บทที่ 3

ปรัชญาทางคณิตศาสตร์และตรรกศาสตร์ของกลุ่มต่างๆ

ดังได้กล่าวมาในบทที่สองแล้วว่า การพิสูจน์ระบบใดระบบหนึ่ง ต้องอาศัยสัจพจน์ นิยาม หรือทฤษฎีซึ่งพิสูจน์มาก่อนแล้ว นำไปอนุมานเพื่อให้ได้ผลสรุปว่าเป็นจริง ซึ่งสัจพจน์ คือ ความเชื่อขั้นพื้นฐานในระบบนั้นๆ ซึ่งยอมรับว่าเป็นจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์

ด้วยเหตุที่นักคณิตศาสตร์ใช้วิธีการ ซึ่งแตกต่างกันในการศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับความสัมพันธ์ในระบบนั้นๆ จึงทำให้นักคณิตศาสตร์มีแนวคิด ความเชื่อพื้นฐานและทัศนะเชิงตรรกศาสตร์ที่แตกต่างกัน ดังจะได้กล่าวต่อไปพอสังเขปดังนี้

3.1 ปรัชญาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มตรรกนิยม (Logisticism)

นักคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นผู้นำของกลุ่มนี้ คือ รัสเซลล์ (Russell , 1972-1970) และเฟรเก (Frege, 1848-1925)

กลุ่มตรรกนิยม มีความเชื่อว่า คณิตศาสตร์ทุกสาขาเป็นผลโดยตรงมาจากตรรกศาสตร์ และสามารถนำตรรกศาสตร์มาอธิบายได้ โดยที่คณิตศาสตร์ในสาขาดังกล่าว ไม่จำเป็นต้องมีสัจพจน์และอนิยามเป็นจุดเริ่มต้นในตัวของมันเอง แต่คณิตศาสตร์สามารถอธิบายได้โดยอาศัยระบบสัจพจน์ของตรรกศาสตร์มากำหนดนิยาม และทฤษฎีในระบบคณิตศาสตร์สาขาต่างๆ ได้เสมอ

<u>กลุ่มตรรกนิยมประสบความสำเร็จหรือไม่</u>

กลุ่มตรรกนิยมต้องเผชิญหน้ากับปัญหา ในการที่จะแสดงว่าคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของตรรกศาสตร์ มีอยู่สามข้อใหญ่ๆ ดังนี้คือ

1. ทุกๆ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ ต้องสามารถอธิบายได้ในรูปของแนวคิดทางตรรกศาสตร์ (Every mathematical concept must be demonstrated to be a logical concept)

2. วิธีทั้งหมดของการพิสูจน์ที่ใช้ในคณิตศาสตร์ ต้องสามารถแสดงให้เป็นวิธีทางตรรกศาสตร์บริสุทธิ์ (All method of proof used in mathematics must be shown to be such as are purely logical methods

3. ทุกๆ ประพจน์ทางคณิตศาสตร์ ต้องสามารถทราบได้โดยเหตุผล จากความเชื่อขั้นพื้นฐาน ของตรรกศาสตร์บริสุทธิ์เพียงอย่างเดียว (Every mathematical proposition must be deducible from fundamental assumptions of pure logic alone)

เพื่อบรรลุวัตถุประสงค์ของกลุ่มตรรกนิยม รัสเซลล์ ซึ่งถือว่าเป็นนักคณิตศาสตร์มีบทบาทมากที่สุดในกลุ่มได้ร่วมกับไวต์เฮด (Whitehead) เขียนตำรา Principia Mathematica โดยเขียนในลักษณะที่เป็นสัญลักษณ์นิยม (Symbolism) เขาสามารถสร้างจำนวนธรรมชาติ โดยอาศัยระบบสัจจพจน์ของตรรกศาสตร์ โดยเริ่มจาก ทฤษฎีของการนิรนัย (Theory of deduction) ในบทนี้เขาแนะนำให้รู้จัก ความคิดปฐมฐาน (Primitive ideas) และประพจน์ปฐมฐาน (primitive proposition) ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับ อนิยามและสัจพจน์ ในระบบสัจพจน์ของจำนวนธรรมชาติ ของเปอาโน (Peano) และใช้ตรรกศาสตร์เชิงนิรนัยพิสูจน์ กฎ และทฤษฎีต่างๆ ได้มากมายในทางตรรกศาสตร์ จากนั้นก็พัฒนาไปสู่ ทฤษฎีของคลาส (Theory of class) ทฤษฎีของความสัมพันธ์ (Theory of Relation) จนในที่สุดก็สามารถสร้างจำนวนธรรมชาติขึ้นได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ที่เป็นความสัมพันธ์สมมูลย์ (equivalent relation) ซึ่งรายละเอียด สามารถศึกษาได้จากหนังสือ

Whitehead, A.N., and Russell; Principia Mathematica, Cambridge, England, The university Press, 1982

จากหลักการ และวิธีการดังกล่าวในทางตรรกศาสตร์ของหนังสือ Principia Mathematica ทำให้นักคณิตศาสตร์ทั่วไป ยอมรับว่ากลุ่มตรรกนิยมสามารถแก้ปัญหาข้อที่หนึ่งและข้อที่สองได้สำเร็จ แต่ไม่สามารถแก้ปัญหาข้อที่สามได้ ทั้งนี้เพราะเหตุใด

พิจารณาสัจพจน์สองข้อของ แซร์เมโล (Zermelo) ในทฤษฎีเซตคือ สัจพจน์ของความเป็นอนันต์ (Axiom of Infinity) และ สัจพจน์ของการเลือก (Axiom of choice)

<u>สัจพจน์ของความเป็นอนันต์ (Axiom of Infinity)</u>

มีเซต Z ซึ่งมีคุณสมบัติดังนี้

1. $\emptyset \in Z$
2. ถ้า $x \in Z$ แล้ว $\{x\} \in Z$

จากสัจพจน์ดังกล่าว สามารถสร้างเซตเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ เป็นขั้นๆ ซึ่งแต่ละขั้นเป็นขบวนการที่จำกัดดังนี้

1. ได้ $\{\emptyset\} \in Z$
2. ได้ $\{\{\emptyset\}\} \in Z$
3. ได้ $\{\{\{\emptyset\}\}\} \in Z$

$\vdots$

จึงทำให้ได้เซต Z_o เป็นเซตที่เล็กที่สุดของ Z ตามสัจพจน์นี้โดย

$$Z_o = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots \}$$

ซึ่งกระบวนการดังกล่าวก็เหมือนกับ เป็นการยอมรับจำนวนธรรมชาติอยู่แล้ว ดังนั้นกลุ่มสหัชญาณนิยม จึงเชื่อว่าไม่มีทางที่จะหลีกเลี่ยงความเคยชิน ของจำนวนธรรมชาติได้

สัจพจน์ของความเป็นอนันต์ (Axiom of Infinity) เป็นประพจน์อันหนึ่งในทางคณิตศาสตร์ ที่มีความสำคัญและถูกนำมาใช้มาก ทำให้มีคำถามว่า "ทำไมนักคณิตศาสตร์จึงยอมรับสัจพจน์นี้เป็นจริง" เหตุผลก็คือ ทุกคนมีความคุ้นเคยกับเซตอนันต์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเซตของจำนวนธรรมชาติ จะเห็นว่าการยอมรับสัจพจน์นี้ ใช้เหตุผลเชิงอุปนัย ซึ่งรัสเซลล์ก็ไม่สามารถที่จะใช้ตรรกศาสตร์เชิงนิรนัย อธิบายสัจพจน์นี้ได้ และในทำนองเดียวกัน รัสเซลล์ ก็ไม่สามารถใช้ตรรกศาสตร์เชิงนิรนัยอธิบาย สัจพจน์ของการเลือก (Axiom of choice) ได้เช่นกัน

ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้น นักคณิตศาสตร์ทั่วไปก็มองว่า กลุ่มตรรกนิยม ยังไม่สามารถแก้ปัญหาข้อที่สามได้ ก็คงเป็นการยุติธรรม ที่จะพูดว่ากลุ่มนี้ไม่ประสบความสำเร็จตามจุดประสงค์ที่ตั้งไว้อย่างสมบูรณ์

