ เพราะฉะนั้น $x_n \longrightarrow 0$

แต่ $\{f(x_n):n \geq 0\} = \{f(0)\} \cup \{f(x_n):n \geq 1\}$

$= \{f(0)\} \cup \{\frac{2n}{n+1} :n \geq 1\}$

$= \{1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \ldots\}$

ซึ่งมี 2 เป็นจุดลิมิต แต่ 2 ไม่อยู่ใน $\{1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \ldots\}$

ดังนั้น $\{f(x_n) : n \geq 0\}$ ไม่เป็นเซตปิดใน R

ให้ $g(x) = (1 + x)f(x) = \begin{cases} 2 & , x > 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

(ในที่นี้เมตทริกสเปซ (X,d) คือ สับสเปซของ R)

จะแสดงว่า ฟังก์ชัน g เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด $x_o = 0$

ให้ $x_n \longrightarrow 0$ แล้วจะแสดงว่า $\{g(x_n) : n \geq 0\}$

เป็นเซตปิดใน R

เพราะว่า $\{g(x_n):n\geq 0\} = \{g(0)\} \cup \{g(x_n):n\geq 1\}$

ดังนั้น $\{g(x_n):n \geq 0\} = \{1\}$ หรือ $\{1, 2\}$

แต่ $\{1\}$ และ $\{1, 2\}$ เป็นเซตปิดใน R

เพราะว่า $\{1\}^c = (-\infty,1) \cup (1,\infty)$ เป็นเซตเปิดใน R

และ $\{1, 2\}^c = (-\infty,1) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$

เป็นเซตเปิดใน R

ดังนั้น $\{g(x_n) : n \geq 0\}$ เป็นเซต ปิดใน R

นั่นคือ ฟังก์ชัน g เป็นวีคลี่ - โคลส ที่ 0 $\square$

<u>ตัวอย่าง 3.2.2</u> (f เป็น วีคลี่-โคลส ที่จุด x_o แต่ g ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o)

ให้ $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \neq 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases}$

(ในที่นี้เมตทริกสเปซ (X,d) คือสเปซ R)

จะแสดงว่า f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด $x_o = 0$

ให้ $x_n \longrightarrow 0$ จะแสดงว่า $\{f(x_n):n \geq 0\}$ เป็นเซตปิดใน R

เพราะว่า $\{f(x_n):n \geq 0\} = \{f(x_o)\} \cup \{f(x_n):n \geq 1\}$

ดังนั้น $\{f(x_n):n \geq 0\} = \{2\}$ หรือ $\{1, 2\}$

แต่ $\{2\}$ และ $\{1, 2\}$ เป็นเซตปิดใน R

เพราะว่า $\{2\}$ และ $\{1, 2\}$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น $\{f(x_n):n \geq 0\}$ เป็นเซตปิดใน R

นั่นคือ f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด $x_o = 0$

ให้ $g(x) = (1 + |x|)f(x) = \begin{cases} 1 + |x| & ,x \neq 0 \\ 2 & ,x = 0 \end{cases}$

(ในที่นี้เมตทริกสเปซ (X,d) คือสเปซ R)

จะแสดงว่า g ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด $x_o = 0$

ให้ $x_n \longrightarrow 0$ จะแสดงว่า $\{g(x_n):n \geq 0\}$ ไม่เป็นเซตปิดใน R

$$
\begin{aligned}
\text{เพราะว่า } \{g(x_n):n\geq 0\} &= \{g(x_o)\} \cup \{g(x_n):n \geq 1\} \\
&= \{g(0)\} \cup \{g(x_n):n \geq 1\} \\
&= \{2, 1 + |x_n|:n \geq 1\}
\end{aligned}
$$

ซึ่งมี 1 เป็นจุดลิมิต แต่ 1 ไม่อยู่ใน $\{2, 1 + |x_n|:n \geq 1\}$

ดังนั้น $\{g(x_n):n \geq 1\}$ ไม่เป็นเซตปิดใน R

นั่นคือ g ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ 0 $\square$

<u>ทฤษฎี 3.3</u> ให้ (X,d) เป็นเมตทริกสเปซ ให้ x_o เป็นจุดอยู่ในเซต X และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบนเซต X ซึ่งมีอินเวอร์จอิมเมจของแต่ละจำนวนจริงเป็นเซตปิด (นั่นคือ $f^{-1}\{r\}$ เป็นเซตปิด $\forall r \in R$)

ถ้าฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o แล้วฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากฟังก์ชัน $f : X \longrightarrow R$ มีขอบเขต

เพราะฉะนั้น $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in X$ เมื่อ M เป็นจำนวนจริงบวกตัวหนึ่ง

