บทที่ 2

กระบวนการให้เหตุผลและการพิสูจน์

ก่อนที่จะกล่าวถึง กระบวนการให้เหตุผล และการพิสูจน์ ในที่นี้จะเสนอตัวอย่างการพิสูจน์ที่มีปัญหา ที่พบทั้งในระดับมัธยมศึกษา และอุดมศึกษาตอนต้น เพื่อนำไปหาแนวทางในการแก้ปัญหาต่อไปดังนี้

2.1 ตัวอย่างการพิสูจน์ที่มีปัญหา

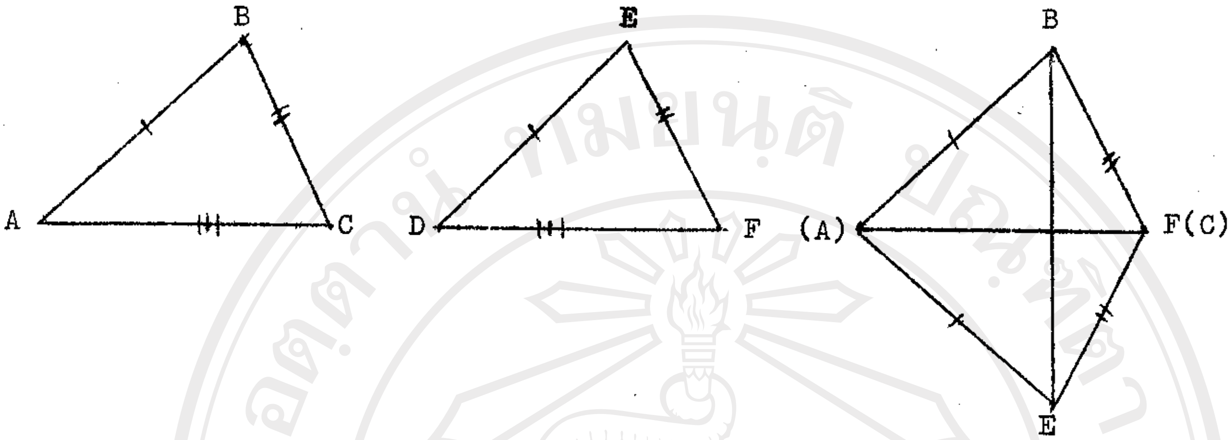
ตัวอย่างที่ 1 การพิสูจน์เรขาคณิตในชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม ซึ่งได้นำมาจากหนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค. 312 และ ค.322 ของกระทรวงศึกษาธิการ (ทฤษฎีที่ 2)

นิยาม การเคลื่อนที่ คือ การเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยระยะระหว่างสองจุดใดๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

สัจพจน์ รูปเรขาคณิตศาสตร์สองรูป จะเท่ากันทุกประการ ก็ต่อเมื่อเคลื่อนที่รูปหนึ่งให้ทับอีกรูปหนึ่งได้สนิท

ทฤษฎีที่ 1 ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปใดๆ มีด้านเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่เท่ากันเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ (ด้าน-มุม-ด้าน)

ทฤษฎีที่ 2 ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสามคู่แล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันทุกประการ (ด้าน-ด้าน-ด้าน)



<u>กำหนดให้</u> ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มี AB = DE

BC = EF และ AC = DF

<u>ต้องการพิสูจน์</u> $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

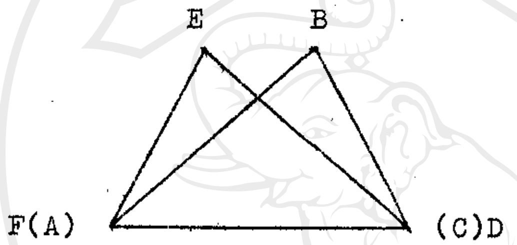
<u>พิสูจน์</u>

1. AB = DE, BC = EF, AC = DF	1. กำหนดให้
2. $\overline{AC}$ ทับ $\overline{DF}$ ได้สนิท	2. AC = DF สัจพจน์การเท่ากัน
3. ลาก $\overline{BE}$	3. B , E เป็นจุดสองจุดที่แตกต่างกัน
4. $D\hat{B}E = D\hat{E}B$	4. มุมตรงข้ามด้านที่เท่ากันของ △
5. $E\hat{B}F = F\hat{E}B$	5. ทำนองเดียวกันกับข้อ 4
6. $D\hat{B}E + E\hat{B}F = D\hat{E}B + F\hat{E}B$	6. คุณสมบัติการบวกด้วยจำนวนจริง
7. $D\hat{B}F = D\hat{E}F$	7. ส่วนใหญ่เท่ากับผลบวกของส่วนย่อย
8. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$	8. จากข้อ 1 และ 7 (ด้าน-มุม-ด้าน)

ในการพิสูจน์ทฤษฎีข้างต้น ใช้วิธีการเคลื่อนที่รูป Δ DEF ทับกับ Δ ABC โดยให้ด้าน DF ทับกับด้าน AC ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งของการเคลื่อนที่

<u>ปัญหา</u> คือ การเคลื่อนที่เป็นวิธีการอย่างไร ในเมื่อการเคลื่อนที่ของแต่ละคนอาจจะแตกต่างกัน และเคลื่อนที่อย่างไรจึงจะทับกันสนิท

<u>ตัวอย่างเช่น</u> วิธีการเคลื่อนที่รูป Δ DEF ทับกับ Δ ABC โดยให้ด้าน DF ทับกับด้าน AC อีกวิธีหนึ่งดังรูป



ในการเคลื่อนที่ดังกล่าว ยังคงให้ด้าน DF ทับกับ AC แต่ทำให้ Δ DEF และ Δ ABC ทับกันไม่สนิท

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 การพิสูจน์ความเป็นอันหนึ่งอันเดียว

<u>ต้องการพิสูจน์ว่า</u> เอกลักษณ์สำหรับการบวกของจำนวนจริง มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่ามีจำนวนจริง 0 ซึ่งทำให้ $a + 0 = 0 + a = a$ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง a

นั่นคือ 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกจำนวนจริง ต่อไปต้องพิสูจน์ว่ามีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

ให้ $0'$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกจำนวนจริงอีกตัวหนึ่ง โดยที่ $0' \neq 0$
เพราะว่า 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก จึงได้ว่า

$$0' + 0 = 0 + 0' = 0' \qquad \text{-----(1)}$$

และ $0'$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก จึงได้ว่า

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0 \qquad \text{-----(2)}$$

โดยคุณสมบัติการสลับที่ สำหรับการบวกจำนวนจริง

$$0 + 0' = 0' + 0$$

จาก (1) และ (2) จึงได้ว่า $0 = 0'$ โดยคุณสมบัติการเท่ากัน
จึงขัดแย้งกับที่สมมุติว่า $0' \neq 0$

ดังนั้นที่สมมุติว่ามี $0'$ เป็นเอกลักษณ์อีกตัวหนึ่งเป็นเท็จ
นั่นคือ มี 0 เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่เป็นเอกลักษณ์ สำหรับการบวกของจำนวนจริง

<u>ปัญหา</u> นักเรียนชั้นมัธยมไม่เข้าใจว่า ทราบได้อย่างไรว่า ไม่มีตัวอื่นๆ อีก เพราะใน
การพิสูจน์ ได้สมมุติตัวอื่นเพียงตัวเดียว

ความจริง $0'$ ที่สมมุติเป็นตัวใดๆ ซึ่งแตกต่างไปจาก 0
ไม่ว่าจะมีตัวอื่นใด อีกกี่ตัวก็ตาม ซึ่งต่างก็ไม่เท่ากับ 0
ก็สามารถพิสูจน์ได้ ทำนองเดียวกันกับ $0'$ ดังนั้นจึงแสดงตัวใดๆ
เพียงตัวเดียวก็เป็นการเพียงพอแล้ว

<u>อีกตัวอย่างหนึ่ง</u> พิสูจน์ว่าเซตว่างมีเพียงเซตเดียว

<u>พิสูจน์</u> 1. สมมุติให้มีเซตว่างแตกต่างกันสองเซตคือ $\emptyset_1$ และ $\emptyset_2$

โดยที่ $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$

2. จาก 1. $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$ ดังนั้น $\emptyset_1 \not\subseteq \emptyset_2$

หรือ $\emptyset_2 \not\subseteq \emptyset_1$

ดังนั้นจะมี $x \in \emptyset_1$ อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง $x \in \emptyset_1$ และ $x \notin \emptyset_2$

หรือมี $y \in \emptyset_2$ อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง $y \in \emptyset_2$ และ $y \notin \emptyset_1$

3. จาก 2. $x \in \emptyset_1$ หรือ $y \in \emptyset_2$ ขัดแย้งกับนิยามของเซตว่าง

ดังนั้นที่สมมุติให้ $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$ เป็นเท็จ

นั่นคือจะต้องได้ว่า $\emptyset_1 = \emptyset_2$

แสดงว่ามีเซตว่างเพียงเซตเดียว

<u>ปัญหา</u> คือ ในการพิสูจน์ แสดงเพียงตัวที่สอง ทราบได้อย่างไรว่า ไม่มีตัวอื่นๆ อีก คำตอบก็คือ $\emptyset_2$ แทนตัวใดๆ ที่ $\emptyset_2 \neq \emptyset_1$ หมายถึงหากมีตัวอื่นอีกซึ่งแตกต่างจาก $\emptyset_1$ สามารถพิสูจน์ได้ทำนองเดียวกัน ดังนั้นแสดงเพียง $\emptyset_2$ ก็เป็นการเพียงพอ

<u>ตัวอย่างที่</u> 3

<u>การพิสูจน์ว่า</u> $.9999... = 1$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $X = .9999...$ -----(1)

ดังนั้น $10X = 9.9999...$ -----(2)

$(2) - (1)$ $9X = 9$

$X = 1$

ขั้นตอนในการพิสูจน์ (2) การคูณ (1) ด้วย 10 อาจมีคำถามว่าคูณด้วยวิธีการใด เช่นถ้าตัวคูณ เป็น 2 หรือ 2.7 จะมีวิธีการคูณอย่างไร เพราะการกระทำดังกล่าว กระทำบนเซตอนันต์ (Infinite set) การกระทำจะไม่จบสิ้นการพิสูจน์ดังข้างบนเป็นการยอมรับว่า การกระทำบนเซตอนันต์กระทำได้เช่นเดียวกับกระทำบนเซตจำกัด (Finite set) การที่จะอธิบายเรื่องนี้ให้ชัดเจน ต้องอธิบายด้วยอนุกรมอนันต์ (Infinite series) และใช้คุณสมบัติการเป็นฟิลด์ลำดับสมบูรณ์ของจำนวนจริง (Complete ordered Field) และความรู้เรื่องขอบเขตบน (Upper bound) ซึ่งสามารถศึกษารายละเอียดได้จากหนังสือ พื้นฐานระบบจำนวนของ สมัย ยอดอินทร์ ซึ่งนับว่าเป็นสิ่งจำเป็นที่ครูคณิตศาสตร์ ควรจะมีมโนมติ (Concept) ในเรื่องระบบจำนวนดีพอสมควร

<u>ตัวอย่างที่</u> 4

<u>จำนวนตรรกยะ (Rational Number) ที่มากที่สุดและน้อยกว่า 9 มีหรือไม่</u>

การตอบคำถามดังกล่าว ก็มีคำตอบสองทาง คือ มี หรือไม่มี อย่างใดอย่างหนึ่ง ซึ่งอาจหาคำตอบดังกล่าวอาศัยวิธีการขัดแย้งคือ ถ้าสมมุติให้มี x ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะที่มากที่สุด และที่น้อยกว่า 9 แต่จากคุณสมบัติของจำนวนตรรกยะ ระหว่างจำนวนตรรกยะสองจำนวนใดๆ จะมีจำนวนตรรกยะ ซึ่งมีค่าระหว่างจำนวนตรรกยะทั้งสองจำนวนนั้นเสมอ

คือ มี $y = \frac{a+b}{2}$ โดยที่ $a < y < b$

ดังนั้น ระหว่างจำนวนตรรกยะ x กับ 9 จะได้ว่า

$x < \frac{x+9}{2} < 9$ จึงขัดแย้งที่ว่า x เป็นตรรกยะที่มากที่สุด ดังนั้นที่สมมุติมี x จึงเป็นเท็จ นั่นคือ ไม่มีจำนวนตรรกยะที่มากที่สุดและน้อยกว่า 9

<u>ตัวอย่างที่</u> 5

<u>การพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ</u>

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้นจะได้ว่า $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

เมื่อ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำที่สุด และ $b \neq 0$

ดังนั้นจะได้ว่า $\frac{a^2}{b^2} = 2$ นั่นคือ $a^2 = 2b^2$ ----(1)

จึงได้ว่า a^2 เป็นเลขคู่ ทำให้ได้ว่า a เป็นเลขคู่

ให้ $a = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $a^2 = 4k^2$

แทนค่า a^2 ใน (1) จะได้ $4k^2 = 2b^2$

จะได้ว่า $b^2 = 2k^2$ จึงได้ว่า b^2 เป็นเลขคู่

ทำให้ได้ว่า b เป็นเลขคู่

ผลตามมา a และ b ต่างก็เป็นจำนวนคู่

ดังนั้น $\frac{a}{b}$ ไม่ใช่เศษส่วนอย่างต่ำ เพราะมี 2 เป็นตัวร่วม จึงขัดแย้งกับที่สมมุติ

ดังนั้นที่สมมุติให้ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะจึงเป็นเท็จ

นั่นคือ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่าง 4, 5 เป็นการพิสูจน์ขัดแย้ง

ปัญหาสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาคือ นักเรียนไม่เข้าใจการพิสูจน์แบบขัดแย้งว่าเป็นวิธีการอย่างไร เช่น การพิสูจน์ในตัวอย่างที่ 4 เริ่มต้นด้วยการสมมุติให้มี x เป็นจำนวนตรรกยะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 9 ผลที่ตามมาทำให้ได้ว่า x ไม่ใช่จำนวนตรรกยะที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 9 จึงเกิดขัดแย้งกับที่สมมุติ ซึ่งการขัดแย้งก็ขัดแย้งตั้งแต่สมมุติให้มีจำนวน x ดังกล่าว ซึ่งความจริงจำนวนนั้นไม่มี

ทำนองเดียวกันในการพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะในตัวอย่างที่ 5 โดยการเริ่มสมมุติให้ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ก็ขัดแย้งกับสิ่งที่ต้องการพิสูจน์แต่แรกสมมุติ และเมื่อพิจารณาการพิสูจน์ต่อไปจนพบข้อขัดแย้ง ก็สรุปว่าที่สมมุติให้ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะเป็นเท็จ นั่นคือสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะก็รู้เพียงเท่านั้น ไม่ทำให้รู้ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ นอกจากพิสูจน์ให้ได้ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

<u>ตัวอย่างที่</u> 6 ความเข้าใจผิดที่ทำให้พิสูจน์ได้ว่า $1 = -1$

เพราะว่า $\sqrt{x - y} = i\sqrt{y - x}$ ------(1)

แทนค่า $x = a$, $y = b$ จะได้ $\sqrt{a - b} = i\sqrt{b - a}$ ----(2)

แทนค่า $x = b$, $y = a$ จะได้ $\sqrt{b - a} = i\sqrt{a - b}$ ------(3)

(2) x (3) $\sqrt{a - b} \cdot \sqrt{b - a} = i^2\sqrt{b - a} \cdot \sqrt{a - b}$ --(4)

$\sqrt{a - b} \cdot \sqrt{b - a}$ หารทั้งสองข้างจะได้ $1 = i^2$

หรือ $1 = -1$

การพิสูจน์ข้างต้นผิดตรงที่สมการ (1) ไม่จริงเสมอไป เพราะว่า ถ้า x , y เป็นจำนวนจริง เราจะได้ว่า $x = y$ หรือ $x > y$ หรือ $x < y$ เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่ง

ก. ถ้า $x = y$ สมการ (1) เป็นจริง สมการ (2), (3) เป็นจริง

เพราะ $a = b$ ที่ผิดคือ $\sqrt{a - b} = \sqrt{b - a} = 0$

$$\therefore \sqrt{a - b} = \sqrt{b - a} = 0$$

ดังนั้นการนำ $\sqrt{a - b}$ $\sqrt{b - a}$ หารทั้งสองข้างคือ การหารด้วยศูนย์ ซึ่งไม่มีความหมาย

ข. ถ้า $x > y$ สมการ (1) ไม่จริง เพราะว่า $L.S = x - y$

$$R.S. = i\sqrt{y - x} = i\sqrt{-(x - y)}$$

$$= i.i\sqrt{x - y} = -\sqrt{x - y}$$

ซึ่ง $L.S. \neq R.S.$

ค. ถ้า $x < y$ สมการ (1) เป็นจริง

นั่นคือ ถ้า $a \neq b(x \neq y)$ สมการ (2) หรือ สมการ (3) อันใดอันหนึ่งเป็นเท็จ

<u>ตัวอย่างที่</u> 7 ความเข้าใจผิดที่ทำให้พิสูจน์ได้ว่า $1 = 2$

ให้ $a = b$

จะได้ $ab = b^2$

ดังนั้น $ab - a^2 = b^2 - a^2$

$a(b - a) = (b - a)(b + a)$

ดังนั้น $a = b + a$

$a = a + a = 2a$

จะได้ $a = 2a$

ดังนั้น $1 = 2$

การพิสูจน์ดังกล่าวไม่ถูกต้อง เพราะว่าใช้วิธีการหาด้วย $b - a$ ทั้งสองข้างของสมการ ซึ่งเป็นการหารด้วยศูนย์ เพราะว่า $a = b$ ซึ่งการหารด้วยศูนย์ไม่มีความหมาย จึงทำให้การพิสูจน์ผิดไป

<u>ตัวอย่างที่ 8</u> ตัวอย่างการพิสูจน์ผิด

ถ้า A เป็น 2×2 เมตริกซ์ และ $A^2 = A$ แล้ว $A = I$ หรือ $A = \underline{0}$

เมื่อ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

<u>พิสูจน์</u> ถ้า $A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

แล้ว $I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A^2 = A$

ถ้า $A = \underline{0}$ แล้ว $\underline{0}^2 = 0$ ดังนั้น $A^2 = A$

การพิสูจน์ข้างต้นเป็นการพิสูจน์ผลไปหาเหตุ (Q ---> P) แต่โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ (P ---> Q) เพราะ P ---> Q ไม่สมมูลย์กับ Q ---> P ดังนั้นการพิสูจน์จึงไม่ถูก

จากตัวอย่างที่ยกมาทั้งหมดนั้น เป็นตัวอย่างของการพิสูจน์ทั้งที่ผิด และการพิสูจน์ที่ถูก การพิสูจน์ที่ผิดส่วนใหญ่จะผิดเพราะไม่คำนึง ถึงโครงสร้างในเรื่องนั้นๆ เช่น ในเรื่องระบบจำนวนนั้น การหารด้วยศูนย์ ไม่มีความหมายเป็นต้น ส่วนตัวอย่างการพิสูจน์ที่ถูก ก็จะเห็นได้ว่า หากพิจารณาการให้เหตุผลในการพิสูจน์ จะมีกฎเกณฑ์บางอย่าง เป็นตัวการสนับสนุนอยู่ที่ทำให้สามารถสรุปได้เช่นนั้น เช่นกฎการยกเว้นตัวกลางที่กล่าวว่า " ถ้า A เป็นอย่างไรอันหนึ่ง และ B เป็นอะไรอันหนึ่งแล้ว A จะต้องเป็น B หรือ A ไม่เป็น B อย่างใดอย่างหนึ่ง " นำไปใช้ในการพิสูจน์ทางอ้อม อีกอันหนึ่ง คือ กฎการขัดแย้งที่กล่าวว่า " A จะเป็น A และไม่เป็น A ในขณะเดียวกันไม่ได้"

ด้วยเหตุต่างๆ ดังกล่าวข้างต้น ผู้เขียนจึงมีความคิดที่จะเรียบเรียงเรื่องราวของการพิสูจน์ และปรัชญาเบื้องต้นที่เป็นเหตุผลเบื้องต้น ในการสนับสนุนการพิสูจน์ พร้อมทั้งเสนอแนะแนวการเรียน การสอนในชั้นมัธยม และอุดมศึกษาตอนต้น โดยมุ่งหวังว่า จะได้มีส่วนช่วยให้นักเรียนนักศึกษา เข้าใจเรื่องราวของการพิสูจน์ได้ดีขึ้น แต่ทั้งนี้ก็เป็นเพียงความมุ่งหวัง และความคิดเห็นของผู้เขียนเพียงเท่านั้น

2.2 ทำไมคณิตศาสตร์ต้องอาศัยการพิสูจน์

ในบางครั้งคู่สนทนา มีความคิดเห็นขัดแย้งกัน และอีกฝ่ายหนึ่งก็จะพยายามให้เหตุและผล แก่คู่สนทนาให้เห็นจริง จนหมดข้อสงสัย และยอมรับในที่สุด ครูแสดงให้เห็นจริงเพื่อตอบข้อสงสัยของนักเรียนที่ว่า ก๊าซไฮโดรเจนเบากว่าอากาศ โดยบรรจุก๊าซไฮโดรเจนเข้าไปในลูกโป่ง ในวิชาคณิตศาสตร์ก็เช่นเดียวกัน ครูคณิตศาสตร์จะแสดงให้นักเรียนเห็นจริงว่า ผลบวกของเลขคู่สองจำนวนเป็นเลขคู่ ต้องอาศัยกระบวนการของเหตุ และผล และการอ้างเหตุผล ในเรื่องราวของคณิตศาสตร์ ที่เกี่ยวกับจำนวนเต็ม โดยธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์นั้น มีองค์ประกอบแยกได้เป็นสองส่วนใหญ่ๆ คือ

(1) โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Structure)

(2) กระบวนการของเหตุ และผล (Reasoning) องค์ประกอบทั้งสองประการนี้ ต่างมีความสำคัญต่อวิชาคณิตศาสตร์ไม่ยิ่งหย่อนกว่ากัน ซึ่งถ้าเปรียบโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ เสมือนร่างกายของคณิตศาสตร์แล้ว กระบวนการของเหตุ และผล ก็เปรียบเสมือนโลหิต ซึ่งหล่อเลี้ยงโครงสร้างดังกล่าวให้มีชีวิตอยู่ เป็นรูปของคณิตศาสตร์

<u>องค์ประกอบของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วย</u>

1. พจน์ที่ไม่ให้คำจำกัดความ (Undefinded term)
2. พจน์ที่ให้คำจำกัดความ (Defined term)
3. สัจพจน์ (Assumption, Axiom, Postulate)
4. ทฤษฎี (Theorem)

1. <u>พจน์ที่ไม่ให้คำจำกัดความ</u>

พิจารณาการหาความหมายของคำว่า "สีดำ" ถ้าอธิบายว่า สีดำคือ สีของถ่าน หรือสีผิวของชาวนิโกร ก็จะมีปัญหาต่อไปอีกว่า สีของถ่าน หรือ สีผิวของชาวนิโกร เป็นอย่างไร ซึ่งจำเป็นจะต้องวกกลับมาใช้คำว่า "สีดำ" ไปอธิบายสีของถ่าน และ สีผิวของชาวนิโกรอีก จึงเป็นการวนเวียนไปมาโดยไม่รู้ว่าสีดำอธิบายได้อย่างไร

โดยธรรมชาติแล้ว การที่คนสามารถทราบความหมายของสีดำ ว่าเป็นอย่างไรนั้น เพราะคนมีความคุ้นเคยกับวัตถุสีดำมาก่อนแล้ว ก็สร้างสามัญสำนึกว่า สีดำเป็นอย่างไร มิใช่ทราบความหมายของ "สีดำ" โดยการอธิบายด้วยคำอื่น

ในทางคณิตศาสตร์ ก็มีบางคำ ซึ่งไม่สามารถอธิบายความหมายได้เช่นกัน ดังตัวอย่างให้ความหมายว่า

"จุด" คือ ตำแหน่งที่เส้นตรงสองเส้นตัดกัน

"เส้นตรง" คือ แนวที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุด จะเห็นได้ว่าเป็นการฝากความไม่รู้เรื่องของจุดไว้กับเส้นตรง และฝากความไม่รู้เรื่องของเส้นตรงคืนไปยังจุด ซึ่งโดยความเป็นจริงแล้ว มิได้รู้ความหมายของจุด และเส้นตรงผ่านคำอธิบายที่กล่าวมาแล้ว แต่การที่รู้ความหมายของจุด และเส้นตรงนั้นก็โดยอาศัยความคุ้นเคยกับจุด และเส้นตรงมาก่อน

คำซึ่งเป็นคำสามัญขั้นพื้นฐาน ซึ่งไม่สามารถนำคำอื่นมาอธิบาย ได้ดังได้ยกตัวอย่างมานี้ เรียกว่า "พจน์ที่ไม่ให้คำจำกัดความ" หรือ "พจน์พื้นฐานเบื้องต้น (Primitive term)" หรือ "พจน์อนิยาม"

ดังนั้นจึงเป็นที่ยอมรับว่า ทุกสาขาวิชาจำเป็นต้องมีคำชุดหนึ่ง ซึ่งเป็นคำสามัญขั้นพื้นฐาน ซึ่งไม่สามารถนำคำอื่นมาอธิบายได้ ซึ่งเรียกว่า "พจน์ที่ไม่ใช้คำจำกัดความ" ตัวอย่างพจน์ที่ไม่ให้คำจำกัดความอื่นๆ ได้แก่ บาป, บุญ, ดี, ชั่ว, ถูก, ผิด, เปรี้ยว, หวาน มัน, เค็ม, เร็ว, ช้า, มาก, น้อย, ศูนย์, หนึ่ง, แดง, ขาว ฯลฯ

2. <u>พจน์ที่ให้คำจำกัดความ</u>

เมื่อเกิดความคุ้นเคยกับพจน์ที่ไม่ให้คำจำกัดความ ก็สามารถนำคำเหล่านั้นไปอธิบายคำอื่น ดังเช่น สมมุติว่า คำว่า "พ่อ" และ"ลูก" เป็นพจน์ที่ไม่ให้คำจำกัดความ ก็สามารถนำคำดังกล่าวนี้ ไปอธิบายคำอื่นได้ ดังเช่น

ปู่ คือ พ่อของพ่อ

ปู่ทวด คือ พ่อของปู่

หลาน คือ ลูกของลูก

เหลน คือ ลูกของหลาน

คำซึ่งสามารถนำคำอื่นมาอธิบายให้เข้าใจได้ ดังตัวอย่างที่กล่าวมาเรียกว่า "พจน์ที่ให้คำจำกัดความ" คำอธิบายความหมายของคำอื่น เช่น "พ่อของพ่อ" อธิบายความหมายของคำว่า "ปู่" เรียกว่า "พ่อของพ่อ" เป็นนิยามของคำว่า " ปู่ " บางครั้งเรียกพจน์ที่ให้คำจำกัดความว่าเป็น " คำที่นิยามได้ " หรือ " พจน์นิยาม "

โดยปกติคำที่นำมาเป็นนิยามนั้น จะต้องเป็นคำซึ่งนิยามมาก่อนแล้ว หรือเป็นคำซึ่งเป็นพจน์ที่ไม่ให้คำจำกัดความ