จะเห็นได้ชัดว่า กลุ่มตรรกนิยมพยายามที่จะอธิบายคณิตศาสตร์ทั้งหมด โดยอาศัยตรรกศาสตร์ โดยพยายามสืบสาวความไม่รู้ ซึ่งเป็นรากฐานเบื้องต้นให้มากที่สุดที่จะมากได้ แทนที่จะหยุดตรงที่อนิยามของเรื่องนั้นๆกลุ่มนี้ยังใช้ตรรกศาสตร์มาอธิบายอนิยามได้อีก แต่ในที่สุดก็ไม่สามารถอธิบายได้ทั้งหมดดังกล่าวมาแล้ว และก็ไม่ได้หมายความว่าตรรกศาสตร์ของกลุ่มตรรกนิยมมิได้เริ่มด้วย อนิยามและสัจพจน์ นั่นคือไม่ว่าจะสืบสาวรากฐานลึกไปเท่าใด ในที่สุดก็ต้องเจ อนิยามและสัจพจน์ ซึ่งยอมรับโดยไม่ต้องรู้ความหมาย และยอมรับว่าเป็นจริง โดยไม่ต้องพิสูจน์ ซึ่งอาจกล่าวได้ว่ากลุ่มตรรกนิยม พยายามแสดงว่ากลุ่มตนเองรู้มากโดยชลอการยอมรับความไม่รู้ให้ช้าลงกว่ากลุ่มอื่น

3.2 ตรรกศาสตร์ของกลุ่มรัสเซลล์และเฟรเก

ประกอบด้วยสิ่งต่อไปนี้

ความคิดปฐมฐาน (Primitive Ideas)

1. ประพจน์เบื้องต้น (Elementary proposition) หมายถึงประพจน์ซึ่งไม่มีตัวแปรใดๆ มาเกี่ยวข้องหรือประพจน์ที่ไม่มีลวีบ่งปริมาณ มาเกี่ยวข้อง ใช้สัญลักษณ์ p, q, r, s, ... แทนประพจน์เบื้องต้น

   การเชื่อมด้วยตัวเชื่อม หรือปฏิเสธประพจน์เบื้องต้น ก็ยังคงเป็นประพจน์เบื้องต้น

2. ประโยคที่มีตัวแปร (Elementary proposition functions)

   หมายถึงข้อความซึ่งมีตัวแปร หรือประกอบด้วยส่วนที่ยังตัดสินไม่ได้รวมอยู่ด้วย เขียนแทนด้วย ϕx หรือ ϕp

3. <u>การยอมรับว่าเป็นจริง</u> (Assertion) หมายถึงการยอมรับประพจน์หรือข้อความที่เป็นจริง แทนด้วยสัญลักษณ์ " $\vdash$. " เช่น

$\vdash$. p v q หมายความว่า เป็นจริงที่ว่า p เป็นจริง หรือ q เป็นจริง

สิ่งที่เห็นจริงทั้งหมด (axioms) เป็นประพจน์ที่ยอมรับว่าเป็นจริง (assertion) ดังนั้นสิ่งที่เห็นจริง จะนำโดยเครื่องหมาย $\vdash$.

4. <u>นิเสธ</u> (Negation) นิเสธของประพจน์ ใช้สัญลักษณ์ " ~ " เช่น ถ้า p เป็นประพจน์ นิเสธของประพจน์ p เขียนแทนด้วย " ~ p" อ่านว่านอตพี (not - p) หรือ p เป็นเท็จ (p is false)

5. <u>ตัวเชื่อมการเลือก</u> (Disjunction) ใช้สัญลักษณ์ " v " ถ้า p และ q เป็นประพจน์สองประพจน์

ประพจน์ " p หรือ q " (p or q) เขียนแทนด้วย " p v q " ซึ่งเรียกว่าตัวเชื่อมการเลือก (disjunction) หรือ ผลบวกเชิงตรรกศาสตร์ (logical sum) ของ p และ q ผลที่ตามมาจึงได้ว่า

" ~ p v q " หมายถึง p เป็นเท็จ หรือ q เป็นจริง (p is or q is true)

" ~ (p v q) " หมายถึง ไม่เป็นความจริงที่ว่า p เป็นจริง หรือ q เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่ง (it is false that either p or q is true) ซึ่งมีความหมายเดียวกับ p และ q เป็นเท็จทั้งคู่ (p and q are both false)

" (~ p v ~ q) " หมายถึง ไม่เป็นความจริงที่ว่า p เป็นเท็จ หรือ q เป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง (it is false that either p is false or q is false) ซึ่งมีความหมายเดียวกับ p และ q เป็นจริง (p and q are both true)

นิยาม (Definition) ใช้ตัวย่อว่า Df.

Df. 1 การแจงเหตุสู่ผล (Implication) ใช้สัญลักษณ์ " $\supset$ "

$$p \supset q. \; = \; . \sim p \vee q$$

อ่านว่า ถ้า p แล้ว q (p implies q) หมายความว่า p เป็นเท็จ หรือ q เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่ง (Either p is false or q is ture)

Df. 2 ผลคูณเชิงตรรกศาสตร์ (Logical product)

แทนด้วยสัญลักษณ์ " . "

$$p \, . \, q. \; = \; . \sim (\sim p \vee \sim q)$$

Df. 3 $\quad p \equiv q. \; = \; . \, p \supset q \, . \, q \supset p$

ประพจน์ปฐมฐาน (Primitive propositions)

คือ สิ่งที่เห็นจริง (axioms) ต่อไปจะใช้ตัวย่อ P_p

P_p1 หลักการทอโทโลยี (Principle of Tautology)

$$\vdash : \; p \vee p \, . \supset . \, p$$

หมายความว่า ถ้า p เป็นจริงหรือ p เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่งแล้ว p เป็นจริง (If either p is true or p is true, then p is true)

P_p2 หลักการรวม (Principle of Addition)

$$\vdash : \; q \, . \supset . \, p \vee q$$

หมายความว่า ถ้า q เป็นจริง แล้ว p หรือ q เป็นจริง (If q is true, then 'p os q' is true)

$P_{p\ 3}$ หลักการเรียงสับเปลี่ยน (Principle of Permutation)

$\vdash : p \vee q . \quad . q \vee p$

หมายความว่า ถ้า p หรือ q เป็นจริง แล้ว q หรือ p เป็นจริง ('p or q' impties 'q or p')

$P_{p\ 4}$ หลักการเปลี่ยนกลุ่ม (Principle of Associative)

$\vdash : p \vee (q \vee r) . \supset . q \vee (p \vee r)$

หมายความว่า ถ้า p เป็นจริง หรือ q หรือ r เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่ง แล้ว q เป็นจริงหรือไม่ก็ p หรือ r เป็นจริง (If either p is true, or 'q or r' is true, then either q is true, or 'p or r' is ture)

$P_{p\ 5}$ หลักการรวมยอด (Principle of Summation)

$\vdash : . q \supset r . : p \vee q . \supset . p \vee r$

หมายความว่า ถ้า q แล้ว r เป็นจริง แล้ว ถ้า 'p หรือ q' แล้ว 'p หรือ r' เป็นจริง (If q implies r, then 'p or q' implies 'p or r')

กฎสำหรับการคำนวณ (Rule for calculation)

R. 1 กฎการแทนค่า (Rule of Substitution)

สามารถแทนสูตร A ใดๆ ที่มีเกิดขึ้นในประพจน์ p ใน สูตรที่ให้ไว้แล้ว เช่น แทน p ด้วย p v q ใน P_{p1}

จะได้ $(p \vee q) \vee (p \vee q) . \supset . (p \vee q)$

R. 2 กฎการแจงผลตามเหตุ (Modus ponens)

ถ้า A และ B เป็นสูตร (formula) และถ้ามี " $\vdash . A$" และ " $\vdash . A \supset B$ " แล้วอนุมานได้ " $\vdash . B$ "

จากตรรกศาสตร์ แบบรัสเซลล์ และเฟรเกข้างต้น สามารถพิสูจน์กฎการขัดแย้งและกฎการยกเว้นตัวกลางได้ และเพื่อสะดวกในการทำความเข้าใจ ในการพิสูจน์ ต่อไปจะใช้สัญลักษณ์ที่นิยมใช้ในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ ปัจจุบันแทนตรรกศาสตร์ของรัสเซลล์ และเฟรเก ดังนี้

" ถ้า .... แล้ว .... " ใช้ " ---> " แทน " $\supset$ "

"และ" ใช้ " $\wedge$ " แทน " . "

"ก็ต่อเมื่อ" " <---> " แทน " $\equiv$ "

จึงเขียนนิยามและสัจพจน์ และกฎใหม่ได้ดังนี้

Df. 1 $p \dashrightarrow q \;=\; \sim p \vee q$

Df. 2 $p \wedge q \;=\; \sim(\sim p \vee \sim q)$

Df. 3 $P \longleftrightarrow q \;=\; (p \dashrightarrow q) \wedge (q \dashrightarrow p)$

$P_{p.1}$ $(p \vee p) \dashrightarrow p$

$P_{p.2}$ $q \dashrightarrow (p \vee q)$

$P_{p.3}$ $(p \vee q) \dashrightarrow (q \vee p)$

$P_{p.4}$ $p \vee (q \vee r) \dashrightarrow q \vee (p \vee r)$

$P_{p.5}$ $(q \dashrightarrow r) \dashrightarrow [(p \vee q) \dashrightarrow (p \vee r)]$

R1. กฎการแทนค่า คือ สามารถแทนประพจน์ใดๆ ในประพจน์ของ P_p

R2. กฎการแจงผลตามเหตุ $[(p \dashrightarrow q) \wedge p] \dashrightarrow q$

<u>ทฤษฎีที่</u> 1 (q--->r)---> [(p--->q)--->(p--->r)]

<u>พิสูจน์</u>

1. (q--->r)---> [(p v q)--->(p v r)] จาก P_p.5.
2. (q--->r)---> (∼ p v q)--->(∼ p v r) จาก R.1 แทน p ด้วย ∼p
3. (q--->r)---> [(p--->q)--->(p--->r)] จาก Df.1.

