บทที่ 4

เงื่อนไขที่เพียงพอของการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง 2

(A Sufficient Condition For Continuity 2)

เมื่อได้ศึกษา นิยาม ทฤษฎีต่างๆในบทที่สามก็จะเห็นว่ามีทางเป็นไปได้ที่จะนำทฤษฎีต่างๆมาสร้างใหม่ โดยสร้างฟังก์ชัน g ใหม่ให้อยู่ในรูปของ $g(x) = d(x,x_o) + f(x)$ ซึ่งผลที่สร้างฟังก์ชัน g ใหม่นี้ จะทำให้ตัดเงื่อนไขที่ว่า $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$ ทิ้งไปได้

<u>ทฤษฎี 4.1</u> ให้ (X, d) เป็นเมตทริกสเปซ ให้ x_o เป็นจุดอยู่ในเซต X และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o แล้วจะได้ว่า ฟังก์ชัน f เป็นวีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับในเซต X ที่ $x_n \longrightarrow x_o$

จะได้ว่า $f(x_n) \longrightarrow f(x_o)$ เพราะว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

จะแสดงว่า $\{f(x_n) : n \geq 0\}$ เป็นเซตปิด

ถ้า $\{f(x_n) : n \geq 0\}$ เป็นเซตจำกัด

ดังนั้น $\{f(x_n) : n \geq 0\}$ เป็นเซตปิด

สมมุติให้ $\{f(x_n) : n \geq 0\}$ เป็นเซตอนันต์

จะแสดงว่า $\overline{\{f(x_n):n \geq 0\}} - \{f(x_n):n \geq 0\} = \emptyset$

สมมุติว่ามี y ใน $\overline{\{f(x_n):n \geq 0\}} - \{f(x_n):n \geq 0\}$

ดังนั้นจะมี y_k ใน $\{f(x_n):n \geq 0\}$ ที่

$y_k \longrightarrow y$ และ $y_n \neq y_m \quad (n \neq m)$

นั่นคือมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ที่

$y_k = f(x_{n_k}) \qquad \forall k$

เพราะฉะนั้น $f(x_{n_k}) \longrightarrow y$

แต่ $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x_o)$

ดังนั้น $y = f(x_o)$

จะได้ว่า y อยู่ใน $\{f(x_n):n \geq 0\}$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า

y อยู่ใน $\overline{\{f(x_n):n \geq 0\}} - \{f(x_n):n \geq 0\}$

นั่นคือ $\overline{\{f(x_n):n \geq 0\}} = \{f(x_n):n \geq 0\}$ ตามต้องการ

ดังนั้น $\{f(x_n):n \geq 0\}$ เป็นเซตปิด

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o □

<u>ทฤษฎี 4.2</u> ให้ (x, d) เป็นเมตทริกสเปซ และให้ x_o เป็นจุดอยู่ในเซต X ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(x) = d(x,x_o)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต X

<u>พิสูจน์</u> ให้ a เป็นจุดอยู่ในเซต X

จะแสดงว่า ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด a

กำหนด $\varepsilon > 0$ แล้วจะหา $\delta > 0$ ที่ทำให้

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ x ที่ $d(x,a) < \delta$

ให้ $\delta = \varepsilon$ จากอสมการสามเหลี่ยม

จะเห็นว่า $d(x,x_o) \leq d(a,x_o) + d(x,a)$

ซึ่งทำให้ $d(x,x_o) - d(a,x_o) \leq d(x,a)$ ....(1)

และ $d(a,x_o) \leq d(x,x_o) + d(x,a)$

ซึ่งทำให้ $-d(x,a) \leq d(x,x_o) - d(a,x_o)$ ....(2)

จาก อสมการ (1) และ อสมการ (2) จะได้ว่า

$-d(x,a) \leq d(x,x_o) - d(a,x_o) \leq d(x,a)$

หรือ $|d(x,x_o) - d(a,x_o)| \leq d(x,a)$

ดังนั้น $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ x

ที่ $d(x,a) < \delta$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด a □

<u>ทฤษฎี 4.3</u> ให้ (X, d) เป็นเมตทริกสเปซ ฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันค่าจริงบน X ที่มีความต่อเนื่องที่จุด a ดังนั้น ฟังก์ชัน $h(x) = f(x)+g(x)$ มีความต่อเนื่องที่จุด a ด้วย

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\varepsilon > 0$ แล้วจะหา $\delta > 0$ ที่ทำให้