ตัวอย่างคำซึ่งเป็นพจน์ที่ให้คำจำกัดความ

ก. จำนวนเต็มคู่ คือ จำนวนเต็มที่หารด้วยสองลงตัว

ข. สี่เหลี่ยมจัตุรัสคือ สี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเท่ากันทั้งสี่ด้าน

ค. $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $4 = 3 + 1$

ง. เซตว่าง คือ เซตที่ไม่มีสมาชิก ฯลฯ

3. <u>สัจพจน์</u>

ในการดำเนินงานร่วมกันในระบบใดระบบหนึ่งหรือการเริ่มต้นศึกษาวิชาต่างๆ จำเป็นอย่างยิ่งจะต้องมีข้อตกลง หรือกติกา หรือความเชื่อร่วมกัน เป็นหลักยึดในเบื้องต้น เหตุที่จำเป็นต้องมีหลักยึดร่วมกันในเบื้องต้น โดยไม่จำเป็นต้องพิสูจน์หาเหตุผลมาสนับสนุนข้อตกลงเหล่านั้น ก็เพราะเหตุหลายประการคือ

ก. มีความเชื่อร่วมกัน เป็นพื้นฐานเบื้องต้น ซึ่งถึงแม้ว่าไม่สามารถแสดงให้เห็นจริงได้ก็ตาม ดังเช่นคนสมัยก่อนมีความเชื่อว่า โลกแบนราบและมีขอบเขตของพื้นโลกอยู่ไกลเกินที่จะไปถึง และในทางศาสนาก็อาจจะมีความเชื่อร่วมกันเกิดขึ้นยึดถือเป็นค่านิยมขึ้นมาดังเช่น มีความเชื่อว่าทำดีได้ดี และทำชั่วได้ชั่ว หรือเชื่อว่าทำดีจะได้ขึ้นสวรรค์ ทำชั่วจะตกนรก เป็นต้น

ข. สิ่งเหล่านั้น มีความเป็นจริงด้วยตัวมันเอง เป็นที่ยอมรับด้วยความสบายใจตลอดมาโดยไม่มีข้อโต้แย้งดังเช่น คนทุกคนต้องตาย หรือสิ่งทั้งหลายต่างก็เท่ากับตัวมันเอง

ค. มีความจำเป็นต้องยอมรับหลักการเหล่านั้นเพื่อความสะดวกสบาย ในการอยู่ร่วมกัน หรือเพื่อดำเนินการร่วมกัน ดังเช่นศีลห้า เป็นหลักการขั้นต้นที่เชื่อร่วมกันเพื่อสนับสนุนความเชื่อร่วมกัน หรือเช่นในการเล่นฟุตบอลจำเป็นต้องมีกติกาหรือกฎเกณฑ์ที่ต้องยอมรับร่วมกัน เพื่อจะได้เล่นด้วยกันได้

หลักการที่ยึดถือร่วมกันโดยปราศจากการพิสูจน์ หาเหตุผลมาประกอบดังที่ยกตัวอย่างมาข้างต้นเรียกว่า ข้อตกลงขั้นมูลฐาน หรือบางครั้งอาจเรียกว่าสมมุติรากฐาน หรืออาจเรียกเป็นอย่างอื่นว่า สิ่งที่เห็นจริงแล้ว หรือข้อตกลงหรือ กติกา ซึ่งสรุปเป็นความง่ายๆ ว่าความจริงเบื้องต้น (Primitive true statement)

โดยปกติแล้ว ความเชื่อดังกล่าวนี้สามารถแยกประเภทย่อยได้ เป็นสามแบบคือ

(ก) สมมุติฐาน (Assumption) เป็นความเชื่อที่เกิดขึ้นโดยสัญชาติญาณ หรือเกิดจากการคาดคะเน แล้วก็เกิดเป็นความเชื่อดังกล่าวขึ้น

(ข) สิ่งที่เห็นจริงแล้ว (Axiom) เป็นความเชื่อในสิ่งที่เป็นจริงโดยตัวมันเอง และยอมรับ และถือปฏิบัติกันมาได้ โดยไม่เคยนึกขัดแย้ง

(ค) ข้อตกลงหรือกติกา (Postulate) เป็นความเชื่อที่เกิดจากการตกลงกัน หรือตั้งเป็นกติการ่วมกัน เพื่อดำเนินการอย่างใดอย่างหนึ่ง ให้มีความรัดกุมยิ่งขึ้น

ความเชื่อทั้งสามอย่างที่พยายามแยกให้เห็นนี้ ก็สามารถเรียกรวมกันได้ว่า เป็นข้อตกลงขั้นมูลฐาน หรือสัจพจน์

4. ทฤษฎี

ข้อความต่างๆ ซึ่งสามารถพิสูจน์ให้เห็นจริงได้นั้น เป็นที่นิยมเรียกกันว่า ทฤษฎี การพิสูจน์ให้เป็นจริงดังกล่าวก็คือ การนำเอาความจริงอันก่อนๆ มาอ้างอิงผสมกันให้เกิดเป็นความจริงอันใหม่ และเรียกความจริงที่เกิดขึ้นใหม่นี้ว่า ทฤษฎี ความจริงที่นำมาอ้างอิงนั้นอาจจะเป็น นิยาม หรือสัจพจน์ หรือทฤษฎีที่มีมาแล้วก็ได้

ในศาสตร์หนึ่งๆ ทฤษฎีจะแบ่งตัวเองออกเป็นสองระดับคือ ทฤษฎีระดับต้นและทฤษฎีธรรมดา

ก. ทฤษฎีระดับต้น เป็นทฤษฎีที่อาศัยการพิสูจน์โดยการนำเอาพจน์อนิยาม หรือพจน์นิยาม หรือสัจพจน์เท่านั้น สำหรับนำมาอ้างอิงในการพิสูจน์ ทฤษฎีประเภทนี้บางครั้งการพิสูจน์ก็ทำได้ยาก หรือเข้าใจยาก จึงทำให้ทฤษฎีประเภทนี้บางครั้งก็กำหนดขึ้นเป็นสัจพจน์เลยก็มี เช่นในเรขาคณิตของยูคลิดความที่ว่า "ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกันแล้วจะตัดกันเป็นจุด และเป็นจุดเดียวเท่านั้น" บางโอกาสความดังกล่าวนี้อาจยอมรับเป็นสัจพจน์เลยก็มี แต่นักคณิตศาสตร์ก็สามารถพิสูจน์เป็นทฤษฎีก็มี

ข. <u>ทฤษฎีธรรมดา</u> ทฤษฎีประเภทนี้เป็นทฤษฎีซึ่งอาศัยการพิสูจน์ โดยการนำเอาพจน์อนิยาม หรือพจน์อนิยาม หรือสัจพจน์ และทฤษฎีที่พิสูจน์มาแล้วนำมาผสมกัน ซึ่งเป็นทฤษฎีส่วนใหญ่ที่พบอยู่ในวิชาคณิตศาสตร์

ทำไมจึงจำเป็นต้องมีทฤษฎี การมีเพียงพจน์อนิยาม พจน์นิยาม และสัจพจน์ จะไม่เป็นการเพียงพอ สำหรับโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ เพราะการมีสามประการดังกล่าวมานี้ ทำให้มนุษย์สามารถคาดคะเน ความจริงอันใหม่ให้เกิดขึ้นมาได้อีกเรื่อยๆ และเมื่อพิสูจน์ความจริงเหล่านั้นมาได้ ความจริงดังกล่าวก็เป็นทฤษฎีขึ้น

เพื่อให้เข้าใจโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น จึงยกตัวอย่างมาประกอบดังนี้

<u>ตัวอย่างโครงสร้างเชิงคณิตศาสตร์ของวิชาเรขาคณิตเบื้องต้น</u>

สามารถแยกให้เห็นพจน์อนิยาม, พจน์นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีเบื้องต้นง่ายๆดังนี้คือ

ก. <u>พจน์อนิยาม</u> ประกอบด้วย "จุด" "เส้นตรง" และ "อยู่ใน"

ข. <u>พจน์นิยามและสัจพจน์</u>

<u>สัจพจน์ที่</u> 1 ถ้า P และ Q เป็นจุดสองจุด แล้วมีเส้นตรงเพียงเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้น ซึ่ง P และ Q อยู่ในเส้นดังกล่าว (คือระหว่างจุดสองจุดมีเส้นตรงได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น)

<u>สัจพจน์ที่</u> 2 ถ้า l เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่งแล้ว จะต้องมีจุดอย่างน้อยสามจุดอยู่ใน l

<u>สัจพจน์ที่</u> 3 ถ้า l เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง แล้วจะต้องมีจุด P อย่างน้อยหนึ่งจุด ซึ่ง P ไม่อยู่ใน l

<u>สัจพจน์ที่</u> 4 มีจุดอย่างน้อยสองจุด

<u>นิยามที่</u> 1 เส้นตรง l ผ่านจุด P มีความหมายเดียวกับจุด P อยู่ในเส้นตรง l

<u>สัจพจน์ที่</u> 5 ถ้า l เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง และ P เป็นจุดๆหนึ่งซึ่ง P ไม่อยู่ใน l แล้วจะต้องมีเส้นตรง m ผ่านจุด P เพียงเส้นเดียวเท่านั้น ซึ่ง m ไม่ผ่านจุดใดๆ เลยซึ่งเป็นจุดอยู่ใน l

<u>นิยามที่</u> 2 เส้น l และ m ตามสัจพจน์ที่ 5 นี้เรียกว่า l ขนานกับ m หรือ m ขนานกับ l

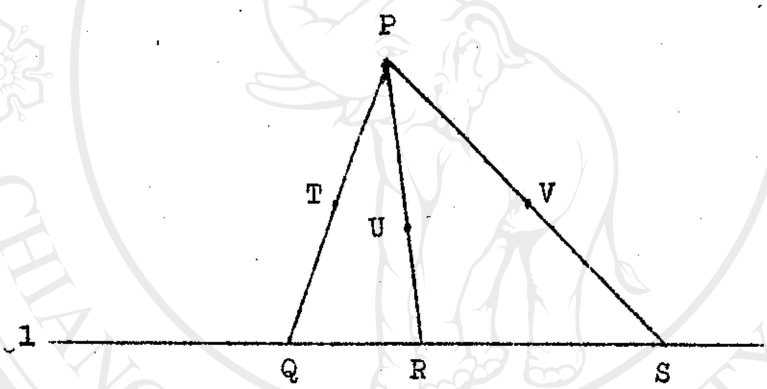
ค. <u>ทฤษฎี</u>

<u>ทฤษฎีที่</u> 1 มีเส้นตรงอย่างน้อยหนึ่งเส้น

ทฤษฎีนี้พิสูจน์ได้โดยอาศัยสัจพจน์ที่ 4 คือมีจุดอย่างน้อยสองจุด จึงเป็นไปตามสัจพจน์ที่ 1 คือมีเส้นตรงอย่างน้อยหนึ่งเส้น

<u>ทฤษฎีที่ 2</u> มีจุดอย่างน้อยเจ็ดจุด

ทฤษฎีนี้พิสูจน์ได้ โดยจากทฤษฎีที่ 1 มีเส้นตรงอย่างน้อยหนึ่งเส้น ให้ชื่อเส้นดังกล่าวคือ l



จึงเป็นไปตามสัจพจน์ที่ 2 คือ l จะต้องมีจุดอย่างน้อยสามจุดแตกต่างกัน ให้ชื่อว่า Q , R และ S แต่ตามสัจพจน์ที่ 3 จะต้องมีจุด P ซึ่ง P ไม่อยู่ใน l จึงทำให้เกิดจุดอย่างน้อยสี่จุด คือ P, Q, R และ S

โดยอาศัยสัจพจน์ที่ 1 ก็จะได้ว่ามีเส้นตรง k , m , n โดยที่ k ผ่านจุด P และ Q , m ผ่านจุด P และ R และ n ผ่านจุด P และ S และโดยอาศัยสัจพจน์ที่ 2 ที่ว่าแต่ละเส้นจะต้องมีจุดอย่างน้อยสามจุด ก็จะได้ว่ามีจุด T อีกจุดหนึ่งอยู่ใน k มี U อีกจุดหนึ่งอยู่ใน m และ V อีกจุดหนึ่งอยู่ใน n

จึงสรุปได้ว่า มีจุดอย่างน้อยเจ็ดจุดคือ P, Q, R, S, T, U, V

ทฤษฎีที่ 3 มีเส้นตรงอย่างน้อยคู่หนึ่งที่ขนานกัน

ทฤษฎีที่ 4 มีจุดอย่างน้อยสามจุด ซึ่งไม่อยู่ร่วมเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎีที่ 5 มีเส้นตรงอย่างน้อยสามเส้น ซึ่งไม่มีจุดใดเพียงจุดเดียวที่อยู่ในทั้งสามเส้นดังกล่าว

ทฤษฎีสามอันหลังนี้ สามารถพิสูจน์ได้เช่นเดียวกับทฤษฎีก่อน

ตัวอย่างโครงสร้างเชิงคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน

โครงสร้างเชิงคณิตศาสตร์นั้น ไม่จำเป็นต้องอยู่ในรูปของคณิตศาสตร์เท่านั้น การอยู่ร่วมกันในสังคม ก็สามารถแยกให้เห็นโครงสร้างเชิงคณิตศาสตร์ได้อย่างง่ายๆ คือ

ก. พจน์อนิยาม "บุญ" "ความดี" "ความสุข" "ความทุกข์" และ "ความเดือดร้อน"

ข. พจน์นิยาม

นิยามที่ 1 ท่านได้ชื่อว่าเป็นคนมีบุญ ก็ต่อเมื่อท่านทำแต่ความดีเท่านั้น

นิยามที่ 2 ท่านได้ชื่อว่าเป็นคนทำความชั่ว ก็ต่อเมื่อท่านทำความเดือดร้อนให้แก่คนอื่น