<u>ทฤษฎีที่</u> 2 p ---> p v p

<u>พิสูจน์</u>

1. q--->(p v q) จาก P_p.2
2. p--->(p v p) จาก R_1 แทน q ด้วย p

<u>ทฤษฎีที่</u> 3 p ---> p (กฎเอกลักษณ์)

<u>พิสูจน์</u>

1. (q--->r)---> [(p--->q)--->(p--->r)] จากทฤษฎีที่ 1
2. [(p v p)--->p] ---> [{p--->(p v p)} --->(p--->p)] แทน q ด้วย p v p แทน r ด้วย p
3. (p v p) ---> p P_p. 1
4. {p --->(p v p)} --->(p--->p) จากข้อ 2,3 และ R_2
5. p ---> (p v p) จากทฤษฎีที่ 2
6. p ---> p จากข้อ 4,5 และ R_2

<u>ทฤษฎีที่</u> 4 ∼ p v p

<u>พิสูจน์</u>

1. p ---> p จากทฤษฎีที่ 3
2. ∼ p v p Df. 1

<u>ทฤษฎีที่</u> 5 $p \vee \sim p$ (กฎการยกเว้นตัวกลาง)

<u>พิสูจน์</u>

1. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ จาก $P_p.3.$
2. $(\sim p \vee p) \rightarrow (p \vee \sim p)$ จาก R_1 แทน p ด้วย $\sim p$ แทน q ด้วย p
3. $\sim p \vee p$ จากทฤษฎีที่ 4
4. $p \vee \sim p$ จากข้อ 2,3 และ R_2

<u>ทฤษฎีที่</u> 6 $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

<u>พิสูจน์</u>

1. $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ จาก P_p 3.
2. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (\sim q \vee \sim p)$ จาก R_1 แทน p ด้วย $\sim p$ และแทน q ด้วย $\sim p$
3. $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$ จาก Df.1

<u>ทฤษฎีที่</u> 7 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ กฎการแย้งสลับที่

<u>พิสูจน์</u>

1. $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$ จากทฤษฎีที่ 6
2. $p \rightarrow (\sim (\sim q)) \rightarrow (\sim q) \rightarrow \sim p$ จาก R_1 แทน q ด้วย $\sim q$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ นิเสธซ้อนนิเสธ $\sim(\sim q) = q$

<u>ทฤษฎีที่</u> 8 $\sim(p \wedge \sim p)$ กฎการขัดแย้ง

<u>พิสูจน์</u>

1. $p \rightarrow p$ จากทฤษฎีที่ 3
2. $(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$ จาก R_1 แทน p ด้วย $p \wedge q$
3. $(p \wedge q) \rightarrow \sim(\sim p \vee \sim q)$ จาก Df. 2

4. $\left[(p \wedge q) \dashrightarrow \sim(\sim p \vee \sim q) \right] \dashrightarrow \left[(\sim p \vee \sim q) \dashrightarrow \sim(p \wedge q) \right]$

จากทฤษฎีที่ 6 แทน p ด้วย $(p \wedge q)$ แทน q ด้วย $(\sim p \vee \sim q)$

5. $(\sim p \vee \sim q) \dashrightarrow \sim(p \wedge q)$ จากข้อ 3, 4 และ R_2

6. $\left[\sim p \vee \sim(\sim p) \right] \dashrightarrow \sim(p \wedge \sim p)$

จาก R_1 แทน q ด้วย $\sim p$

7. $\sim p \vee \sim(\sim p)$ จากทฤษฎีที่ 5 แทน p ด้วย p

8. $\sim(p \wedge \sim p)$ จากข้อ 6,7 และ R_2

รายละเอียดศึกษาเพิ่มเติมได้จาก Whitehead, A.N. and Russell. B.; Principia Mathematica, Cambridge, England, The University Press 1982.

3.3 ปรัชญาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มแบบแผนนิยม (Formalism)

นักคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นผู้นำของกลุ่มแนวความคิดตาม **แบบแผนนิยม** ได้แก่ **ฮิลแบร์ต** (Hilbert , 1862 - 1943) คันตอร์ (Cantor, 1845 - 1918) เดเดคินด์ (Dedekind, 1813 - 1916) และเปอาโน (Peano 1858 - 1932) แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มนี้ มีความเห็นเบื้องต้นว่า คณิตศาสตร์แต่ละเรื่องจำเป็นต้องพัฒนาตามระบบสัจพจน์ (ซึ่งไม่มีข้อขัดแย้ง หมายความว่าเป็นระบบสัจพจน์ ซึ่งเป็นเซตของสัจพจน์ที่ไม่มีสัจพจน์ใดขัดแย้งกัน) และระบบสัจพจน์ดังกล่าว จะต้องเริ่มด้วยคำอนิยาม โดยที่คำอนิยามเหล่านั้นไม่จำเป็นต้องมีความหมาย เป็นรูปธรรมก็ได้ แล้วจึงอาศัยสัจพจน์เป็นตัวกำหนดคุณสมบัติของอนิยาม และหลังจากนั้นจึงอาศัยกฎเกณฑ์ทางตรรกศาสตร์เพื่อเป็นเครื่องมือพิสูจน์ทฤษฎีในระบบนั้น ดังเช่นระบบสัจพจน์ของเปอาโน เพื่อพัฒนาระบบ

จำนวนธรรมชาติ ซึ่งเริ่มต้นด้วยอนิยาม ซึ่งได้แก่"จำนวนธรรมชาติ" "หนึ่ง" และ "ตัวตาม" เป็นต้น โดยไม่ต้องรู้ความหมายว่าเป็นอะไร

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า แนวความคิดทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มนี้ ไม่เกี่ยวข้องกับรูปธรรม (Concrete) แต่เกี่ยวข้องกับกลุ่มสัญลักษณ์ต่างๆ ที่แทนความคิด กล่าวคือ กลุ่มแบบแผนนิยมศึกษาคณิตศาสตร์ เริ่มด้วยนามธรรม แล้วจึงอาศัยตรรกศาสตร์ เป็นเครื่องมือแสดงเหตุผลเพื่อสร้างทฤษฎีโดยหวังว่าทฤษฎี จะเป็นตัวนำเพื่อให้เกิดความสำนึกในรูปธรรมของเรื่องนั้นๆ แต่มิได้เน้นตรรกศาสตร์ เป็นจุดเริ่มต้นเหมือนกลุ่มตรรกนิยม

กลุ่มแบบแผนนิยมเป็นกลุ่มที่มีชื่อเสียง และเป็นที่ยอมรับมากในปัจจุบัน และวงการคณิตศาสตร์ โดยทั่วไปได้ยึดแนวความคิดของกลุ่มนี้ ในการวางพื้นฐานคณิตศาสตร์แต่ละสาขาในปัจจุบัน ผลงานเด่นๆ ของกลุ่มนี้ คือ เรื่องของการจัดระบบสัจพจน์ต่างๆ นั่นเอง ตัวอย่างคณิตศาสตร์ที่พัฒนาโดยกลุ่มนี้คือ เรขาคณิตของยูคลิดตามแนวสัจพจน์ของ ฮิลแบร์ต และก็ด้วยผลงานของกลุ่มนี้นี่เอง ที่ทำให้ตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ และสาขาอื่นๆ เช่น Model Theory, Recursive function Theory) มีชื่อเสียงในวิชาคณิตศาสตร์

เป็นที่น่าสังเกตว่า กลุ่มตรรกนิยม และกลุ่มแบบแผนนิยม ต่างก็พยายามจัดคณิตศาสตร์สาขาต่างๆ ให้เป็นระบบ แต่ทั้งสองกลุ่มก็มีเหตุผลแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิงกล่าวคือ กลุ่มตรรกนิยม ต้องการจัดระบบเพื่อให้ระบบที่เขาจัดนั้นเป็นตรรกศาสตร์ แต่กลุ่มแบบแผนนิยม ต้องการจัดระบบเพื่อสะดวกต่อการพิสูจน์ และไม่ให้เกิดข้อขัดแย้งได้

3.4 <u>ตรรกศาสตร์ของกลุ่มฮิลแบร์ต เดเดคินด์ คันเตอร์ และเปอาโน</u>

ประกอบด้วยสิ่งต่อไปนี้

1. สูตรเชิงอะตอม (Atomic Formulas) หมายถึงประพจน์ใดๆ หรือสูตรซึ่งเป็นประพจน์เชิงเดี่ยว แทนด้วยสัญลักษณ์ A, B, C, ...