$|h(x) - h(a)| < \varepsilon$ สำหรับทุกๆ x ที่ $d(x,a) < \delta$

เลือก $\delta_1 > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

สำหรับทุกๆ x ที่ $d(x,a) < \delta_1$

เลือก $\delta_2 > 0$ ที่ทำให้ $|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$

สำหรับทุกๆ x ที่ $d(x,a) < \delta_2$

ให้ $\delta = \min(\delta_1 , \delta_2)$

ดังนั้น ถ้า $d(x,a) < \delta$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |h(x) - h(a)| &= |f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน h มีความต่อเนื่องที่จุด a □

<u>ทฤษฎี 4.4</u> ให้ (X, d) เป็นเมตทริกสเปซ ให้ x_o เป็นจุดอยู่ในเซต X ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบนเซต X ถ้าฟังก์ชัน f และ $g(x) = d(x,x_o) + f(x)$ เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o จะได้ว่า ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจากฟังก์ชัน $f : X \longrightarrow R$ มีขอบเขต

เพราะฉะนั้น $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in X$ เมื่อ M เป็นจำนวนจริงบวกตัวหนึ่ง

สมมุติว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

ดังนั้น มีลำดับ $\{x_n\}$ ในเซต X ที่ $x_n \neq x_m$ $(n \neq m)$

$x_n \neq x_o$ $\forall n$ และ $x_n \longrightarrow x_o$

แต่ $f(x_n) \not\longrightarrow f(x_o)$

จะมีจำนวนจริง $\varepsilon_o > 0$ ซึ่ง $|f(x_n) - f(x_o)| > \varepsilon_o$ i.o.

นั่นคือ มีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ซึ่ง

$$\left| f(x_{n_k}) - f(x_o) \right| > \varepsilon_o \quad \forall\ k$$

เนื่องจาก $\{f(x_{n_k})\} \subset [-M , M]$

ดังนั้นจะมีลำดับย่อย $\{f(x_{m_k})\}$ ของ $\{f(x_{n_k})\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า

ให้ $y = \lim\limits_{k \to \infty} f(x_{m_k})$ จะได้ว่า $y \neq f(x_o)$

ให้ $C_n = \{f(x_o)\} \cup \{f(x_{m_k}) : k \geq n\}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n แต่ละตัว

เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o ดังนั้น

แต่ละเซต C_n เป็นเซตปิด จะได้ $y \in C_n \quad \forall\ n$

เพราะฉะนั้น $y = f(x_o)$ หรือ $y \in \{f(x_{m_k}) : k \geq n\}\ \forall\, n$

แต่เนื่องจาก $y \neq f(x_o)$

เพราะฉะนั้น $y \in \{f(x_{m_k}) : k \geq n\} \quad \forall\ n$

ดังนั้น $y = f(x_{m_k})$ i.o.

นั่นคือ จะมีลำดับย่อย $\{x_{p_k}\}$ ของ $\{x_n\}$ ที่

$$y = f(x_{p_k}) \quad \forall\ k$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ เราจะพิสูจน์ว่า

$$g(x_{p_k}) \neq y \quad \text{และ} \quad g(x_o) \neq y$$

จาก $g(x) = d(x, x_o) + f(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} g(x_o) &= d(x_o, x_o) + f(x_o) \\ &= 0 + f(x_o) \\ &= f(x_o) \neq y \end{aligned}$$

ถ้า $k > 0$ จะได้ว่า

$$g(x_{p_k}) = d(x_{p_k}, x_o) + f(x_{p_k})$$
$$= d(x_{p_k}, x_o) + y \neq y$$

(เนื่องจาก $d(x_{p_k}, x_o) > 0$)

เมื่อ $x_{p_k} \longrightarrow x_o$

เพราะฉะนั้น $g(x_{p_k}) \longrightarrow 0 + y = y$

ให้ $C = \{g(x_o)\} \cup \{g(x_{p_k}) : k \geq 1\}$

ดังนั้น $y \notin C$ และ C เป็นเซตปิด

แต่ $y \in \overline{C}$ (เพราะว่า $g(x_{p_k}) \longrightarrow y$)

เพราะฉะนั้น $y \in \overline{C} = C$ ซึ่งขัดแย้งกับ $y \notin C$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o □

<u>ข้อสังเกต</u> 1. ในบางสถานการณ์ ฟังก์ชั่น g ในทฤษฎี 4.4 จะไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o ถึงแม้ว่า f จะเป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง4.4.1</u> ให้ $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$

(ในที่นี้เมตทริกสเปซ (X, d) คือสเปซ (R, d_u))