สมมุติว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

ดังนั้นจะมีลำดับ $\{x_n\}$ ที่ $x_n \neq x_m \ (n \neq m)$

$x_n \neq x_o \quad \forall n$ และ $x_n \longrightarrow x_o$ แต่

$f(x_n) \not\longrightarrow f(x_o)$

เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนจริง $\varepsilon_o > 0$ ซึ่ง

$$|f(x_n) - f(x_o)| > \varepsilon_o \qquad \text{i.o.}$$

นั่นคือ มีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่ง

$$|f(x_{n_k}) - f(x_o)| > \varepsilon_o \quad \forall k$$

เนื่องจาก $\{f(x_{n_k})\} \subset [-M , M]$

ดังนั้นจะมีลำดับย่อย $\{f(x_{m_k})\}$ ของ $\{f(x_{n_k})\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า

ให้ $y = \lim_{k \to \infty} f(x_{m_k})$ จะได้ว่า $y \neq f(x_o)$

ให้ $C_n = \{f(x_o)\} \cup \{f(x_{m_k}) : k \geq n\}$ สำหรับ

จำนวนเต็มบวก n แต่ละตัว

เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o และ

$x_{m_k} \longrightarrow x_o$

เพราะฉะนั้นแต่ละเซต C_n เป็นเซตปิดจะได้ว่า

$y \in C_n \quad \forall n$

ดังนั้น $y = f(x_o)$ หรือ $y \in \{f(x_{m_k}) : k \geq n\} \quad \forall n$

แต่เนื่องจาก $y \neq f(x_o)$ เพราะฉะนั้น

$y \in \{f(x_{m_k}) : k \geq n\} \quad \forall n$

ดังนั้น $y = f(x_{m_k})$ i.o.

นั่นคือ $x_{m_k} \in f^{-1}(y)$ i.o.

แต่เนื่องจาก $f^{-1}(y)$ เป็นเซตปิด และ $x_{m_k} \longrightarrow x_o$

จะได้ $x_o \in f^{-1}(y)$

เพราะฉะนั้น $y = f(x_o)$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $y \neq f(x_o)$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

$\square$

<u>ทฤษฎี 3.4</u> ให้ X เป็นสับเซตของจำนวนจริง ให้ x_o เป็นจุดอยู่ในเซต X และฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบนเซต X ให้ $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$ ดังนั้น ถ้าฟังก์ชัน $g(x) = (1 + |x_o - x|)f(x)$ เป็น วีคลี่ - โคลส บน X แล้วฟังก์ชัน f จะมีอินเวอร์จอิมเมจของแต่ละจำนวนจริงเป็นเซตปิด

<u>พิสูจน์</u> ถ้า $y \notin f(X)$ แล้วจะได้ว่า $f^{-1}(y) = \emptyset$ ซึ่งเป็นเซตปิด

ให้ $y \in f(X)$ และสมมุติว่า $f^{-1}(y)$ ไม่เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้นจะมีลำดับ $\{z_i\}$ ในเซต $f^{-1}(y)$ ซึ่ง

$z_i \longrightarrow z_o \in X$ และ $f(z_i) = y \quad \forall i > 0$

และ $f(z_o) \neq y$

เนื่องจาก $X \subset R$ เราสามารถเลือก z_i ดังกล่าว

ที่ทำให้ $|x_o - z_i| \neq |x_o - z_o| \quad \forall i > 0$

ดังนั้นลำดับ $\{g(z_i) = (1 + |x_o - z_i|)f(z_i)\}$

ลู่เข้าสู่จุด $a = (1 + |x_o - z_o|)y$

เนื่องจาก g เป็น วีคลี่ - โคลส บน X จะมี z_i

ที่ทำให้ $g(z_i) = a$ สำหรับ i บางตัว

เมื่อ
$$\begin{aligned} g(z_o) &= (1 + |x_o - z_o|)f(z_o) \\ &\neq (1 + |x_o - z_o|)y = a \end{aligned}$$

ดังนั้นสำหรับ $i > 0$ บางตัวจะได้ว่า

$(1 + |x_o - z_i|)\, f(z_i) = (1 + |x_o - z_o|)\, y$

เพราะฉะนั้น $(1 + |x_o - z_i|)\, y = (1 + |x_o - z_o|)\, y$

จะได้ $|x_o - z_i| = |x_o - z_o|$ เพราะว่า $y \neq 0$

ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $|x_o - z_i| \neq |x_o - z_o|$

นั่นคือ $f^{-1}(y)$ เป็นเซตปิด □

<u>ทฤษฎี 3.5</u> ให้ X เป็นสับเซตของจำนวนจริง ให้ x_o เป็นจุดอยู่ในเซต X ให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบนเซต X และให้ $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$ ดังนั้น ถ้า $g(x) = (1 + |x_o - x|) f(x)$ เป็น วีคลี่ - โคลส บน X และถ้าฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_1 ในเซต X จะได้ว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_1

<u>พิสูจน์</u> ฟังก์ชัน f มีอินเวอร์จอิมเมจของแต่ละจำนวนจริงเป็นเซตปิด จริงตามทฤษฎี 3.4

เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_1

ดังนั้น ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_1 จริงตาม ทฤษฎี 3.3 □