2. ตัวคงที่ทางตรรกศาสตร์ (Logical constants) ที่ใช้คือ

- แทนนิเสธ (Negation) เช่น $\bar{U}$ แทนนิเสธของ U

---> แทน "ถ้า ... แล้ว ... " (Implication)

การสร้างสูตรรวม หรือประพจน์เชิงประกอบ (Compound formulas) จากประพจน์เชิงเดี่ยว อาศัยกฎดังนี้

กฎการสร้างรูปแบบ (Formation Rules)

F.1 แต่ละสูตรเชิงอะตอม หรือประพจน์เป็นสูตร (Each of the atomic formulas A, B, C, ..., is a formula)

F.2 ถ้า U เป็นสูตรแล้ว $\bar{U}$ เป็นสูตรด้วย (If U is a formula, then $\bar{U}$ is also a formula)

F.3 ถ้า U และ V เป็นสูตรแล้ว U ---> V เป็นสูตรด้วย (If both U and V are formulas, then U ---> V is also a formula)

3. สิ่งที่เห็นจริง (Axioms) หรือสัจพจน์

3.1 สัจพจน์ของการนิรนัย (Aioms of deduction)

P.1. A ---> (B ---> A)

P.2. {A ---> (A ---> B)} ---> (A ---> B)

P.3. {A ---> (B ---> C)} ---> {(A---> B) ---> (A --->C)}

P.4. (B ---> C) ---> {(A ---> B) ---> (A ---> C)}

P.5. {A ---> (B ---> C)} ---> {B --->(A--->C)}

3.2 <u>สัจพจน์ของนิเสธ</u> (Aioms of negation)

P.6 $A \longrightarrow (\bar{A} \longrightarrow B)$ กฎการขัดแย้ง

P.7 $(A \longrightarrow B) \longrightarrow \{(\bar{A} \longrightarrow B) \longrightarrow B\}$

หลักการของการยกเว้นตัวกลาง

P.8 $(A \longrightarrow B) \longrightarrow (\bar{B} \longrightarrow \bar{A})$

3.3 <u>สัจพจน์ของการเท่ากัน</u> (Axioms of equality)

P.9 $a = a$

P.10 $a = b \longrightarrow \{A(a) \longrightarrow A(b)\}$

หมายความว่า ถ้า $a = b$ แล้ว ถ้า A เป็นจริงสำหรับ a แล้ว A เป็นจริงสำหรับ b ด้วย

3.4 <u>สัจพจน์ของจำนวน</u> (Aioms of number)

P.11 $a + 1 \neq 0$ (เช่นเดียวกับ $\overline{a + 1} = 0$)

P.12 $\delta(a + 1) = a$, δ เป็นฟังก์ชัน

3.5 <u>สัจพจน์เชิงอนันต์</u> (Transfinite axiom)

P.13 $A(tA) \longrightarrow A(a)$

หมายความว่า (t A) เป็นสิ่งซึ่งมีอยู่จริงโดยที่ ถ้า (t A) มีคุณสมบัติ A แล้วทุกๆ a จะมีคุณสมบัติ A ด้วย

4. <u>กฎของการอนุมาน</u> (Rule of Inference)

ให้ F เป็นประพจน์ใดๆ ของทฤษฎี U และ V เป็นทฤษฎีอันหนึ่ง (Formula)

U/F.V มีความหมายว่า ถ้าแทน F ของ U ใน V

เช่น A เป็นประพจน์ในทฤษฎี A --->A และ A ---> (B ---> A) เป็นทฤษฎีหนึ่ง แทน B ด้วย A จะได้ A---> (A --->A) และเป็นทฤษฎีด้วย

<u>I. 1</u> แต่ละสัจพจน์เป็นทฤษฎี (Each of axioms is a theorem)

<u>I. 2</u> ถ้า V เป็นทฤษฎีแล้ว U/F.V เป็นทฤษฎีด้วย (If V is a theorem, then U/F.V is also a theorem)

<u>I. 3</u> ถ้า U และ U ---> V เป็นทฤษฎีแล้ว V เป็นทฤษฎีด้วย (If U and U --> V are theorems, then V is also theorem)(modus ponens)

<u>ตัวอย่างการพิสูจน์โดยอาศัยตรรกศาสตร์ข้างต้น</u>

<u>ต้องการพิสูจน์ว่า</u> A ---> A เป็นทฤษฎี

<u>วิธีพิสูจน์</u> i) แทน B ใน P.1 ด้วย A --> A

ii) แทน B ใน P.1 ด้วย A

iii) แทน B ใน P.3 ด้วย A --> A แล้วแทน C ด้วย A จะได้ข้อความตามลำดับดังนี้

a_1. A ---> {(A ---> A) ---> A}

a_2. A ---> (A ---> A)

a_3. [A --->{(A --->A) --->A}] ---> [{A --->(A --->A)} --->(A --->A)]

โดย I_2 จะได้ a_1, a_2, a_3 เป็นทฤษฎีต่อไปใช้ I_3 กับ a_1 กับ a_3 จะได้

a_4 {A ---> (A --->A)} ---> (A --->A)

จาก a_2 และ a_4 ใช้ I_3 ก็จะได้

a_5 A ---> A ตามต้องการ

รายละเอียดศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือ

Hilbert, D., and Berncys, D.; Grundlagen der Mathematik, Vol. I(1034),Vol.II(1939),Berlin, Springer.

และเอกสารอ้างอิงเล่มที่ 11 , 13

3.5 ปรัชญาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มสหัชญาณนิยม (Intuitionism)

นักคณิตศาสตร์ที่เป็นผู้นำกลุ่มคือ โครเนกเคร์ (Kronecker 1823 - 1891) บราวเวอร์ (Brouwer1881 - 1966) ปวงกาเร (Poincare 1854 - 1912) และแฮร์มันน์ไวล์ (Hermann Weyl1885 - 1955) แนวคิดของกลุ่มนี้มีความคิดว่า คณิตศาสตร์แต่ละสาขาต้องเริ่มด้วยรูปธรรมของตัวมันเองเสียก่อน แล้วจึงสร้างความสำนึกเบื้องต้นของคณิตศาสตร์เรื่องนั้น โดยอาศัยตัวอย่างที่สามารถสร้างให้เห็นได้ เป็นตัวนำในการแสดงความเป็นไปได้ แล้วนำไปสู่การวางนัยทั่วไป เพื่อพัฒนาไปสู่นามธรรมในภายหลัง

กลุ่มสหัชญาณนิยม มีความคิดเห็นว่า มีสิ่งที่ไม่ถูกต้องไม่เป็นจริงมากมายในคณิตศาสตร์ ซึ่งถือว่าดีแล้ว (Classical Mathematics)ในปี ค.ศ. 1908 มีข้อความแย้งกันแต่จริง (Paradox) เกิดขึ้นมากในทฤษฎีเซตของคัน-ตอร์ ซึ่งข้อความแย้งกันแต่จริง มีความหมายเช่นเดียวกันกับ ข้อความที่ขัดแย้งกัน (Contradiction) ประมาณปี ค.ศ. 1870 คัน-ตอร์ได้สร้างทฤษฎีเซต โดยสร้างขึ้นมาอย่างง่ายๆ (Non - Axiomtically) ผลที่ตามมาทำให้คัน-ตอร์ และรัสเซลล์ และนักคณิตศาสตร์คนอื่นๆ ได้พบข้อขัดแย้ง ซึ่งนักตรรกวิทยามีความเชื่อว่าข้อขัดแย้งดังกล่าวนั้น ถือว่าเป็นข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นได้โดยสามัญทั่วไป ซึ่งเกิดจากนักคณิตศาสตร์เข้าใจผิดเอง ไม่ได้เกิดขึ้นเพราะคณิตศาสตร์มันผิด กลุ่มสหัชญาณนิยมมีความเห็นว่า ข้อความแย้งกัน แต่จริงเหล่านี้ เป็นสิ่งชี้ให้เห็นอย่างชัดเจนว่าคณิตศาสตร์ซึ่งถือว่าดีนั้น ไม่สมบูรณ์ในตัวของมันเอง และกลุ่มนี้มีความเห็นว่าคณิตศาสตร์ควรจะถูกสร้างขึ้นมาจากแนวความคิด ทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มสหัชญาณนิยม