นิยามที่ 3 ท่านได้ชื่อว่าเป็นคนมีบาป ก็ต่อเมื่อท่านทำความชั่วเท่านั้น

ค. สัจพจน์

สัจพจน์ที่ 1 ถ้าท่านทำความดีแล้วท่านจะมีความสุข

สัจพจน์ที่ 2 ถ้าท่านทำความชั่วแล้วท่านจะมีความทุกข์

ง. ทฤษฎี

ทฤษฎีที่ 1 ถ้าท่านเป็นคนมีบาปแล้วท่านจะมีความทุกข์ (ผลจากนิยามที่ 3 และสัจพจน์ที่ 2)

ทฤษฎีที่ 2 ถ้าท่านเป็นคนมีบุญแล้วท่านจะมีความสุข (ผลจากนิยามที่ 1 และสัจพจน์ที่ 1)

ทฤษฎีที่ 3 ท่านได้ชื่อว่าเป็นคนมีบาป ก็ต่อเมื่อท่านทำความเดือดร้อนให้แก่ผู้อื่น (ผลจากนิยามที่ 2 และ 3)

เมื่อพิจารณาธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ ดังได้กล่าวมาจะเห็นว่าคณิตศาสตร์เริ่มด้วยพจน์อนิยาม และสัจพจน์แล้ว จึงสร้างพจน์นิยามและพิสูจน์ทฤษฎี ดังนั้นงานหลักของวิธีการทางคณิตศาสตร์ ก็คือการพิสูจน์ทฤษฎีต่างๆ หรือสูตรต่างๆ จึงน่าจะเป็นการเพียงพอสำหรับที่จะตอบคำถามที่ว่าทำไมคณิตศาสตร์ต้องอาศัยการพิสูจน์

ส่วนกระบวนการของเหตุ และผล ที่นำไปใช้ในการพิสูจน์ จะได้กล่าวต่อไป

2.3 กระบวนการของเหตุ และผล

กระบวนการของเหตุและผล ซึ่งมีอยู่ในมนุษย์ชาตินั้น เป็นพลังอันสำคัญที่ช่วยให้มนุษย์สร้างอารยธรรมให้แก่โลกเรื่อยๆ มา การที่มนุษย์มีกระบวนการของเหตุ และผล มากกว่าสัตว์อื่น จึงเป็นผลให้มนุษย์มีความเหนือกว่าสัตว์อื่นเรื่อยมา ทุกยุคทุกสมัย

แม้ว่าปัจจุบันมนุษย์สามารถสร้างเครื่องคำนวณ (Computer) ช่วยแก้ปัญหาต่างๆ ได้ แต่เครื่องคำนวณต่างๆ ก็มิได้มีเหตุผลเหมือนมนุษย์ เป็นเพียงแต่ทำตามคำสั่งที่มนุษย์ได้เรียบเรียงไว้เท่านั้น มนุษย์มีสิ่งที่เหนือกว่าเครื่องคำนวณคือ สามารถคาดคะเนหาความจริงใหม่ขึ้นมาได้เรื่อยๆ อย่างไม่จบสิ้น แต่เครื่องคำนวณไม่มีสิ่งที่กล่าวนี้

กระบวนการของเหตุผลนั้น เป็นปรากฏการณ์ทางจิต (Psychological Phenomina) ซึ่งมนุษย์ใช้เป็นเครื่องมือสื่อความหมายทางใจ (Mental talk) กระบวนการดังกล่าวนี้ เป็นการเรียบเรียงข้อเท็จจริงที่มีอยู่ เป็นสื่อนำให้จิตสามารถสร้างข้อเท็จจริงใหม่ขึ้นมาได้อีก หรือเห็นด้วยกับข้อเท็จจริงใหม่ที่สร้างขึ้นมา การที่จิตของอีกคนหนึ่งสามารถรับสื่อความหมายของข้อเท็จจริงใหม่ หรือเห็นพ้องด้วยกับข้อเท็จจริงใหม่ ด้วยความสบายใจ หรือด้วยความยินดี ภาษาทางพระท่านพูดว่า เกิดญาณสื่อไปมาหากันและกันได้

การถ่ายทอดเหตุผลของอีกฝ่ายหนึ่ง ไปยังอีกฝ่ายหนึ่ง เป็นกระบวนการที่ไม่ง่ายนัก มีความจำเป็นต้องมีภูมิหลัง และประสพการณ์คล้ายกัน หรือระดับเดียวกันมาก่อน จึงจะเกิดญาณถ่ายทอดเหตุผลไปสู่กันและกันได้

กระบวนการของเหตุ และผลโดยทั่วไปแล้ว เป็นกระบวนการนำข้อความ หรือปรากฏการณ์ที่เป็นเหตุ (อาจจะหลายอัน) นำมาแจกแจงแสดงความสัมพันธ์ หรือความต่อเนื่องกัน เพื่อทำให้เกิดข้อความใหม่ หรือปรากฏการณ์ใหม่ เรียกว่าผลสรุป หรือผล

กระบวนการของเหตุ และผลแบ่งได้เป็นสามลักษณะคือ

(ก) เหตุผลเชิงนิรนัย (Deductive Reasoning)

(ข) เหตุผลเชิงอุปนัย (Inductive Reasoning)

(ค) เหตุผลเชิงสหัสญาณ (Intuitive Reasoning)

<u>เหตุเชิงนิรนัย</u>

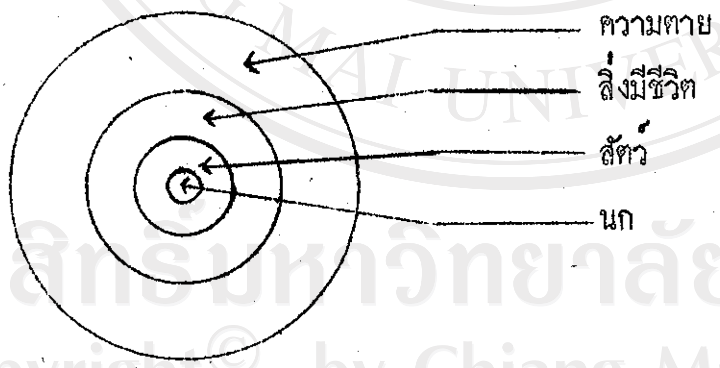
เป็นวิธีการให้เหตุผล ซึ่งเริ่มต้นด้วยเหตุใหญ่ (Major Premise) และติดตามด้วยเหตุย่อย (Minor Premise) เมื่อพิจารณาดูความสัมพันธ์ระหว่างเหตุใหญ่ และเหตุย่อยก็จะมีผลบังคับให้เกิดผลสรุป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 เหตุ 1) สิ่งมีชีวิตทุกอย่างต้องตาย

2) สัตว์เป็นสิ่งมีชีวิต

3) นก เป็นสัตว์

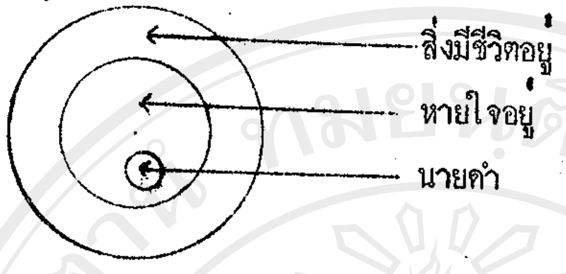
ผลสรุป นกต้องตาย



<u>ตัวอย่างที่</u> 2 เหตุ 1) ถ้านายดำยังหายใจอยู่ แสดงว่านายดำ ยังมีชีวิต

2) ขณะนี้นายดำหายใจอยู่

ผลสรุป ขณะนี้นายดำยังมีชีวิต



<u>ข้อสังเกตเกี่ยวกับเหตุผลเชิงนิรนัย</u>

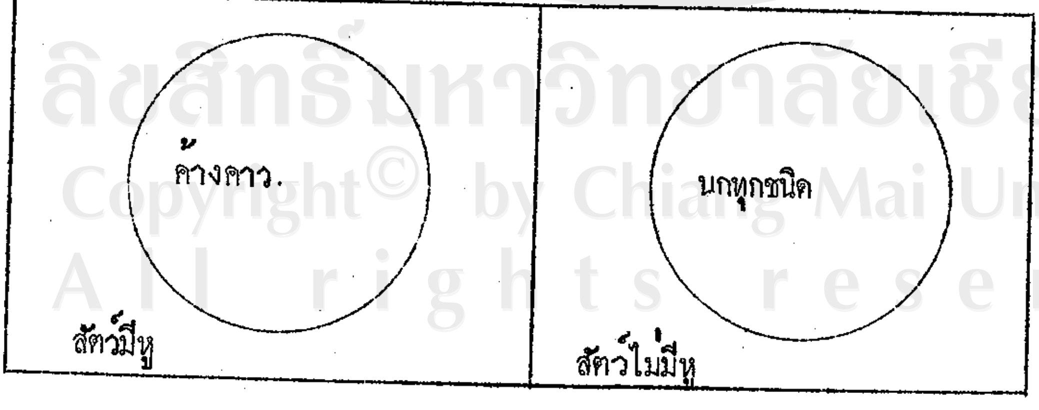
ประการแรก คือ มีเหตุใหญ่เป็นแม่บท ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ หรือเงื่อนไขอยู่ในรูปของวงกว้าง เรียกว่าเป็นการวางนัยทั่วไป (Generalization) ซึ่งในตัวอย่างที่หนึ่ง การวางนัยทั่วไป คือ "สิ่งมีชีวิตทุกอย่างต้องตาย" ทำหน้าที่เป็นเหตุใหญ่ และ "สัตว์เป็นสิ่งมีชีวิต" และ" นกเป็นสัตว์" เป็นเหตุย่อยลดหลั่นกันมา จึงทำให้เกิดผลสรุปว่า" นกต้องตาย"

ประการที่สอง คือ เมื่อยอมรับว่าเหตุใหญ่และเหตุย่อยเป็นจริงแล้ว ผลจะต้องเป็นจริงด้วย ถึงแม้ว่าจะขัดกับความรู้สึกก็ตาม ดังตัวอย่างเช่น

เหตุ 1) นกทุกตัวต้องไม่มีหู

2) ค้างคาวมีหู

ผล ค้างคาวไม่ใช่นก



เหตุผลเชิงอุปนัย

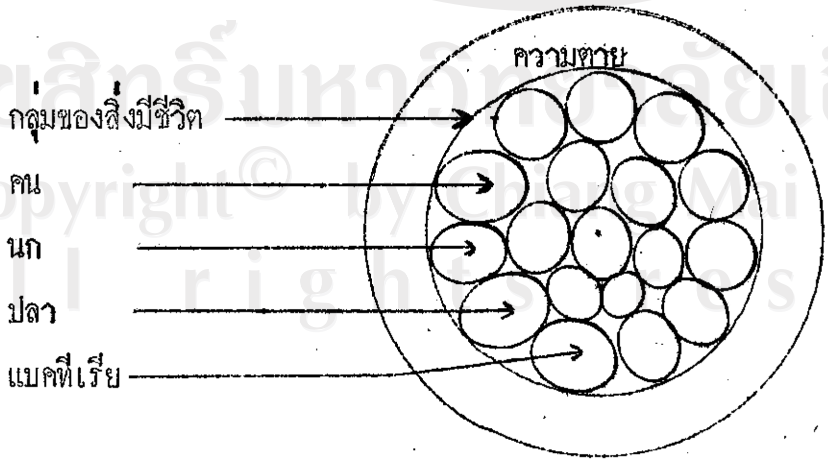
เป็นกระบวนการของเหตุ และผลซึ่งส่วนที่เป็นเหตุประกอบ ด้วยเหตุหลายอันซึ่งอิสระจากกัน มีน้ำหนักและความสำคัญเท่าๆ กัน เหตุทั้งหลายที่มีอยู่ไม่มีเหตุอันใดแสดงเป็นเหตุใหญ่หรือเป็นการวางนัยทั่วไปไว้ และในที่สุดเหตุเหล่านั้น ก็รวมตัวกันเองมาเป็นผลสรุป อยู่ในรูปของการวางนัยทั่วไป

ตัวอย่างเช่น

เหตุ 1) คนทุกคนต้องตาย
2) นกทุกชนิดต้องตาย
3) แมลงทุกชนิดต้องตาย
4) ต้นไม้ทุกชนิดต้องตาย
5) หญ้าทุกชนิดต้องตาย
6) งูทุกชนิดต้องตาย
7) มดทุกชนิดต้องตาย
8) ปลาทุกชนิดต้องตาย
9) อมีบาทุกชนิดต้องตาย
10) แบคทีเรียทุกอย่างต้องตาย

.
.
.