จะแสดงว่า ฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด $x_o = 0$

ให้ $x_n \longrightarrow 0$ แล้วจะแสดงว่า $\{f(x_n) : n \geq 0\}$

เป็นเซตปิดใน R

เพราะว่า $\{f(x_n):n \geq 0\} = \{f(0)\} \cup \{f(x_n):n \geq 1\}$

ดังนั้น $\{f(x_n):n \geq 0\} = \{1\}$ หรือ $\{0, 1\}$

แต่ $\{1\}$ และ $\{0, 1\}$ เป็นเซตปิดใน R

เพราะว่า $\{1\}$ และ $\{0, 1\}$ เป็นเซตจำกัดใน R

ดังนั้น $\{f(x_n):n \geq 0\}$ เป็นเซตปิด

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็นวีคลี่ - โคลส ที่ 0

ให้ $g(x) = |x - 0| + f(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

จะแสดงว่า ฟังก์ชัน g ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ $x_0 = 0$

ให้ $x_n = \frac{1}{n}$

เพราะฉะนั้น $x_n \longrightarrow 0$ แต่ $\{g(x_n):n \geq 0\}$ ไม่เป็นเซตปิดใน R

เพราะว่า $\{g(x_n):n \geq 0\} = \{g(0)\} \cup \{g(x_n):n \geq 1\}$

$= \{g(0)\} \cup \{g(\frac{1}{n}):n \geq 1\}$

$= \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

ซึ่งมี 0 เป็นจุดลิมิต แต่ 0 ไม่อยู่ใน $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$

2. ทฤษฎี 4.4 ไม่เป็นจริงสำหรับเซไมเมตทริกสเปซ (Semimetric space) (X, d) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่าง 4.4.2</u> ให้ $X = \{0,1\}$ และ $d(x,y) = 0 \quad \forall x,y \in \{0,1\}$

เพราะฉะนั้น (X, d) เป็นเซไมเมตทริกสเปซ

ให้ $f(x) = x \quad \forall x \in X$

ให้ $g(x) = d(x,0) + f(x) = f(x)$

จะเห็นว่า ฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ $x_o = 0$

(ซึ่งทำให้ ฟังก์ชัน g เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ $x_o = 0$ ด้วย)

เพราะว่า ถ้า $\{x_n\}$ ในเซต X ซึ่ง $x_n \longrightarrow 0$

แล้ว $\{f(x_n): n \geq 0\} = \{0\}$ หรือ $\{0, 1\}$

ซึ่ง $\{0\}$ และ $\{0, 1\}$ เป็นเซตปิดใน R

ฟังก์ชัน f ไม่มีความต่อเนื่องที่ 0

เพราะให้ $x_n = 1 \quad \forall n$

จะเห็นว่า $x_n \longrightarrow 0$

เพราะว่า $d(x_n, 0) = 0 \quad \forall n$

แต่ $f(x_n) \not\longrightarrow f(0)$ ใน R

เพราะว่า $f(x_n) = 1 \quad \forall n$

แต่ $f(0) = 0$ □

<u>บทแทรก 4.5</u> ให้ (X, d) เป็นเมตทริกสเปซ ให้ x_o เป็นจุดอยู่ใน เซต X และ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบนเซต X ดังนั้นฟังก์ชัน f และ $g(x) = d(x, x_o) + f(x)$ เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o ก็ต่อเมื่อ ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

<u>พิสูจน์</u> $(\Longrightarrow)$ ฟังก์ชัน $f : X \longrightarrow R$ มีขอบเขต เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_o และ ฟังก์ชัน

$g(x) = d(x, x_o) + f(x)$ เป็นวีคลี่ – โคลส ที่จุด x_o

เพราะฉะนั้น ผลจากทฤษฎี 4.4 จะได้ว่า ฟังก์ชัน f

มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

($\Longleftarrow$) ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_o

เพราะฉะนั้น ผลจากทฤษฎี 4.1 จะได้ว่า ฟังก์ชัน f

เป็น วีคลี่ – โคลส ที่จุด x_o ฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่อง

ที่จุด x_o จริงโดยทฤษฎี 4.2 และ ทฤษฎี 4.3

เพราะฉะนั้น ผลจากทฤษฎี 4.1 จะได้ว่า

ฟังก์ชัน g เป็น วีคลี่ – โคลส ที่จุด x_o $\square$

<u>ทฤษฎี 4.6</u> ให้ X เป็นสับเซตของจำนวนจริง ให้ x_o เป็นจุดอยู่ใน

เซต X และให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบนเซต X

ถ้า $g(x) = |x_o - x| + f(x)$ เป็น วีคลี่ – โคลส บน X

แล้วฟังก์ชัน f มีอินเวอร์จอิมเมจของแต่ละจำนวนจริงเป็นเซตปิด

<u>พิสูจน์</u> ถ้า $y \notin f(X)$ แล้วจะได้ว่า $f^{-1}(y) = \emptyset$ ซึ่งเป็นเซตปิด