เสียก่อน คือ แนวความคิดเกี่ยวกับจำนวนธรรมชาติ 1,2,3,... เสียก่อน กลุ่มนี้มีความเห็นว่า มนุษย์ชาติทั้งหลายได้มีความคิดเกี่ยวกับจำนวนธรรมชาติ เป็นพื้นฐานมาในตัวของเขาเอง

คณิตศาสตร์ตามแนวความคิดของกลุ่มสหัชญาณนิยม หมายถึงสิ่งที่สร้างได้ กล่าวคือ ทุกสิ่งทุกอย่างที่สร้างขึ้นนั้น สามารถที่จะกระทำซ้ำแล้ว ซ้ำอีก ตัวอย่างเช่น จำนวนจริง ไม่ได้เกิดขึ้นเพราะการพิสูจน์ว่ามันมี แต่จำนวนจริงเกิดเพราะถูกสร้างขึ้นมา ซึ่งก็คือ นิยาม ทฤษฎี และการพิสูจน์แบบสหัชญาณเป็นสิ่งที่สร้างได้ด้วยแนวความคิดดังกล่าว คณิตศาสตร์จะเป็นศาสตร์อย่างอื่นไม่ได้ เช่น กลุ่มตรรกนิยมเชื่อว่า คณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของตรรกศาสตร์ จึงทำให้แนวความของกลุ่มสหัชญาณนิยมกับกลุ่มตรรกนิยม มีความคิดเห็นตรงกันข้ามกันอย่างสิ้นเชิง

3.6 <u>ตรรกศาสตร์ของกลุ่มโครเนกเคอร์ บราวเวอร์ และปวงกาเร</u>

ประกอบด้วยสิ่งที่ต่อไปนี้

<u>ตัวคงที่ทางตรรกศาสตร์</u> (logical constants) ประกอบด้วย $\wedge$, v , $\neg$ และ $\supset$ ซึ่งแทน "และ" "หรือ" "นิเสธ" "ถ้า... แล้ว ..." ตามลำดับ ซึ่งสัญลักษณ์ทั้งสี่ต่างเป็นอิสระต่อกัน (independent of on another) เช่น

$a \supset b$ ไม่มีความหมายเช่นเดียวกับ $\neg a \vee b$

จะเห็นได้ว่า ตรรกศาสตร์ของกลุ่มสหัชญาณนิยม แตกต่างจากกลุ่มตรรกนิยม ใช้ $\sim$ และ v เป็นตัวคงที่ทางตรรกศาสตร์แล้ว นิยาม "$\wedge$" กับ "$\supset$" โดยอาศัย $\sim$ และ v จึงกล่าวได้ว่าสัญลักษณ์ไม่เป็นอิสระต่อกัน และ

$p \supset q$ มีความหมายเช่นเดียวกับ $\sim p \vee q$ และใช้ . แทนวงเล็บ เช่น $a \vee a . \supset . a$ หมายความถึง $(a \vee a) \supset (a)$

<u>สูตรพื้นฐาน หรือสัจพจน์</u> (Fundamental formulas)

มีเช่นเดียวกับกลุ่มตรรกนิยมคือ

1. $\vdash : a \vee a . \supset . a$

2. $\vdash : b . \supset . a \vee b$

3. $\vdash$: $a \vee b . \supset . b \vee a$

4. $\vdash$: $a \vee (b \vee c) . \supset . b \vee (a \vee c)$

5. $\vdash$: $. a \supset b . \wedge . b \supset c : \supset : a \supset c$

ผลที่ตามมาสามารถสร้างกฎต่างๆ ได้ดังนี้

L 1 $\vdash . \neg (a \wedge \neg a)$ (กฎการขัดแย้ง)

L 2 $\vdash . \neg \neg (a \vee \neg a)$

L 3 $\vdash . a \supset \neg \neg a$

L 4 $\vdash . a \supset b . \supset . \neg b \supset \neg a$

L 5 $\vdash . \neg \neg \neg a \supset \neg a$

(ได้จากการแทน b ด้วย $\neg \neg a$ ใน L4 และใช้ : 3.)

L 6 $\vdash . \neg a \supset \neg \neg \neg a$

(ได้จากการแทน a ด้วย $\neg a$ ใน L 3.)

จาก L. 5 และ L 6 จะได้ว่า $\neg a$ สมมูลย์กับ $\neg \neg \neg a$

จึงสรุปได้ว่า นิเสธซ้อนนิเสธ เช่น $\neg \neg \neg \ldots \neg a$

สามารถเขียนลดลงให้อยู่ในรูป $\neg \neg a$ หรือ $\neg a$

<u>ข้อสังเกต</u>

1. $\neg \neg a$ ไม่มีความหมายเช่นเดียวกับ a ซึ่งกลุ่มตรรกนิยม

$\sim (\sim a) = a$

2. กลุ่มสหัชญาณนิยม ไม่มีการยกเว้นตัวกลาง (Law of Excluded Middle) คือ กฎการยกเว้นตัวกลางไม่สามารถพิสูจน์ได้จาก ระบบนี้ แต่สามารถพิสูจน์กฎ $\vdash . \neg \neg (a \vee \neg a)$

3. $\neg\neg a \supset a$ ไม่เกิดขึ้นในระบบ มีผลทำให้ $a \vee \neg a$ ไม่เกิดขึ้นด้วย เพราะว่า $a \vee \neg a$ สามารถพิสูจน์ได้จาก $\neg\neg a \supset a$

รายละเอียดศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสือ

Van Dale, D; Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism, Cambridge University Press 1982

และเอกสารอ้างอิงเล่มที่ 10

3.7 ปรัชญาทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มสมมุติฐานนิยม (Hypothetical)

นักคณิตศาสตร์ที่เป็นผู้นำกลุ่มนี้คือ ชาร์ส แซนเดอร์เพียซ (Charles Sander Peirce 1809 - 1880) แนวคิดของกลุ่มนี้ จะเริ่มต้นด้วยการตั้งสมมุติฐาน (Setting Hypothesis) แล้วจึงทำการทดลองเพื่อทดสอบว่าสมมุติฐานดังกล่าวเป็นจริงหรือไม่

แนวคิดของกลุ่มนี้ แตกต่างไปจากสามกลุ่มแรกเป็นอย่างมาก เพราะเหตุผลที่กลุ่มนี้ใช้เป็นหลักใหญ่คือ เหตุผลเชิงอุปนัย และตรรกศาสตร์ที่ใช้เป็นหลักใหญ่ก็เป็นตรรกศาสตร์เชิงอุปนัย (Inductive logic) ซึ่งต่างกับสามกลุ่มแรกที่ใช้เหตุผลเชิงนิรนัย และตรรกศาสตร์ที่ใช้ก็เป็นตรรกศาสตร์เชิงนิรนัย (Deductive logic)

3.8 ตรรกศาสตร์ของกลุ่ม เบคอน มิล และดิวอี้

ตรรกศาสตร์ของกลุ่มสมมุติฐานนิยม เป็นตรรกศาสตร์เชิงอุปนัย

เบคอน (Bacon 1561 - 1626) ได้เป็นผู้เริ่มวางรากฐานตรรกศาสตร์ซึ่งใช้เหตุผลเชิงอุปนัยเป็นหลัก และเรียกว่าตรรกศาสตร์เชิงอุปนัย

เบคอนมีความเห็นว่า ผลสรุปเชิงวิทยาศาสตร์ นั้นควรจะได้มาจากการสำรวจ การทดลอง การวิเคราะห์ และการสังเกตุ เขาไม่เห็นด้วยกับการที่ได้ผลสรุปมาจากสาเหตุใด สาเหตุหนึ่งเป็นสาเหตุแม่บท (สาเหตุซึ่งอยู่ในรูปการวางนัยทั่วไป) เพราะการยอมรับสาเหตุใดสาเหตุหนึ่งเป็นแม่บท เป็นการบังคับให้คนเชื่อสาเหตุดังกล่าวว่าเป็นจริง โดยไม่มีการสืบสาวหาข้อเท็จจริงทั้งๆ ที่สามารถสืบสาวไปได้ เช่น