ผลสรุป สิ่งมีชีวิตทุกอย่างต้องตาย



จากตัวอย่างจะเห็นว่า เหตุแต่ละอันมีน้ำหนักเท่ากัน และเป็นอิสสระจากกันและกัน คือ การที่ทุกคนต้องตาย มิได้เป็นเหตุบังคับให้ต้นไม้ทุกต้นต้องตาย แต่เหตุดังกล่าวมีความเหมือนกันคือ ต่างก็เป็นสิ่งมีชีวิต และต่างก็ต้องตาย จึงทำให้เกิดผลสรุปอยู่ในรูปของการวางนัยโดยทั่วไป คือ สิ่งมีชีวิตทุกอย่างต้องตาย

ข้อสังเกตเกี่ยวกับเหตุผลเชิงนิรนัย และอุปนัย จะเห็นว่าสวนทางกันคือ แบบนิรนัยมีความซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไป เป็นเหตุใหญ่ แต่แบบอุปนัยมีความซึ่งเป็นการวางนัยทั่วไปเป็นผลสรุป

เหตุผลเชิงสหัชญาณ

กระบวนการของเหตุและผล แบบนี้ยังมีความลึกลับซับซ้อนอยู่มาก และยังไม่ถือว่าเป็นลักษณะซึ่งอยู่ในรูปของเหตุ และผล เพราะยังไม่สามารถแจกแจงความสัมพันธ์ของเหตุ และผลออกมาให้เห็นได้

เหตุผลเชิงสหัชญาณ เป็นสิ่งที่ผุดขึ้นมาจากจิตใต้สำนึกเข้าสู่จิตสำนึก ทำให้จิตสำนึกเข้าใจว่าต้องมีความจริงใหม่เกิดขึ้น(แต่มิได้อยู่ในรูปของสัญชาติญาณตามธรรมชาติ)บางครั้งจะผุดขึ้นมาแวบเดียวแล้วก็กลับหายไปอีกก็มี บางครั้งก็ปรากฏอยู่นาน

เหตุผลเชิงสหัชญาณในแต่ละคนนั้น แตกต่างกันตามสภาพของจิตใต้สำนึก ที่ได้สะสมความจริง และปรากฏการณ์ ตลอดจนข้อคิดต่างๆมากน้อยแตกต่างกัน ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์หลายอันเกิดขึ้นเพราะเหตุผลเชิงสหัชญาณในขั้นแรกแล้ว จึงพยายามหาทางพิสูจน์ และกำหนดหลักการในภายหลัง และเมื่อสามารถกำหนดนิยาม สัจพจน์ หรือทฤษฎีสนับสนุน เพื่อแจกแจงหาความสัมพันธ์ของเหตุ และผลได้ ก็ทำให้สามารถรู้กระจ่างแจ้งเห็นจริงขึ้นมาได้

ทฤษฎีสัมพันธภาพ (Relativity) ของไอสไตน์ (1823 - 1852)ก็เกิดมาจากเหตุผลเชิงสหัชญาณ แล้วจึงสามารถพิสูจน์ได้ และทฤษฎีสุดท้ายของแฟร์มาต์ (Fermat's last theorem) ก็เกิดจากเหตุผลเชิงสหัชญาณเช่นเดียวกัน

การนั่งบำเพ็ญภาวนานานๆ เพื่อค้นหาความจริงบางอย่าง มีผลให้จิตใต้สำนึกรับความจริงและข้อคิดนานับประการไปสะสมไว้ ความจริงและข้อคิดดังกล่าวก็ไปรวมตัวกันเองอยู่ในจิตใต้สำนึก

ซึ่งยังผลให้เกิดความจริงใหม่ขึ้นมาในจิตสำนึก และในที่สุดเมื่อหาทางแจกแจงได้ด้วยเหตุผลเชิงอุปนัย และนิรนัยก็เกิดเป็นกระบวนการรู้แจ้งเห็นจริงเกิดขึ้น

โดยปกติเหตุผลเชิงสหัชญาณนั้น เกิดขึ้นบ่อยกับเพศหญิงมากกว่าเพศชาย แต่ในเพศหญิงเมื่อเกิดบ่อย ก็เลือนหายไปบ่อย แต่ถ้าเกิดกับเพศชายแล้ว มักจะฝังใจอยู่นาน เพราะไม่เกิดบ่อย

เรื่องของเหตุผลเชิงสหัชญาณ เป็นเรื่องซึ่งยังซับซ้อนอยู่ และยังไม่สามารถกำหนดแบบแผนได้ เพียงแต่สรุปได้อย่างง่ายๆ ว่าเกิดจากปัญญาสำนึกของแต่ละคน ซึ่งมีแตกต่างกัน

บทบาทของเหตุผลแต่ละแบบ

ก. เหตุผลเชิงอุปนัย เป็นตัวการสรุปปรากฏการณ์ หรือข้อคิดเห็นให้อยู่ในรูปหมวดหมู่ เป็นลักษณะการวางนัยทั่วไป เพื่อสร้างนิยาม หรือสัจพจน์

ข. เหตุผลเชิงนิรนัย เป็นตัวการที่นำอนิยาม และสัจพจน์ต่างๆ ไปพิสูจน์ทฤษฎีใหม่

ค. เหตุผลเชิงสหัชญาณ เป็นตัวการช่วยให้เกิดการคาดคะเน เพื่อให้ได้ข้อความคาดคะเน ซึ่งอาจกลายเป็นทฤษฎีในภายหลัง

2.4 การอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล

เมื่อพิจารณาเหตุผลเชิงนิรนัย และเหตุผลเชิงอุปนัย จะพบว่ามีลักษณะเป็นกลุ่มประพจน์สองกลุ่ม คือ กลุ่มแรกเป็นเหตุ และกลุ่มหลังเป็นผลตามมา ซึ่งเรียกว่าผลสรุป ดังตัวอย่างเช่น

เหตุ นายขาว เป็นคน
คนทุกคนเป็นสิ่งมีชีวิต
สิ่งมีชีวิตทุกอย่างต้องตาย

ผลสรุป นายขาวต้องตาย
นายขาวเป็นสิ่งมีชีวิต

ลักษณะของกลุ่มประพจน์ ซึ่งเป็นเหตุและผลสรุปดังที่ยกตัวอย่างมานี้ โดยปกติแล้ว เรียกว่า การอ้างเหตุผล (Argument) และการอ้างเหตุผลที่ยกตัวอย่างมา จะเห็นว่า เมื่อทราบว่าเหตุเป็นจริง ก็เป็นอันบังคับว่าผลเป็นจริงตามไปด้วย ซึ่งการอ้างเหตุผลในลักษณะนี้ เรียกว่า การอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล (Valid Argument) และผลสรุปที่ได้ก็เป็น ผลสรุปที่สมเหตุสมผล (Valid Consequence)

พิจารณาการอ้างเหตุผลอีกตัวอย่างหนึ่งคือ

เหตุ x ไม่เป็นคน
คนทุกคนเป็นสิ่งมีชีวิต
สิ่งมีชีวิตทุกอย่างต้องตาย
ผลสรุป x ไม่ต้องตาย
x ไม่เป็นสิ่งมีชีวิต

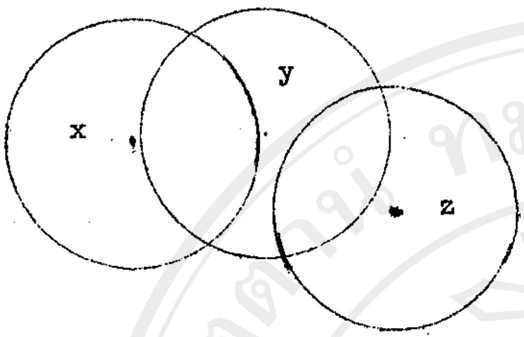
จากตัวอย่างนี้ จะเห็นว่า เหตุไม่มีบทบาทเพียงพอที่จะบังคับให้ผลสรุปเป็นไปได้ เพราะว่าการที่ x ไม่เป็นคน x อาจจะเป็น หมู แมว เป็ด ไก่ ก็ได้ ซึ่ง x สามารถเป็นสิ่งมีชีวิต และ x ต้องตายก็ได้ และการที่ x ไม่เป็นคน x อาจเป็นสิ่งที่ไม่ต้องตายก็ได้ จึงแสดงว่าผลสรุปมิได้มีผลบังคับมาจากเหตุ การอ้างเหตุผล ซึ่งอยู่ในรูปแบบเช่นนี้ เรียกว่า เป็นการอ้างเหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล (Invalid Argument) และผลสรุปที่ได้ก็เรียกว่าเป็น ผลสรุปที่ไม่สมเหตุสมผล (Invalid Consequence)

พิจารณาอีกสองตัวอย่างต่อไปนี้

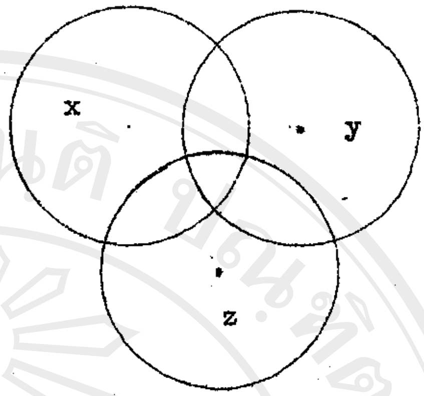
เหตุ จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง
จำนวนจริงบางจำนวน เป็นจำนวนอตรรกยะ
ผลสรุป จำนวนตรรกยะบางจำนวนเป็นจำนวนอตรรกยะ

เหตุ x บางตัวเป็น y
y บางตัวเป็น z
x บางตัวเป็น z

การอ้างเหตุผลที่ยกมาทั้งสองตัวอย่างนี้ อันแรกผลสรุปเป็นไปไม่ได้เลย ส่วนอันที่สอง ผลสรุปอาจเป็นได้ หรือเป็นไปไม่ได้ก็ได้ ดังรูปธรรมที่แสดงให้เห็นดังนี้



เป็นไปไม่ได้



เป็นไปได้

พิจารณาการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เหตุ	A :	จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ
	B :	จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง
ผลสรุป	C :	จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง

จากตัวอย่างดังกล่าวนี้ จะเห็นว่า $A \wedge B$ เป็นจริงมีผลบังคับให้ C จำเป็นต้องเป็นจริง ซึ่งโดยปกติแล้วเขียนย่อว่า

$$A , B \models C$$

ซึ่งมีความหมายว่า

ถ้า A และ B ต่างก็เป็นจริงแล้ว C จะเป็นต้องเป็นจริง

หรือ $A \wedge B$ เป็นจริง $\Longrightarrow$ C จำเป็นต้องเป็นจริง

ในทำนองเดียวกัน การอ้างเหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล ดังตัวอย่าง

เหตุ	P :	x	บางตัวเป็น y
	Q :	y	บางตัวเป็น z
ผลสรุป	R :	x	บางตัวเป็น z

จะเห็นว่า $P \wedge Q$ เป็นจริง แต่ R ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง คือเป็นจริงก็ได้เป็นเท็จก็ได้ ซึ่งโดยปกติแล้วเขียนย่อว่า

$$P , Q \not\models R$$

ซึ่งมีความหมายว่า

R มิได้เป็นผลมาจาก P และ Q หรือ P และ Q เป็นจริง แต่ R ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง ตามไปด้วย

จึงพอสรุปเป็นการวางนัยทั่วไปของการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล ดังนี้คือ

เมื่อ $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ และ C เป็นประพจน์ในการอ้างเหตุผล โดยที่ $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ เป็นเหตุ และ C เป็นผลสรุป

$H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n \models C$ ก็ต่อเมื่อ

ถ้า H_1 H_2 ... H_n เป็นจริง แล้ว C จำเป็นต้องเป็นจริง

เมื่อพิจารณาประพจน์ ซึ่งเชื่อมด้วย "ก็ต่อเมื่อ" เช่นนี้ก็ทำให้ทราบได้ว่าโดยอาศัยข้อเท็จจริงของเงื่อนไขไปกลับคือ

$H_1, H_2, \ldots, H_n \not\models C$ ก็ต่อเมื่อ

$H_1 \wedge H_2 \wedge \ldots \wedge H_n$ เป็นจริง แต่ C ไม่จำเป็นต้องเป็นจริง

2.5 <u>การอนุมาน</u> (Inference)

การอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล ดังได้กล่าวมาข้างต้น เรียกว่า <u>การอนุมาน</u>

<u>สัญลักษณ์ที่ใช้ และความหมาย</u>

ก. $P, Q, R, A, B, S_1, S_2, \ldots, S_n$ แทนประพจน์

ข. $\vee$, $\wedge$, ===> , $\sim$ แทน "หรือ" "และ" "ถ้า...แล้ว" "นิเสธ" ตามลำดับ

เช่น P V Q อ่านว่า " P หรือ Q "

P $\wedge$ Q อ่านว่า " P และ Q "

P==>Q อ่านว่า "ถ้า P แล้ว Q "

$\sim$ Q อ่านว่า "นิเสธของ Q "

ค. Q ===> R , Q $\models$==== R หมายความว่า Q===>R เป็นจริง และ Q เป็นจริง ทำให้อนุมานได้ผลสรุปว่า R เป็นจริง

พิจารณาประพจน์ P ====> Q เป็นจริง และเมื่อทราบว่า P เป็นจริง Q จำเป็นต้องเป็นจริง และเมื่อเขียนข้อความนี้ให้อยู่ในรูปของการอนุมาน ก็จะได้ดังนี้

P ===> Q , P $\models$===== Q ซึ่งอาการแบบนี้เรียกว่า กฎการอนุมาน

<u>กฎพื้นฐานสำหรับการอนุมาน</u>

1. <u>การแจงผลตามเหตุ</u> (Modus ponen)

P ===> Q , P $\models$=== Q

2. <u>การแจงผลค้านเหตุ</u> (Modus tollen)

ก. P ===> Q , $\sim$ Q $\models$==== $\sim$P

ข. R ===> (S_1 V S_2V ... V S_n) ,

$\sim S_1 \wedge \sim S_2 \wedge \dots \wedge \sim S_n$ $\models$==== $\sim$R

3. <u>ตรรกบทแบบสมมุติฐาน</u> (Hypothetical Syllogism)

ก. $P \Longrightarrow Q$, $Q \Longrightarrow R$ $\models$ $P \Longrightarrow R$

ข. $P \Longrightarrow S_1$, $S_1 \Longrightarrow S_2$, $S_2 \Longrightarrow S_3$, ... ,
$S_n \Longrightarrow R$ $\models$ $P \Longrightarrow R$

4. <u>การแจงผลความร่วม</u> (Conjunctive Inference)

ก. $P, Q \models P$

ข. $P, Q \models Q$

ค. $P \wedge Q \models Q$

5. <u>การแจงผลแย้งสลับที่</u> (Contrapositive Inference)