ให้ $y \in f(X)$ และสมมุติว่า $f^{-1}(y)$ ไม่เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้น จะมีลำดับ $\{z_i\}$ ในเซต $f^{-1}(y)$ ซึ่ง $z_i \to z_o \in X$

และ $f(z_i) = y \quad \forall i > 0$ และ $f(z_o) \neq y$

เนื่องจาก $X \subset R$ เราสามารถจะเลือก z_i ที่ทำให้

$|x_o - z_i| \neq |x_o - z_o|$ สำหรับ $\forall i > 0$

ดังนั้นลำดับ $\{g(z_i) = |x_o - z_i| + f(z_i)\}$ ลู่เข้าสู่

จุด $a = |x_o - z_o| + y$

เนื่องจาก g เป็น วีคลี่ - โคลส บน X จะมี z_i

ที่ทำให้ $g(z_i) = a$ สำหรับ i บางตัว

เมื่อ $g(z_o) = |x_o - z_o| + f(z_o)$

$\neq |x_o - z_o| + y = a$

ดังนั้นสำหรับ $i > 0$ บางตัวจะได้ว่า

$|x_o - z_i| + f(z_i) = |x_o - z_o| + y$

เพราะฉะนั้น $|x_o - z_i| + y = |x_o - z_o| + y$

จะได้ $|x_o - z_i| = |x_o - z_o|$

ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $|x_o - z_i| \neq |x_o - z_o|$

นั่นคือ $f^{-1}(y)$ เป็นเซตปิด □

<u>ทฤษฎี 4.7</u> ให้ X เป็นสับเซตของจำนวนจริง ให้ x_o เป็นจุดอยู่ในเซต X และให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบนเซต X และ $g(x) = |x_o - x| + f(x)$ เป็น วีคลี่ - โคลส บน X และถ้าฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_1 ในเซต X จะได้ว่าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_1

<u>พิสูจน์</u> ฟังก์ชัน f มีอินเวอร์จอิมเมจของแต่ละจำนวนจริงเป็นเซตปิด จริงตามทฤษฎี 4.6

เนื่องจากฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด x_1

ดังนั้น ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่จุด x_1 จริงตามทฤษฎี 3.3

<u>บทแทรก 4.8</u> ให้ X เป็นสับเซตของจำนวนจริง ให้ x_o เป็นจุดอยู่ในเซต X และฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีขอบเขตบนเซต X ดังนั้น ฟังก์ชัน f และ ฟังก์ชัน $g(x) = |x_o - x| + f(x)$ เป็น วีคลี่ - โคลส บน X ก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

<u>พิสูจน์</u> ($\Longrightarrow$) ให้ฟังก์ชัน f และฟังก์ชัน g เป็น วีคลี่ - โคลส บน X จะได้ว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจริงตาม ทฤษฎี 4.7

($\Longleftarrow$) ให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ว่าฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จริงตามทฤษฎี 4.2 และทฤษฎี 4.3

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน f และ g เป็น วีคลี่- โคลส บน X จริงตามทฤษฎี 4.1 $\square$

<u>ตัวอย่าง 4.9</u> ให้ a เป็นจุดใน $E \subset R$ แต่ไม่เป็นจุดลิมิตของ E ดังนั้น ทุกๆฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน E จะมีความต่อเนื่องที่ a เสมอ

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่า f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ a

ให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับในเซต E ที่ $x_n \longrightarrow a$ ดังนั้นจะมี N ที่ทำให้ $x_n = a$ สำหรับทุกๆ n ที่ $n \geq N$

ให้ $x_o = a$

เพราะว่า $\{f(x_n): n \geq 0\} = \{f(a)\} \cup \{f(x_n): n \geq 1\}$

$= \{f(a), f(x_1), \ldots, f(x_{N-1})\}$

เพราะฉะนั้น $\{f(x_n): n \geq 0\}$ เป็นเซตปิดเพราะเป็นเซตจำกัด

นั่นคือ ฟังก์ชัน f เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ a

ต่อไปจะแสดงว่า $g(x) = |x - a| + f(x)$ เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด $x_o = a$