เหตุ สิ่งมีชีวิตทุกอย่างต้องตาย (สาเหตุแม่บท)

คนทุกคนเป็นสิ่งมีชีวิต

ผลสรุป คนทุกคนต้องตาย

เมื่อพิจารณาดูสาเหตุแม่บทที่กล่าวว่า "สิ่งมีชีวิตทุกอย่างต้องตาย" เป็นจริงก็หมายความว่า มีการสำรวจมาแล้วในเอกภพสัมพัทธ์ของสิ่งมีชีวิต และก็ได้ทราบมาก่อนแล้วว่า "คนทุกคนเป็นสิ่งมีชีวิต และคนทุกคนต้องตาย" "นกทุกตัวเป็นสิ่งมีชีวิตและนกทุกตัวต้องตาย ",... จึงแสดงว่าผลดังกล่าวมิได้เกิดจากเหตุดังกล่าวมาแล้วแต่ผลดังกล่าวเกิดจากการสังเกตุ การสำรวจ แล้วจึงสรุปเป็นสาเหตุแม่บทในลักษณะการวางนัยทั่วไป

ดังนั้นเบคอน จึงไม่เห็นด้วยกับวิธีการของตรรกศาสตร์ แบบอริสโตเติล เขาจึงได้พัฒนาตรรกศาสตร์เชิงอุปนัยขึ้น บุคคลที่ควรได้รับการยกย่องว่าได้ช่วยพัฒนาตรรกศาสตร์เชิงอุปนัยหลังจาก เบคอนได้แก่ มิล (Mill 1806 - 1873)

เพียซ (Peirce 1809 - 1880) และดิวอี้ (Dewey 1859- 1952)

ประเภทของเหตุผลเชิงอุปนัย

เนื่องจากเหตุผลเชิงอุปนัย ต้องอาศัยการสำรวจ การสังเกตุ การทดลองและการวิเคราะห์ โดยตรงกับตัวคงที่ในเอกภพสัมพัทธ์ ที่ต้องการศึกษา จึงสามารถแยกประเภทของเหตุผลเชิงอุปนัย ตามลักษณะของตัวคงที่ในเอกภพสัมพันธ์ที่ต้องการศึกษา

1) เหตุผลเชิงอุปนัยแบบสมบูรณ์ เป็นการอ้างเหตุผลซึ่งได้ผลสรุปมาจากการสำรวจ การทดลอง และวิเคราะห์ตัวคงที่ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ที่ต้องการศึกษา เพราะว่าตัวคงที่ มีจำนวนจำกัด สามารถศึกษาได้หมดทุกตัว เช่น

ปัญหา ถ้า $x = 1, 2, 3, \ldots$ แล้ว จำนวนเต็ม

$y = x^2 + x + 11$ เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

สำรวจและทดลอง

$x = 1$, $1^2 + 1 + 11 = 13$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$x = 2$, $2^2 + 2 + 11 = 17$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$x = 3$, $3^2 + 3 + 11 = 23$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$x = 4$, $4^2 + 4 + 11 = 31$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$x = 5$, $5^2 + 5 + 11 = 41$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$x = 6$, $6^2 + 6 + 11 = 53$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$x = 7$, $7^2 + 7 + 11 = 67$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$x = 8$, $8^2 + 8 + 11 = 83$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$x = 9$, $9^2 + 9 + 11 = 101$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$x = 10$, $10^2 + 10 + 11 = 121$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

ผลสรุป ถ้า x เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $1 \leq x \leq 9$ และ

$y = x^2 + x + 11$ แล้ว y เป็นจำนวนเฉพาะ

2) เหตุผลเชิงอุปนัยซึ่งค่อนข้างสมบูรณ์ เป็นการศึกษาข้อเท็จจริงในเอกภพสัมพัทธ์ ซึ่งมีตัวคงที่ มีลักษณะเหมือนกันจนเป็นเอกภาพ (Homogeneous) และไม่สามารถเห็นข้อแตกต่างได้ เช่น ต้องการศึกษาว่าน้ำในตุ่มสะอาด หรือไม่

ก็นำน้ำในตุ่มดังกล่าวมาหนึ่งแก้ว หลังจากกวนน้ำในตุ่มนั้น ให้เป็นเนื้อเดียวกัน เมื่อตรวจสอบพบว่าน้ำแก้วนั้นสะอาด ก็สามารถสรุปว่า น้ำในตุ่มนั้นทั้งหมดสะอาดหรืออย่างในเรขาคณิตยูคลิด เมื่อกำหนดจุดสองจุดมาให้แล้ว ลองจากเส้นตรงผ่านจุดสองจุดดังกล่าวหลายครั้ง ก็จะพบว่าได้เส้นตรงเพียงเส้นเดียว จึงสรุปเป็นการวางนัยทั่วไปได้ว่า สามารถลากเส้นตรงผ่านจุดสองจุด ที่กำหนดให้ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น โดยไม่จำเป็นต้องทดลองกับสองจุดอื่นอื่นอีก

3) <u>เหตุผลเชิงอุปนัยซึ่งไม่เคยมีตัวอย่างค้าน</u> เป็นการสรุปข้อสังเกตหรือทดลอง หรือผลจากการสำรวจคุณสมบัติอันหนึ่ง ของตัวคงที่แต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์อันหนึ่งแล้ว ยังไม่เคยพบว่ามีคุณสมบัติผิดแปลกไปจากที่เคยพบมาแล้ว เช่น จากการสำรวจต้นมะพร้าวทุกต้นที่มีมาแล้ว พบว่าไม่มีต้นมะพร้าวต้นใดแตกกิ่ง จึงสรุปว่าต้นมะพร้าวทุกต้นไม่มีกิ่ง(ทั้งทั้งที่ยังไม่ทราบว่าว่าในอนาคต ต้นมะพร้าวจะยังคงไม่แตกกิ่งอยู่เช่นนี้หรือเปล่า) ตัวอย่างทางคณิตศาสตร์ เช่น

ปัญหา มีจำนวนเต็มบวกซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะแฝดกันอยู่กี่คู่ (จำนวนเฉพาะที่เป็นแฝดกัน จะมีค่าต่างกันเท่ากับ 2 เช่น 5, 7 และ 11, 13)

สำรวจ (5, 7), (11, 13), (17, 19), (41, 43), (71, 73),
(101, 103), ...

ผลสรุป เซตของจำนวนเฉพาะแฝดกันเป็นเซตอนันต์

4) <u>เหตุผลเชิงอุปนัยซึ่งเชื่อได้เป็นส่วนใหญ่</u> เป็นการสรุปข้อสังเกตหรือผลการสำรวจคุณสมบัติอันหนึ่งของตัวคงที่แต่ละตัว ในเอกภพสัมพัทธ์อันหนึ่งแล้ว พบว่าส่วนใหญ่มีคุณสมบัติดังกล่าว เช่น จากการสำรวจพบว่า คนไทยส่วนใหญ่มีตาสีน้ำตาล จึงสรุปว่า คนไทยตาสีน้ำตาล หรือคนไทยส่วนใหญ่ตาสีน้ำตาล ตัวอย่างที่เป็นคณิตศาสตร์

ปัญหา ถ้า A เป็นเซตที่กำหนดโดย

$A = \{x / 10(n-1) < x \leq 10n$, n และ x เป็นจำนวนเต็มบวก $\}$

แล้วเซต A จะมีจำนวนเฉพาะถึงครึ่งหนึ่งหรือไม่

สำรวจ และสังเกต

$A = \{1, 2, \ldots, 10\}$ มี 2, 3, 5, 7 เป็นจำนวนเฉพาะ

$A = \{11, 12, \ldots, 20\}$ มี 11, 13, 17, 19 เป็นจำนวนเฉพาะ

$A = \{21, 22, \ldots, 30\}$ มี 23, 29 เป็นจำนวนเฉพาะ

$A = \{31, 32, \ldots, 40\}$ มี 31, 37 เป็นจำนวนเฉพาะ

$A = \{41, 42, \ldots, 50\}$ มี 41, 43, 47 เป็นจำนวนเฉพาะ

$A = \{51, 52, \ldots, 60\}$ มี 53,59 เป็นจำนวนเฉพาะ

$\vdots$

ผลสรุป ถ้า A เป็นเซตที่กำหนด

$A = \{x / 10(n-1) < x \leq 10n,\ n$ และ x เป็นจำนวนเต็มบวก $\}$

แล้วสมาชิกของ A ส่วนใหญ่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

5) <u>เหตุผลเชิงอุปนัยซึ่งสรุปมาจากกลุ่มตัวอย่าง</u> บางครั้งตัวคงที่ในเอกภพสัมพัทธ์ มีจำนวนมากมายจนไม่สามารถศึกษาข้อเท็จจริงได้หมดทุกตัว จึงศึกษาข้อเท็จจริงจากกลุ่มตัวอย่างเช่น ต้องการศึกษาว่า ข้าวสารกระสอบหนึ่งมีเม็ดหักกี่เปอร์เซ็นต์ จะทำโดยเจาะเอาข้าวสารตอนปากกระสอบมาส่วนหนึ่ง เจาะเอาตรงกลางกระสอบมาส่วนหนึ่ง และเจาะเอาตรงก้นกระสอบมาส่วนหนึ่ง แล้วนำทั้งสามส่วนมารวมกันแล้วตรวจดูเม็ดหัก ถ้าพบว่ามีเม็ดหัก 15 % ก็สรุปว่า ข้าวสารกระสอบนั้นมีเม็ดหัก 15 %