$P \Longrightarrow Q \models \sim Q \Longrightarrow \sim P$

6. <u>การแจงผลเป็นกรณี</u> (Inference by case)

ก. $A \Longrightarrow Q$, $B \Longrightarrow Q$ $\models$ $A \vee B \Longrightarrow Q$

ข. $S_1 \Longrightarrow Q$, $S_2 \Longrightarrow Q$, ..., $S_n \Longrightarrow Q$ $\models$ $S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n \Longrightarrow Q$

7. <u>การแจงผลแบบเลือก</u> (Disjunctive Inference)

ก. $P \models P \vee Q$

ข. $P \vee Q$, $\sim Q$ $\models$ P

เมื่อพิจารณาความหมายของการอนุมาน คือ การอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผลดังกล่าวแล้ว ก็สามารถกล่าวแบบวางนัยทั่วไปได้คือ

<u>การอนุมาน</u> คือ การอ้างเหตุผล ซึ่งยอมรับว่ากลุ่มประพจน์ ที่เป็นเหตุต่างก็เป็นจริง และมีผลบังคับให้ประพจน์ที่เป็นผลสรุป จำเป็นต้องเป็นจริงตามไปด้วย

เพื่อเป็นการตอบคำถามที่ว่า ทำอย่างไรจึงเรียกการพิสูจน์ย้อนกลับไปพิจารณาโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ และกระบวนการของเหตุและผล เมื่อยอมรับว่าสัจพจน์ และนิยามเป็นความจริง ก็นำสัจพจน์และนิยามดังกล่าว มาอ้างเป็นเหตุผลเพื่อสนับสนุนข้อความใหม่ว่าเป็นจริง และเรียกกระบวนการนั้น พิสูจน์ข้อความใหม่ให้เป็นทฤษฎี

ถ้าจะกล่าวแบบการวางนัยทั่วไป ก็สามารถกล่าวได้ว่า <u>การพิสูจน์ในระบบใดระบบหนึ่ง</u>ก็คือ

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n \models\!\!== c$$

โดยที่ $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ เป็นสัจพจน์ หรือนิยามหรือทฤษฎีที่มีมาก่อนแล้วในระบบนั้น และ c เป็นข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ซึ่งโดยปกติแล้วจะเป็นทฤษฎี

นั่นคือ การพิสูจน์ก็คือ การอนุมานชนิดหนึ่งนั่นเอง จะเห็นได้ว่าการพิสูจน์ในระบบใดๆ ก็ตาม ต้องอาศัยสัจพจน์หรือ อนิยาม หรือทฤษฎีที่พิสูจน์มาก่อน ซึ่งสิ่งเหล่านี้ต้องตั้งอยู่บนพื้นฐานของโครงสร้างของเรื่องนั้นๆ และลักษณะเฉพาะของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์เรื่องนั้นๆ สัจพจน์ในโครงสร้างดังกล่าว มีบทบาทเป็นตัวกำหนดโครงสร้างนั้นๆ

2.6 <u>ตัวอย่างระบบสัจพจน์</u>

เพื่อให้เข้าใจ และคุ้นเคยกับระบบสัจพจน์ จึงขอยกตัวอย่างระบบสัจพจน์ มาประกอบการพิจารณาดังนี้

<u>สัจพจน์ของระบบ</u> 7_3

<u>พจน์อนิยามในระบบ</u> 7_3 ได้แก่ "จุล", "แนว"

<u>พจน์นิยามและสัจพจน์</u>

<u>นิยามที่</u> 1 P เป็นเซตของจุล

<u>นิยามที่</u> 2 V เป็นเซตของ แนว

ระบบ 7_3 ได้กำหนดสัจพจน์เพื่อให้เกิดความเข้าใจ เรื่องราวของ "จุด" และ "แนว" ไว้ดังนี้คือ

<u>สัจพจน์ที่</u> 1 ถ้า $A, B \varepsilon P$ และ $A \neq B$ แล้วจะมี $x \varepsilon V$ อย่างน้อยหนึ่งอัน ซึ่ง $A \varepsilon x$ และ $B \varepsilon x$

<u>สัจพจน์ที่</u> 2 ถ้า $A, B \varepsilon P$ และ $A \neq B$ แล้วจะมี $x \varepsilon V$ อย่างมากหนึ่งอัน ซึ่ง $A \varepsilon x$ และ $B \varepsilon x$

<u>สัจพจน์ที่</u> 3 ถ้า $x, y \varepsilon V$ และ $x \neq y$ แล้วจะมี $A \varepsilon P$ อย่างน้อยหนึ่งอัน ซึ่ง $A \varepsilon x$ และ $A \varepsilon y$

<u>สัจพจน์ที่</u> 4 เซต V ไม่เป็นเซตว่าง

<u>สัจพจน์ที่</u> 5 ถ้า $x \varepsilon V$ แล้วจะมี $A, B, C \varepsilon P$ อย่างน้อยสามอัน $(A \neq B \neq C \neq A)$ ซึ่ง $A, B, C \varepsilon x$

<u>สัจพจน์ที่</u> 6 ถ้า $x \varepsilon V$ แล้วจะมี $A \varepsilon P$ ซึ่ง $A \varepsilon x$

<u>สัจพจน์ที่</u> 7 ถ้า $x \varepsilon V$ แล้วจะมีสมาชิกของ P อย่างมากสามอัน ซึ่งสมาชิกดังกล่าวเป็นสมาชิกของ x

จากสัจพจน์ดังกล่าวนี้ ก็ทำให้เกิดทฤษฎีต่อไปนี้คือ

<u>ทฤษฎีที่</u> 1 ถ้า $A, B \varepsilon P$ และ $A \neq B$ แล้วจะมี x เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $x \varepsilon V$ และ $A, B \varepsilon x$

<u>ทฤษฎีที่</u> 2 ถ้า $x, y \varepsilon V$ และ $x \neq y$ แล้วจะมี A เพียงตัวเดียว ซึ่ง $A \varepsilon P$ และ $A \varepsilon x$ และ $A \varepsilon y$

<u>ทฤษฎีที่</u> 3 มีสมาชิกของ P อย่างน้อยสามตัวคือ A, B, C ซึ่งไม่มีสมาชิก x ของ V ตัวใดตัวหนึ่งเพียงตัวเดียว ซึ่งทำให้ $A, B, C \varepsilon x$

<u>ทฤษฎีที่</u> 4 P มีสมาชิกอย่างน้อย 7 อัน

<u>ทฤษฎีที่</u> 5 P มีสมาชิก 7 อันเท่านั้น

<u>ทฤษฎีที่</u> 6 แต่ละ $x \in V$, x มีสมาชิกเพียงสามอันเท่านั้น

<u>ทฤษฎีที่</u> 7 แต่ละ $A \in P$ จะต้องมีสมาชิกของ V สามอัน และสามอันเท่านั้น ซึ่งมี A เป็นสมาชิก

<u>ทฤษฎีที่</u> 8 V มีสมาชิก 7 อันเท่านั้น

<u>ทฤษฎีที่</u> 9 แต่ละ $x \in V$ มีสมาชิกของ P สี่อัน และสี่อันเท่านั้น ซึ่งไม่เป็นสมาชิกของ x

และเพื่อให้เห็นลักษณะของการพิสูจน์ในระบบ 7_3 จึงขอพิสูจน์ทฤษฎีบางทฤษฎี เพื่อให้เป็นตัวอย่างพอสังเขป

<u>ทฤษฎีที่</u> 1 ถ้า $A, B \in P$ และ $A \neq B$ แล้วจะมี x เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $x \in V$ และ $A, B \in x$

<u>พิสูจน์</u>

1. โดยสัจพจน์ที่ 4 $V \neq \emptyset$ ดังนั้นมี $x \in V$
2. โดยสัจพจน์ที่ 1 และ 2 ทำให้ได้ว่า ถ้า $A, B \in P$ และ $A \neq B$ แล้ว จะมี x เพียงอันเดียวเท่านั้น ซึ่ง $A, B \in x$

<u>ทฤษฎีที่</u> 2 ถ้า $x, y \in V$ และ $x \neq y$ แล้วจะมี A เพียงตัวเดียว ซึ่ง $A \in P$ และ $A \in x$ และ $A \in y$

<u>พิสูจน์</u>

1. โดยสัจพจน์ที่ 4 $V \neq \emptyset$
2. โดยสัจพจน์ที่ 3 ถ้า $x, y \in V$ และ $x \neq y$ แล้วจะมีอย่างน้อยหนึ่งอัน ซึ่ง $A \in x$ และ $A \in y$
3. จากข้อ 2 ให้ $x, y \in V$ มี $A, B \in P$ และ $A \neq B$ ซึ่ง $A, B \in x$ และ $A, B \in y$ ได้ตามสัจพจน์ที่ 7

4. ข้อ 3 ขัดแย้งกับทฤษฎีที่ 1
นั่นคือ ถ้า $x, y \varepsilon V$ และ $x \neq y$ แล้วจะมี A เพียงตัวเดียว ซึ่ง $A \varepsilon P$ และ $A \varepsilon x$ และ $A \varepsilon y$

<u>ทฤษฎีที่</u> 3 มีสมาชิกของ P อย่างน้อยสามตัวคือ A, B, C ซึ่งไม่มีสมาชิก x ของ V ตัวใดตัวหนึ่งเพียงตัวเดียว ซึ่งทำให้ $A, B, C \varepsilon x$

<u>พิสูจน์</u>
1. โดยสัจพจน์ข้อ 4 $V \neq \emptyset$
2. โดยสัจพจน์ข้อ 5 และข้อ 7 ถ้า $x \varepsilon V$ จะมีสมาชิก $A,B,C \varepsilon P$ และ $A \neq B \neq C \neq A$ ซึ่ง $A, B, C \varepsilon x$ เพียงสามตัวเท่านั้น
3. โดยสัจพจน์ที่ 6 ถ้า $x \varepsilon V$ แล้วจะมี $D \varepsilon P$ ซึ่ง $D \not\varepsilon x$ และ $D \neq A \neq B \neq C \neq D$ เพราะถ้า D เป็นตัวใดตัวหนึ่งใน A, B, C ก็จะขัดแย้งกับข้อ 2
4. จากทฤษฎีที่ 1 $D \neq A$ จะต้องมี $y \varepsilon V$ ซึ่ง $A, D \varepsilon y$ และ $D \neq B$ จะต้องมี $Z \varepsilon V$ ซึ่ง $B, D \varepsilon Z$ และ $y \neq z \neq x \neq y$
5. จากข้อ 2 y, z จะต้องมีสมาชิกสามอัน
ดังนั้นให้ $E \varepsilon y$ และ $F \varepsilon z$ โดยที่ $E \neq F$ เพราะถ้า $E = F$ แล้วจะทำให้ y และ z มีสมาชิกร่วมกันมากกว่าหนึ่งตัว จะขัดแย้งกับทฤษฎีที่ 2
6. ทำนองเดียวกันกับข้อ 5 ทำให้ E, F ต่างจาก A, B, C, D
7. $D, E, F \not\varepsilon x$ เพราะถ้า D หรือ E หรือ F เป็นสมาชิกของ x จะทำให้ x มีสมาชิกมากกว่าสามตัว ซึ่งขัดแย้งกับข้อ 2

นั่นคือ มีสมาชิกของ P อย่างน้อยสามตัว คือ A, B, C ซึ่งไม่มีสมาชิก x ของ V ตัวใดตัวหนึ่งเพียงตัวเดียว ซึ่งทำให้ $A,B,C \varepsilon x$

ส่วนการพิสูจน์ทฤษฎีอื่นๆ สามารถศึกษาได้จากหนังสือ

Blumenthal, L.M. A Modern View of Geometry, Freeman, 1961

เพื่อให้เข้าใจระบบ 7_3 ได้ดังยิ่งขึ้น จึงยกตัวอย่างที่เป็นรูปธรรมของระบบ 7_3 มาประกอบการพิจารณาดังเช่น

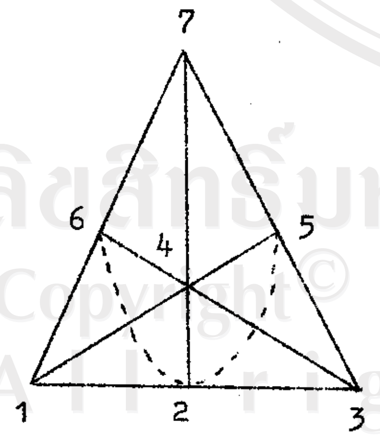
<u>ตัวอย่างที่</u> 1 ให้ $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$$V = \{\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{3,4,7\}, \{3,5,6\}\}$$

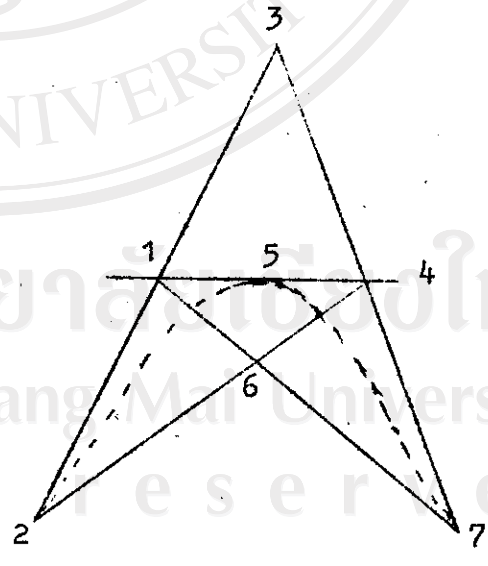
จากตัวอย่าง จะเห็นได้ว่าสอดคล้องกับระบบ 7_3 ทุกประการ เช่น $1,2 \in P$ และ $1 \neq 2$ จะเห็นว่ามี $\{1,2,3\} \in V$ ซึ่ง $1,2 \in \{1,2,3\}$ ซึ่งสอดคล้องกับสัจพจน์ที่ 1 และสมาชิกอื่นของ P ก็เช่นกัน