เพราะว่า $\{g(x_n): n \geq 0\} = \{g(x_o)\} \cup \{g(x_n): n \geq 1\}$

$= \{g(a)\} \cup \{g(x_n): n \geq 1\}$

$= \{g(a), x_1 - a + f(x_1), \ldots, x_{N-1} - a + f(x_{N-1})\}$

เพราะฉะนั้น $\{g(x_n): n \geq 0\}$ เป็นเซตปิดเพราะเป็นเซตจำกัด

นั่นคือ ฟังก์ชัน g เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ a

ดังนั้น ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ a จริงตามบทแทรก 4.8 □

หมายเหตุ จริงๆแล้วทุกๆฟังก์ชัน f บน E จะมีความต่อเนื่องที่ a (ดูตัวอย่าง 4.12 ใน [1])

ตัวอย่าง 4.10 ให้ f เป็นฟังก์ชันบน R ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 0 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ a สำหรับ a ใดๆใน R

พิสูจน์ ฟังก์ชัน f เป็นวีคลี่ - โคลส ที่จุด $x_o = a$ เพราะว่า $\{f(x_n):n \geq 0\}$ เป็นเซตปิดใน R

(ในที่นี้เมตทริกสเปซ (X, d) คือ (R, d_u))

ให้ $g(x) = |x - a| + f(x) = \begin{cases} |x-a| + 1, x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ |x-a|, x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$

จะแสดงว่า g ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่จุด $x_o = a$

ให้ $x_n \longrightarrow a$ แต่ $\{g(x_n):n \geq 0\}$ ไม่เป็นเซตปิดใน R เพราะว่า

$$\{g(x_n):n \geq 0\} = \{g(a)\} \cup \{g(x_n):n \geq 1\}$$

พิจารณาค่าของ a

1. ให้ a เป็นจำนวนตรรกยะ

เลือกจำนวนอตรรกยะ x_n ที่ $x_n > a$ และ $x_n \longrightarrow a$

เพราะฉะนั้น $\{g(x_n):n \geq 0\} = \{1, x_n - a:n \geq 1\}$

ซึ่งมี 0 เป็นจุดลิมิต แต่ 0 ไม่อยู่ใน $\{1, x_n - a:n \geq 1\}$

ดังนั้น g ไม่เป็นเซตปิด

นั่นคือ ฟังก์ชัน g ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ a

2. ให้ a เป็นจำนวนอตรรกยะ

เลือกจำนวนตรรกยะ x_n ที่ $x_n > a$ และ $x_n \longrightarrow a$

ดังนั้น $\{g(x_n):n \geq 0\} = \{0, x_n - a + 1:n \geq 1\}$

ซึ่งมี 1 เป็นจุดลิมิต แต่ 1 ไม่อยู่ใน $\{0, x_n - a + 1:n \geq 1\}$

ไม่เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้น g ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ a

นั่นคือ ฟังก์ชัน f ไม่มีความต่อเนื่องที่ a

โดยบทแทรก 4.8 □

<u>ตัวอย่าง 4.11</u> ให้ f เป็นฟังก์ชั่นบน R ซึ่งมีนิยามเป็น

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

ดังนั้นฟังก์ชัน f ไม่มีความต่อเนื่องที่ 0

<u>พิสูจน์</u> ฟังก์ชัน f เป็นวีคลี่ - โคลส ที่ $x_o = 0$ เพราะว่า

$\{f(x_n):n \geq 0\}$ เป็นเซตปิดใน R

(ในที่นี้เมตทริกสเปซ (X, d) คือ (R, d_u))

ให้ $$g(x) = |x - 0| + f(x) = \begin{cases} |x| & , \quad x \leq 0 \\ x+1, & \quad x > 0 \end{cases}$$

จะแสดงว่า g ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ $x_o = 0$

ให้ $x_n = \frac{1}{n} : n \geq 1$

เพราะว่า

$$\{g(x_n):n \geq 0\} = \{g(0)\} \cup \{g(x_n):n \geq 1\}$$
$$= \{g(0)\} \cup \{g(\tfrac{1}{n}): n \geq 1\}$$
$$= \{0, \tfrac{1}{n} + 1 :n \geq 1\}$$

ซึ่งมี 1 เป็นจุดลิมิต แต่ 1 ไม่อยู่ใน $\{0, \frac{1}{n}+1 :n \geq 1\}$

เพราะฉะนั้น $\{g(x_n):n \geq 0\}$ ไม่เป็นเซตปิดใน R

นั่นคือ g ไม่เป็น วีคลี่ - โคลส ที่ 0

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน f ไม่มีความต่อเนื่องที่ 0

โดยบทแทรก 4.8 □