รายละเอียดเพิ่มเติมศึกษาได้จากหนังสือ

สมัย ยอดอินทร์ , ตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์, ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 2525

3.9 <u>แนวคิดสหัชญาณนิยมส่วนทางกับแบบแผนนิยมอย่างไร</u>

1) <u>รูปธรรมคือจุดเริ่มต้นของคณิตศาสตร์</u>

กลุ่มสหัชญาณนิยม มีแนวความคิดว่า คณิตศาสตร์แต่ละสาขาจะมีได้จะต้องมีรูปธรรมเพื่อสร้างความสำนึกทางคณิตศาสตร์ในเรื่องนั้นมาก่อน ตัวอย่างเช่น การจะรู้ความหมายของ "ความเป็นหนึ่ง" "ความเป็นสอง" ... ก็ต่อเมื่อเริ่มมีความสำนึกว่า "ไข่หนึ่งฟอง" กับ "ม้าหนึ่งตัว" ต่างก็เป็นรูปธรรมของ "ความเป็นหนึ่ง" และ "คนสองคน" กับ "วันสองวัน" เป็นรูปธรรมของ "ความเป็นสอง" แต่กลุ่มแบบแผนนิยมกลับเห็นตรงกันข้างคือ

2) <u>นามธรรมเป็นจุดเริ่มต้นของคณิตศาสตร์</u>

กลุ่มแบบแผนนิยม มีความเห็นว่า การที่คนจะรู้ว่า "ไข่หนึ่งฟอง " มีความหมายเหมือนกับ "ม้าหนึ่งตัว" ก็เพราะมีความสำนึกเป็นนามธรรมเรื่อง " ความเป็นหนึ่ง " มาก่อน และในทำนองเดียวกัน การที่จะรู้ว่า "คนสองคน" มีความเหมือนกันกับ "วันสองวัน" ก็ต้องมีความสำนึกเป็นนามธรรมเรื่อง "ความเป็นสอง "มาก่อนด้วย และยังมีความเห็นต่อไปอีกว่า ความสำนึกเป็นนามธรรมของ " ความเป็นสอง " จะมีขึ้นได้ก็ต่อเมื่อมีความสำนึกเป็นธรรมของ " ความเป็นหนึ่ง มาก่อน เพราะนามธรรมของ "ความเป็นสอง" ต้องสำนึกมาจากนามธรรมของ " ความเป็นหนึ่ง และความเป็นหนึ่ง " และในทำนองเดียวกัน นามธรรมของ " ความเป็นสาม " ต้องสำนึกมาจากนามธรรมของ " ความเป็นสอง และความเป็นหนึ่ง " เป็นลำดับไปเรื่อยๆ ด้วยเหตุเช่นนี้เองกลุ่มแบบแผนนิยมจึงเห็นด้วยกับสัจพจน์ของ เปอาโน ซึ่งเป็นระบบสัจจพจน์ซึ่งเริ่มจากนามธรรม คือเริ่มจากอนิยาม " จำนวนธรรมชาติ " " ความเป็นหนึ่ง " และ "ตัวตาม " โดยไม่จำเป็นต้องสนใจ ความหมายของคำเหล่านั้น แล้วจึงกำหนดสัจพจน์ เพื่อให้ทราบว่า " ความเป็นสอง " เป็นตัวตามของความเป็นหนึ่ง " และ " ความเป็นสาม " เป็นตัวตามของ " ความเป็นสอง " และจำนวนธรรมชาติแต่ละตัวจะมีตัวตามเพียงตัวเดียวเท่านั้น และขณะเดียวกัน " ความเป็นหนึ่ง " ไม่เป็นตัวตามของจำนวนธรรมชาติตัวใด

รายละเอียดเพิ่มเติม สามารถศึกษาได้จากหนังสือ

สมัย ยอดอินทร์ ตรรกศาสตร์เชิงคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 2525

ด้วยระบบสัจพจน์ซึ่งเป็นนามธรรมดังกล่าวมาแล้วก็สามารถพิสูจน์ทฤษฎีเบื้องต้น เป็นคุณสมบัติเชิงนามธรรมได้อีกด้วย ด้วยเหตุนี้กลุ่มแบบแผนนิยมจึงสรุปว่า

3) <u>ระบบสัจพจน์กำหนดธรรมชาติของคณิตศาสตร์</u>

จากที่กล่าวมา จะเห็นว่ากลุ่มแบบแผนนิยมมีความเห็นว่า มนุษย์มีความเข้าใจ เรื่อง จำนวนธรรมชาตินั้น จะต้องมีความสำนึกเป็นนามธรรมของจำนวนธรรมชาติ และในความสำนึกเป็นนามธรรมของจำนวนธรรมชาติดังกล่าวมาแล้วนั้น ก็ยังสามารถค้นหากฎเกณฑ์มาควบคุม ความสำนึกเป็นนามธรรมของจำนวนธรรมชาติอีกด้วย จึงมีความเห็นว่าระบบจำนวนธรรมชาตินั้น มีระบบสัจพจน์ของมันเองเป็นตัวกำหนด และควบคุมกฎเกณฑ์ของจำนวนธรรมชาติอยู่แล้ว หากแต่บางคน (ซึ่งหมายถึงกลุ่มสหัชญาณนิยม) มิได้สนใจและนึกไม่ถึงว่าสัจพจน์ และอนิยามดังกล่าวมีอยู่แล้วอย่างไร แต่กลุ่มสหัชญาณนิยมกลับเห็นตรงกันข้ามกับกลุ่มแบบแผนนิยมดังนี้คือ

4) <u>ระบบสัจพจน์มิได้เป็นตัวกำหนดธรรมชาติของคณิตศาสตร์</u>

ได้กล่าวมาแล้วว่า กลุ่มสหัชญาณนิยม มีความเห็นว่ารูปธรรมกำหนด " ความเป็นหนึ่ง " และ " ความเป็นสอง " ,... และในทำนองเดียวกันรูปธรรมก็เป็นตัวกำหนดเช่นเดียวกันว่า " ความเป็นหนึ่งและความเป็นหนึ่ง "คือ " ความเป็นสอง " และ " ความเป็นสองและความเป็นหนึ่ง " คือ " ความเป็นสาม ",... จึงแสดงว่าธรรมชาติเป็นผู้กำหนดความเป็น 1,2,3, ... และ $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$ $3 + 1 = 4$, ... และกฎเกณฑ์เบื้องต้นของจำนวนธรรมชาตินั้นธรรมชาติ(รูปธรรม) เป็นผู้กำหนดมาให้ด้วยโครเนกเคอร์ (Kronecker) จึงกล่าวว่า พระเจ้าเป็นผู้สร้างจำนวนธรรมชาติมาก่อนแล้ว คนจึงพัฒนาจำนวนเต็ม และจำนวนอื่นๆตามมา ซึ่งคำกล่าวอันนี้พอจะสะท้อนเจตนาของ โครเนกเคอร์ได้ว่า โครเนกเคอร์ ต้องการจะบอกกับกลุ่มแบบแผนนิยมว่า

พระเจ้ามิได้มอบหมายให้ เปอาโน เป็นผู้สร้างจำนวนธรรมชาติ และขณะเดียวกันก็คล้ายกับจะบอกว่า พระเจ้ามิได้มอบหมายให้ เปอาโน มีสิทธิบังคับให้ใครต่อใครต้องยอมรับสัจพจน์ของเปอาโน ว่าเป็นจริง หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า พระเจ้ามิได้มอบหมายให้ เปอาโน เป็นผู้ควบคุมเกณฑ์ต่างๆ ของจำนวนธรรมชาติแต่ผู้เดียว