$\{1,2,3\}$, $\{2,4,6\} \in V$ และ $\{1,2,3\} \neq \{2,4,6\}$ จะเห็นว่ามี $2 \in P$ ซึ่ง $2 \in \{1,2,3\}$ และ $2 \in \{2, 4, 6\}$ ซึ่งสอดคล้องกับสัจพจน์ที่ 3 และสมาชิกอื่นของ V ก็เช่นกัน สามารถตรวจสอบได้ว่าสอดคล้องด้วย

<u>ตัวอย่างที่</u> 2



รูป ก



รูป ข

โดยอาศัยตัวเลขเช่นเดียวกับตัวอย่างที่ 1 จะเห็นว่าทั้งรูป ก. และรูป ข. ต่างก็เป็นรูปธรรมของระบบ 7_3

2.7 วิธีการทางวิทยาศาสตร์

วิธีการวิทยาศาสตร์นั้น พอจะสรุปขั้นตอน และตัวอย่างจากชีวิตประจำวันธรรมดา ให้เห็นได้เป็นขั้นดังนี้

1. รู้สึกมีข้อสงสัย หรือมีปัญหา เหตุที่เกิดความรู้สึกดังกล่าว ก็เพราะสาเหตุหลายประการ คือ

   ก. ไม่ได้คาดว่า ปัญหาดังกล่าวจะเกิดขึ้น

   ข. ไม่สามารถตอบข้อสงสัย หรือปัญหาดังกล่าวนั้นได้

   ค. ยังไม่เข้าใจสาเหตุของปัญหา และขณะเดียวกันก็ยังไม่สามารถหาช่องทางเพื่อให้ได้ข้อยุติ หรือแก้ปัญหาดังกล่าวนั้นได้

ตัวอย่างเช่น มีความสงสัย หรือเกิดปัญหาว่า "ทำไมเนื้อวัวที่หมักเอาไว้ในตู้กับข้าว ในห้องครัว จึงหายไป" จึงต้องหาข้อมูลต่างๆ มาพิจารณาเพื่อขจัดความสงสัยคือ

2. รวบรวมข้อเท็จจริงที่เกี่ยวพันกับข้อสงสัย และปัญหาดังกล่าว ตัวอย่างเช่น เกี่ยวกับปัญหาที่ว่า "ทำไมเนื้อวัวที่หมักไว้ในตู้กับข้าวจึงหายไป" ก็จำเป็นต้องสำรวจข้อเท็จจริงที่เกี่ยวพันกับการหายของเนื้อวัวดังกล่าวคือ

   ก. เนื้อวัวออกไปจากตู้กับข้าวได้โดยวิธีใดบ้าง

   ข. คน หรือสัตว์เป็นผู้เอาเนื้อวัวไป

   ค. ตู้กับข้าวเปิดออกได้อย่างไร

   ง. มีร่องรอยอะไรบ้าง ที่พอจะเป็นพยานหลักฐานว่าเนื้อวัวออกไปจากตู้กับข้าวได้อย่างไร

   จ. ถ้าเป็นคนเอาเนื้อวัวดังกล่าวไป ใครบ้างที่อยู่ในข่ายดังกล่าว

   ฉ. ถ้าเป็นสัตว์เอาเนื้อดังกล่าวออกไป ควรจะเป็นสัตว์อะไร และสัตว์นั้นจะเปิดตู้กับข้าวได้อย่างไร

ช. คนหรือ สัตว์ดังกล่าวมาแล้วนี้จะเข้ามาเอาเนื้อได้อย่างไร

ซ. มีร่องราย หรือหลักฐาน หรือข้อเท็จจริงอะไรบ้างเกี่ยวพันกับการหาย ของเนื้อวัวดังกล่าว

3. เสนอแนะคำตอบให้แก่ข้อสงสัย หรือแนะแนวทางแก้ปัญหาดังกล่าว เมื่อมีข้อสงสัยตามข้อ 1.1 และหลังจากได้รวบรวมข้อเท็จจริง และเก็บข้อมูลซึ่งเกี่ยวพันกับข้อสงสัยตามข้อ 1.2 ก็พยายามสร้างข้อเสนอแนะคำตอบให้แก่ข้อสงสัย หรือเสนอข้อคิดเห็น ซึ่งอาจเป็นสาเหตุของปัญหาดังกล่าวนั้น ซึ่งเป็นที่นิยมเรียกกันว่า เป็นการตั้งสมมุติฐานของปัญหาดังกล่าว ตัวอย่างเช่น เรื่องเนื้อวัวหาย ก็สามารถตั้งสมมุติฐานได้ดังนี้คือ

ก. สมมุติฐานที่หนึ่ง มีคนบางคนเข้าไปในครัวแล้ว ขโมยเนื้อดังกล่าวไป

ข. สมมุติฐานที่สอง แม่ครัวคงเอาเนื้อไปทอดแล้ว เก็บไว้หรืออาจจะกินหมดแล้ว

ค. สมมุติฐานที่สาม แมวบ้านอื่นมาเอาเนื้อไปกิน(เพราะแมวในบ้านไม่มี)

ง. สมมุติฐานที่สี่ สุนัขคงแอบเอาเนื้อไปกิน

4. วิเคราะห์ผลที่ได้จากสมมุติฐานดังกล่าวว่า สมมุติฐานใดบ้างที่น่าจะยอมรับได้ โดยสมมุติว่า ถ้าสมมุติฐานแต่ละอันเป็นจริง จะมีอะไรเกิดตามมา และผลดังกล่าวสอดคล้องกับข้อเท็จจริงที่รวบรวมไว้แล้วหรือไม่ ตลอดจนพยายามหาข้อเท็จจริงคัดค้าน หรือสนับสนุนสมมุติฐานดังกล่าว ตัวอย่างเช่น เรื่องเนื้อวัวที่กล่าวมาแล้ว ก็สามารถวิเคราะห์สมมุติฐานแต่ละอันได้ดังนี้

ก. ถ้าสมมุติฐานที่หนึ่งเป็นจริง คือ มีคนเข้าไปในครัวแล้วขโมยเนื้อดังกล่าว คนคนนั้นจะต้องเข้ามทางประตูหน้าบ้าน เพราะทางหลังบ้านมีกำแพงสูง คนไม่สามารถปีนเข้ามาได้ และเมื่อเข้ามาทางหน้าบ้าน ก็จะต้องเดินผ่านมาให้เห็น เพราะนั่งอยู่หน้าบ้านตลอดเวลา จึงยืนยันได้ว่า ไม่มีใครเดินผ่านมาทางหน้าบ้าน จึงแสดงว่าสมมุติฐานที่หนึ่งเป็นไปไม่ได้

ข. ถ้าสมมุติฐานที่สองเป็นจริงคือ แม่ครัวเอาเนื้อไปทอดเก็บไว้ หรือกินกันหมดแล้ว คงเป็นไปไม่ได้ เพราะแม่ครัวนอนป่วยเป็นไข้หวัดตั้งแต่เมื่อคืนที่แล้วจนขณะนี้ก็ยังนอนเป็นไข้อยู่ จึงแสดงว่าสมมุติฐานที่สองเป็นไปไม่ได้

ค. ถ้าสมมุติฐานที่สามเป็นจริงคือ แมวบ้านอื่นมาเอาเนื้อไปกิน เนื่องจากปริมาณเนื้อดังกล่าวมีมากกว่าที่แมวตัวเดียวจะกินหมด ก็แสดงว่าจะต้องมีเนื้อดังกล่าวเหลืออยู่บ้าง แต่ปรากว่าไม่มีเหลืออยู่ และอีกนัยหนึ่ง ถ้ามีแมวบ้านอื่นเข้ามาสุนัขในบ้านก็ต้องส่งเสียงไล่ออกไป (เพราะตามปกติก็เป็นเช่นนั้น) แต่ก็ไม่ได้ยินเสียงสุนัขไล่แมวดังกล่าว จึงแสดงว่าสมมุติฐานที่สามเป็นไปไม่ได้

ง. ถ้าสมมุติฐานที่สี่เป็นจริงคือ สุนัขเอาเนื้อไปกิน ก็จะต้องมีเศษเนื้อเล็กๆตกหล่นอยู่แถวนั้นบ้าง เพราะสุนัขต้องคาบเนื้อไป และเนื้อยุ่ยที่ติดอยู่ ก็จำเป็นต้องขาดตกบ้าง และถ้าสุนัขมาเอาเนื้อดังกล่าวจริง ก็จะต้องมีรอยเล็บสุนัขงัดตู้กับข้าวที่เก็บเนื้อดังกล่าวจริง และมีเศษเนื้อเล็กๆ ตกหล่นอยู่แถวนั้นจริงจึงแสดงว่า สมมุติฐานที่สี่น่าจะเป็นไปได้ เมื่อได้วิเคราะห์สมมุติฐานตาม 1.4 แล้วพบว่ามีสมมุติฐานใดบ้างที่น่าจะเป็นไปได้ ก็พยายามหาทางพิสูจน์ หรือหาหลักฐานยืนยันว่าสมมุติฐานดังกล่าวเป็นจริง

ตัวอย่างเช่น จากเรื่องเนื้อวัวดังกล่าวแล้ว ก็สามารถเลือกได้แล้วว่าสมมุติฐานที่สี่น่าจะเป็นไปได้ จึงหาทางพิสูจน์ และยืนยันสมมุติฐานดังกล่าวจึงต้องวิเคราะห์ต่อไปอีกว่า สุนัขที่ไหนมากินเนื้อดังกล่าว เพราะถ้าเป็นสุนัขบ้านอื่นเข้ามากิน ก็จะโดนสุนัขในบ้านไล่ออกไป(เพราะโดยปกติก็จะเป็นเช่นนั้น) หรือไม่เช่นนั้น ก็ต้องได้ยินเสียงสุนัขในบ้านเห่าไล่สุนัขตัวนั้นออกไป แต่ก็ไม่มีเสียงดังกล่าว และถ้าสุนัขบ้านอื่นเข้ามา ก็จำเป็นต้องเข้ามาทางหน้าบ้าน แต่ทว่าเท่าที่จำได้ก็ไม่เห็นมีสุนัขบ้านอื่น เข้ามาเพราะนั่งอยู่หน้าบ้านตลอดช่วงเวลาที่เนื้อวัวมีโอกาสหายไป จึงแสดงว่าต้องเป็นสุนัขในบ้านเอาเนื้อดังกล่าวไปกินและถ้าสุนัขในบ้านกินเนื้อไปในปริมาณขนาดนั้น ก็จะต้องพุงกางผิดปกติ จึงไปตรวจสอบสุนัขในบ้านดู ก็ปรากฏว่าพุงกางผิดปกติจริงตามที่คาดไว้ และเมื่ออ้าปากสุนัขดังกล่าวดูก็พบว่ามีเศษเนื้อดังกล่าว ติดฟันสุนัขอยู่บ้าง จึงแสดงว่าสมมุติฐานที่สี่น่าจะเป็นจริงได้

<u>ข้อสังเกตเกี่ยวกับวิธีการวิทยาศาสตร์</u>

เมื่อวิเคราะห์ดูขั้นตอนของวิธีการวิทยาศาสตร์ จะเห็นว่าขั้นตอนแต่ละอันมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน เพราะถ้าเกิดผิดพลาด หรือคลุมเครือในขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่งแล้ว ก็จะมีผลให้ขั้นตอนอื่นคลุมเครือ หรือผิดพลาดตามไปด้วย

ประการแรก เริ่มตั้งแต่ขั้นที่หนึ่ง คือ รู้สึกมีข้อสงสัย หรือมีปัญหา จะต้องทราบแน่ชัดว่า ข้อสงสัย หรือปัญหาดังกล่าวคืออะไร มีขอบข่ายแค่ไหน

ตัวอย่างเช่น เรื่องเนื้อวัวหายดังกล่าวมาแล้ว จะต้องทราบให้แน่ชัดว่าเนื้อวัวหายไปจริงหรือไม่ หรือเพียงแต่เป็นการเปลี่ยนรูปเนื้อวัวไปเป็นอาหารอย่างอื่นแล้ว หรือเนื้อวัวดังกล่าวแอบซ่อนอยู่ในห้องครัว โดยเป็นการเปลี่ยนที่อยู่เท่านั้น และถ้าหายไปจริงก็จะต้องวางขอบข่ายว่าหายไปได้อย่างไร

ประการที่สอง การรวบรวมข้อมูล และข้อเท็จจริงเกี่ยวกับปัญหา หรือข้อสงสัยดังกล่าว ขึ้นอยู่กับความชำนาญในการสำรวจ และการสังเกต ตลอดจนเจตนาการสำรวจหรื อสังเกตว่ามีเจตนา ให้ครอบคลุมถึงอะไรบ้าง

โดยปกติข้อมูล และข้อเท็จจริงที่เกี่ยวพันกับปัญหา หรือข้อสังสัยจะมีอยู่ในเหตุการณ์นั้นพร้อมมูลอยู่แล้วทุกอย่าง แต่อาจจะค้นหา หรือสำรวจไม่พบเพราะมีโอกาสมองข้ามข้อเท็จจริงหรือ ข้อมูลดังกล่าว ถ้าการรวบรวมข้อมูล หรือข้อเท็จจริงบางประการ ถูกมองข้ามไปหรือนึกไม่ถึง ก็มีโอกาสให้เกิดการมองข้ามสมมุติฐานบางอันตามไปด้วย และมีโอกาสทดสอบสมมุติฐานบางอันลำบากไปด้วย

ประการที่สาม การตั้งสมมุติฐานไม่ง่ายนัก เพราะไม่สามารถจะทราบได้ว่าสมมุติฐานที่ตั้งไว้นั้น ครอบคลุมถึงโอกาสของความน่าจะเป็นไปหมดทุกโอกาสหรือไม่ การตั้งสมมุติฐานนั้นต้องอาศัยความชำนาญตลอดจนต้องเป็นคนช่างคิด และช่างสงสัย เพราะถ้าตั้งสมมุติฐานไม่ดีการทดสอบสมมุติฐานก็จะลำบากตามไปด้วย เปรียบเสมือนการตั้งคำถามที่ไม่ได้ความก็จะทำให้ได้คำตอบที่ไม่ได้ความตามไปด้วย

การตั้งสมมุติฐานนั้นถ้ามีน้อยไปก็อาจจะไม่ครอบคลุมขอบข่ายของปัญหานั้นได้ แต่ถ้ามีมากไป การทดสอบสมมุติฐานก็จะยากในการทดสอบว่า สมมุติฐานใดควรจะเป็นจริงเพียงอย่างเดียว

ประการที่สี่ การทดสอบว่า สมมุติฐานใดจะเป็นไปได้ หรือไม่นั้น จำเป็นต้องอาศัยข้อมูล และข้อเท็จจริงในเหตุการณ์นั้นประกอบ ถ้าข้อมูลหรือข้อเท็จจริงบางอัน ถูกมองข้ามไป ก็ทำให้การทดสอบสมมุติฐานมีโอกาส คลาดเคลื่อนตามมาด้วย

ประการสุดท้าย เมื่อได้ว่าสมมุติฐานใดน่าจะเป็นไปได้ ก็มีปัญหาต่อไปว่า จะหาทางพิสูจน์ หรือยืนยันว่าสมมุติฐานนั้น มีทางเป็นจริงได้อย่างไร บางครั้งการพิสูจน์ก็ลำบาก บางครั้งก็ง่าย เพราะความจริงจะไม่ประกาศตัวมันเองว่า เป็นความจริง นอกจากจะหาทางพิสูจน์ว่าเป็นจริงดังนั้นจะเห็นได้ว่า งานหลักของวิธีการวิทยาศาสตร์ คือ การสังเกตุ ทดลอง รวบรวมข้อมูล แล้วก็ตั้งสมมุติฐาน แล้วทำการพิสูจน์ หรือทดสอบสมมุติฐาน แล้วสรุปผล

ด้วยเหตุที่วิธีวิทยาศาสตร์ มีความเชื่อว่าความรู้เกิดจากการสังเกตุ ทดลอง หรือเกิดจากประสบการณ์ จึงทำให้ได้ว่าความรู้เป็นของไม่แน่นอน เป็นเพียงแต่พอเป็นไปได้ หรือน่าจะเป็นเท่านั้น

2.8 <u>การทดสอบสมมุติฐานเป็นการพิสูจน์หรือไม่</u>

การทดสอบสมมุติฐาน เป็นวิธีการทางวิทยาศาสตร์ เพื่อที่จะได้มา ซึ่งคำตอบของปัญหาที่มีขึ้น ในการตั้งสมมุติฐาน เพื่อที่จะค้นหาคำตอบของปัญหานั้น โดยต้องทำการศึกษาหาเหตุของปัญหาเพื่อขจัดข้อสงสัย โอกาสที่จะทำได้แม่นยำ หรือครอบคลุมทุกสาเหตุนั้น กระทำได้ยาก ส่วนใหญ่มักจะได้เพียงแต่ความน่าจะเป็นสาเหตุแล้วจึงทำการทดสอบสมมุติฐานของความเป็นเหตุ จึงได้ความน่าจะเป็นของเหตุแห่งปัญหา และยังต้องทำการพิสูจน์ความเป็นสาเหตุนั้น อีกว่าจริง จึงจะได้คำตอบของปัญหานั้นว่า น่าจะเป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ดังนั้นจึงพอสรุปได้ว่า การทดสอบสมมุติฐานนั้น ไม่เป็นการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เพราะสามารถตอบปัญหาได้เพียงความน่าจะเป็นส่วนใหญ่ ในความคิดเห็นของผู้เขียน มีความเห็นว่า การพิสูจน์ต้องพิสูจน์ได้ออกมาในลักษณะที่ตัดสินได้ว่าจริง หรือเท็จโดยสิ้นเชิง ไม่มีกรณีที่สาม หรือน่าจะเป็นอย่างอื่นอีก

แต่อย่างไรก็ตาม ในการพิสูจน์ความเป็นสาเหตุของสมมุติฐาน ต้องอาศัยวิธีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือ ดังได้กล่าวถึงในกระบวนการของวิธีการทางวิทยาศาสตร์มาแล้ว

การสืบสวนสอบสวนเป็นการพิสูจน์หรือไม่

การสืบสวนสอบสวนนั้น เป็นเพียงกระบวนการหาเหตุผล เพื่อมาสนับสนุนสมมุติฐานของเหตุหรือ นำไปสู่ข้อสรุปเป็นสมมุติฐานของเหตุอื่นใหม่ ว่าน่าจะเป็นเหตุ หรือไม่ เมื่อได้ข้อมูลแล้ว จึงนำมาสรุปเป็นสมมุติฐาน ขั้นต่อไปก็ต้องทำการพิสูจน์สมมุติฐาน เพื่อตัดสินว่าเป็นจริงหรือไม่ ดังนั้นการสืบสวนสอบสวน จึงไม่เป็นการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และเพื่อให้ชัดเจนยิ่งขึ้น จึงยกตัวอย่างประกอบดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 การหาฆาตกรในการฆาตกรรม

เหตุเหล่านี้ได้จากการสืบสวนสอบสวน

1. นายมนู แย่งลูกค้าของนายจรุง ทำให้การค้าของนายจรุง ตกต่ำไปมาก
2. นายจรุงเคยขู่ว่า จะฆ่านายมนูสักวันหนึ่ง
3. นางสาวสายใจ เห็นนายมนูไปถึงอพาร์ตเม้นต์ ที่นายจรุงอยู่เวลา 23.40น.
4. ในห้องของนายจรุง มีขวดเหล้าว่างเปล่าอยู่หลายขวด
5. คนเฝ้าลิฟท์ให้การว่ามักจะเห็น ภรรยานายมนูเดินไปจากตึกพร้อมๆกับนายไสว
6. ตำรวจพบศพของนายมนูในสวนลุมพินี
7. เมื่อตำรวจพบศพของนายมนู เขามีบาดแผลเหวอะหวะที่ข้างหลัง และกระสุนฝังใน 1 นัดที่ข้อศอกขวา
8. จากผลการพิสูจน์ศพ นายแพทย์ลงความเห็นว่า นายมนูตายก่อนตำรวจจะพบศพประมาณครึ่งชั่วโมง
9. ภรรยานายมนูหายไปหลังจากการฆาตกรรม
10. ที่นสนามหญ้าข้างบ้าน นางสาวสายใจ มีรอยถูกเหยียบย่ำ และถูกลาก
11. คนเฝ้าลิฟท์บอกว่า เขาเห็นนางสาวสายใจ อยู่ที่ห้องโถงของตึกอพาร์ตเม้นต์ตอนที่เขาออกจากเวร

12. กระสุนปืนที่ได้จากศพของนายมนู เป็นกระสุนชนิดเดียวกับที่ นายจรุงได้ใช้ยิงคนร้าย

13. มีดที่เปื้อนเลือดของนายมนูนั้น มีรอยนิ้วมือของนายไสว ที่ด้ามมีด

14. คนเฝ้าลิฟท์เห็น นายมนูเดินโซเซมีเลือดไหลที่ข้อศอกขวาเล็กน้อย

15. ตำรวจพยายามตามตัวนายจรุง แต่ปรากฏว่านายจรุง หายตัวไปแล้ว

16. ตำรวจพบมีดเปื้อนเลือดของ นายมนู ในสนามหญ้าหน้าบ้านนางสาวสายใจ

17. นางสาวสายใจ มักจะเดินอยู่กับนายมนูอยู่บ่อยๆ

18. คนเฝ้าลิฟท์เห็น นายมนู เดินไปที่ห้องของนายไสว เวลาประมาณเที่ยงคืน

19. ตำรวจพบศพ นายมนู เวลา 24.30 น.

20. ปืนของนายจรุง ถูกใช้ยิงไปเพียงหนึ่งนัด

21. ศพของ นายมนู มีกลิ่นเหล้าบางๆ ติดปาก

22. ตำรวจไม่สามารถหา นายไสว ได้หลังจากการฆาตกรรม

23. สภาพศพของนายมนู มีรอยถลอกปอกเปิก คล้ายกับว่าถูกลากมาไกล

24. นายจรุง ยิงผู้บุกรุกเข้ามาในห้องของเขา เมื่อเวลาเที่ยงคืน

25. ตำรวจพบคราบเลือดของ นายมนู บนพรมที่ปูตรงทางเดินข้างห้องของนายจรุง

จากเหตุที่ได้จากการสืบสวนสอบสวนทั้งหมด ที่กล่าวมาดังข้างต้น นำไปสรุปเพื่อตอบคำถามต่อไปนี้

1. ใครคือ ฆาตกร
2. ฆาตกรใช้อาวุธอะไร
3. การฆาตกรรมเกิดขึ้นที่ไหน
4. การฆาตกรรมเกิดขึ้นเวลาอะไร
5. เหตุของการเกิดฆาตกรรม

โดยกระบวนการของเหตุผล ก็อาจได้คำตอบดังนี้

1. ฆาตกรรมคือ นายไสว
2. ฆาตกรใช้มีดเป็นอาวุธ ในการฆาตกรรม

3. เกิดขึ้นในห้องของ นายไสว
4. เกิดขึ้นเวลาประมาณ 24.00 น.
5. เหตุเพราะเรื่องชู้สาว

แต่คำตอบที่ได้ ก็เป็นเพียงสมมุติฐาน หรือข้อกล่าวหา ซึ่งจะต้องมีการพิสูจน์การกระทำความผิด แล้วจึงจะนำไปสู่การตัดสินคดี และในการได้ข้อสรุปคำตอบดังกล่าวก็โดยการใช้เหตุผลเชิงอุปนัย

การตัดสินคดี เป็นการพิสูจน์หรือไม่

ในเรื่องราวของคณิตศาสตร์แล้ว การตัดสินคดีไม่ใช่การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ แต่เป็นกระบวนการของการอ้างเหตุผล ที่สมเหตุสมผลในแต่ละครั้ง การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีความเป็นอันเดียวในเรื่องนั้นๆ คือ ถ้าพิสูจน์ได้ว่าจริงในระบบนั้น ก็จะจริงตลอดไม่เปลี่ยนแปลง พิจารณาในระบบของกระบวนการยุติธรรม จะพบบ่อยๆ ว่า การตัดสินคดีเรื่องเดียวกันและเหตุแห่งการกระทำความผิดเหมือนกันทุกประการ คดีหนึ่งศาลตัดสินให้จำเลยมีความผิดตามข้อกล่าวหา เพราะมีหลักฐานมัดตัวอย่างแน่นแฟ้น และอีกคดีจำเลยถูกตัดสินว่า จำเลยไม่มีความผิดตามข้อกล่าวหา เพราะหลักฐานไม่เพียงพอ แต่โดยความเป็นจริงนั้น จำเลยได้กระทำผิดจริง ซึ่งเป็นเสมือนข้อขัดแย้งในระบบของกระบวนการยุติธรรม ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2 การตัดสินคดีในคดีผลิตอาวุธปืนโดยไม่ได้รับอนุญาต

นายเดชา และชาวบ้านหมู่บ้านเดียวกัน ร่วมกันผลิตอาวุธปืนออกจำหน่าย โดยไม่ได้รับอนุญาต แต่การผลิตไปกระทำในป่า และตำรวจก็ทราบดีว่า ชาวบ้านในหมู่บ้านดังกล่าวนี้ กระทำสิ่งที่ผิดกฎหมาย ทุกครั้งที่ตำรวจนำกำลังไปทำการจับกุม ผู้กระทำความผิดจะหนีหมดเพราะมียามคอยดูต้นทางให้ ในที่สุดตำรวจจับกุมตัวนายเดชาได้ หลังจากวิ่งออกจากป่า แต่นายเดชาปฏิเสธการกระทำความผิดครั้งนี้

หนายจำเลย ถามฝ่ายโจทก์ว่า ทำไมถึงเชื่อว่านายเดชากระทำความผิดฐานผลิตอาวุธปืนโดยไม่ได้รับอนุญาต

ตำรวจ ได้เห็นนายเดชาวิ่งออกมาจากแหล่งผลิต(ป่า)

หนายจำเลย มีหลักฐานอะไรที่ชี้บอกว่า นายเดชา เพิ่งวิ่งออกมาจากป่า

ตำรวจ นายเดชา ไม่ได้ใส่รองเท้า เพราะปกติคนเดินป่าต้องสวมรองเท้า

หนายจำเลย ชาวบ้านที่เดินป่าไม่สวมรองเท้ามีไหม

ตำรวจ มี

หนายจำเลย นายเดชา วิ่งออกมาได้ถืออะไรติดมือมาด้วยหรือไม่

ตำรวจ ไม่มี

หนายจำเลย ปกติคนทำ อาวุธปืน ต้องใช้ตะไบขัด และผู้กระทำจะต้องมีผงเหล็กติดมือ ขณะที่ตำรวจจับกุมนายเดชา มือนายเดชา มีผงเหล็กติดมือหรือไม่

ตำรวจ ไม่มี

ศาลพิพากษาให้จำเลยพ้นจากความผิด ฐานผลิตอาวุธปืนโดยไม่ได้รับอนุญาต ซึ่งจริงๆ แล้ว นายเดชา กระทำความผิดจริง