5) <u>คณิตศาสตร์แต่ละระบบจะต้องไม่มีข้อขัดแย้ง</u>

กลุ่มแบบแผนนิยมยึดมั่นกับหลักเกณฑ์ที่ว่าระบบคณิตศาสตร์ แต่ละระบบจะต้องไม่มีข้อขัดแย้ง โดยยึดว่าทุกระบบต้องมีข้อตกลงต่อไปนี้บังคับอยู่ตลอดเวลาคือ

ก. $a = a$ (กฎการเป็นเอกภาพ Law of Identity)

ข. ถ้า $a = b$ แล้วจะมี $a \neq b$ ด้วยไม่ได้

ค. ถ้า $a \neq b$ แล้วจะมี $a = b$ ด้วยไม่ได้

(สองอันหลังนี้เรียกว่า กฎการขัดแย้ง Law of Contradiction) ซึ่งข้อตกลงดังกล่าวนี้ ทำให้ระบบของคณิตศาสตร์ของกลุ่มแบบแผนนิยมปราศจากข้อขัดแย้ง ดังตัวอย่างเช่น กลุ่มแบบแผนนิยม ไม่ยอมให้มี "เซตของเซตทั้งหมด" เพราะถ้า " X เป็นเซตของเซตทั้งหมด " ก็จะได้ $X \varepsilon X$ จึงมีผลให้ $X \neq X$ แต่ตามข้อตกลงในข้อ ก. $X = X$ จึงไม่สอดคล้องกับข้อตกลงในข้อ ข. และข้อ ค. จึงยอมให้มีเซต X ดังกล่าวไม่ได้ เพราะจะเกิดข้อความแย้งกันแต่จริงขึ้น การไม่ยอมให้มีเซตดังกล่าว ทำให้กลุ่มสหัชญาณนิยม มองเห็นว่ากลุ่มแบบแผนนิยมสร้างปัญหาให้แก่วงการคณิตศาสตร์เพราะระบบเซตเป็นคณิตศาสตร์ที่กลุ่มแบบแผนนิยม เป็นผู้สร้างขึ้นมาเพื่อใช้ในคณิตศาสตร์

6) <u>คณิตศาสตร์บางระบบจำเป็นต้องมีข้อขัดแย้ง</u>

กลุ่มสหัชญาณนิยม เห็นว่าข้อความแย้งกันแต่จริงนั้น มิได้เป็นเหตุใหญ่ที่จะทำลายระบบคณิตศาสตร์ จึงไม่สนใจว่ามีเซตของเซตทั้งหมด หรือไม่มี

แต่กลุ่มสหัชญาณนิยมสนใจว่า การที่กลุ่มแบบแผนนิยมบังคับไม่ให้มีเซตของเซตทั้งหมดก็คือบังคับว่า $X \not\varepsilon X$ ด้วย จึงมีผลว่า ถ้า P เป็นเซตซึ่ง

$$P = \{x \,/\, x \text{ ไม่ใช่คน }\}$$

ก็แสดงว่าเมื่อบังคับว่า $X \notin X$ ก็แสดงว่าบังคับว่า $P \notin P$ ด้วย แต่ตามความหมายของเซต P นั้น P ไม่ใช่คนอยู่แล้ว จึงได้ว่า $P \in P$ ด้วย กลุ่มสหัชญาณนิยมถือว่า เซตเป็นการรวมกลุ่มตามธรรมชาติ ไม่จำเป็นต้องมีกฎเกณฑ์อะไรไปบังคับ (ซึ่งหมายความไม่ต้องมีกฎเกณฑ์ ซึ่งมนุษย์เป็นคนสร้างไปบังคับธรรมชาติ ดังนั้นข้อขัดแย้งกันแต่จริงในบางโอกาส ก็จำเป็นต้องมีได้ในเมื่อข้อขัดแย้งดังกล่าวมิได้มีผลกระทบกระเทือนกับเรื่องอื่นมากมายนัก

7) <u>กฎการยกเว้นตัวกลาง</u> (Law of Excluded Middle)

กลุ่มแบบแผนนิยมยึดกฎการยกเว้นตัวกลางเป็นหลัก ซึ่งใช้ในการพิสูจน์แบบทางอ้อม (Indirect Proof)

กฎการยกเว้นตัวกลางคือ

$a = b$ หรือ $a \neq b$

จะต้องเป็นจริงอันใดอันหนึ่งเท่านั้นไม่มีกรณีที่สามเกิดขึ้น

ตัวอย่างการพิสูจน์ทางอ้อมที่ใช้กฎการยกเว้นตัวกลางคือ

ก. ไม่มีจำนวนตรรกยะ $m/_n$ ซึ่ง $m/_n = \sqrt{2}$

จึงทำให้ $\sqrt{2} \neq m/_n$

ข. เซตของจำนวนจริงไม่เป็นเซตอนันต์นับได้

ค. การพิสูจน์ทฤษฎีเบิร์นสไตน์ (Bernstien's theorem) และทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ (Bozano - Weierstrass' theorem) แต่แนวคิดของกลุ่มสหัชญาณนิยมไม่ยอมรับกฎการยกเว้นตัวกลาง เพราะมีความเชื่อว่ามีปัญหาทางคณิตศาสตร์บางอันเป็นปัญหาซึ่งยังตัดสินไม่ได้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

8) <u>ปัญหาทางคณิตศาสตร์บางอันยังตัดสินไม่ได้</u>

กลุ่มสหัชญาณนิยมเชื่อว่าปัญหาทางคณิตศาสตร์บางอันยังตัดสินไม่ได้ ตัวอย่างเช่น

ก. $2^{1024} + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่

ข. มีหรือไม่มีจำนวนเต็ม x, y, z ซึ่งไม่เป็นศูนย์ และทำให้ $x^n + y^n = z^n$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ (ทฤษฎีสุดท้ายของแฟร์มาต์ Fermat, 1601 - 1665)

ปัญหาดังกล่าวนี้ กลุ่มสหัชญาณนิยมเห็นว่า มีคำตอบอยู่สามแบบคือ

ก. มีจำนวนเต็มดังกล่าวดังกล่าว

ข. ไม่มีจำนวนเต็มดังกล่าว

ค. ปัญหาดังกล่าวไม่สามารถตัดสินได้

ในทำนองเดียวกัน ปัญหาที่ว่า $2^{1024} + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ กลุ่มสหัชญาณนิยมก็เชื่อว่ามีคำตอบสามแบบคือ เป็นจำนวนเฉพาะ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ หรือยังตัดสินไม่ได้

ดังนั้นตามแนวคิดของกลุ่มสหัชญาณนิยมในการตอบปัญหาดังกล่าวจะเห็นว่า กฎการยกเว้นตัวกลางดังกล่าวมาแล้วใช้ไม่ได้ในกลุ่มนี้ เพราะว่ากลุ่มนี้เห็นว่า การที่ $a = b$ หรือ $a \neq b$ จะต้องมีกรณีที่สามเกิดขึ้นคือ ยังตัดสินไม่ได้ ซึ่งหมายความว่า ถ้า $a \neq b$ เป็นไปไม่ได้ก็จะสรุปว่า $a = b$ เลยไม่ได้ และถ้า $a = b$ เป็นไปไม่ได้ก็สรุปว่า $a \neq b$ เลยไม่ได้

ดังนั้นกลุ่มสหัชญาณนิยม จึงไม่ยอมรับการพิสูจน์แบบทางอ้อม ซึ่งกลุ่มแบบแผนนิยม ใช้กฎการยกเว้นตัวกลาง

9) ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทุกปัญหามีทางตัดสินได้

กลุ่มแบบแผนนิยมมีความเชื่อว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทุกอันมีทางที่จะตัดสินได้ ย้อนกลับไปพิจารณาปัญหา $2^{1024} + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ ปัญหานี้กลุ่มแบบแผนนิยมเห็นว่า มีทางตัดสินได้ ถ้าต้องการตัดสินก็สามารถทำได้โดยให้ $y = 2^{1024} + 1$ และให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกทุกจำนวน ซึ่ง $2 < x < y/_2$ ก็นำจำนวน x ทุกจำนวนดังกล่าวไปหาร y ดู เพราะว่าเซตของจำนวน x เป็นเซตจำกัดการกระทำต้องมีการสิ้นสุด ถึงแม้จะใช้เวลาหลายร้อยปีก็ตาม ถ้าพบว่าจำนวน x แต่ละตัวดังกล่าวหาร y ไม่ลงตัวก็แสดงว่า y เป็นจำนวนเฉพาะ ถ้ามีจำนวน x ดังกล่าวการ y ลงตัวก็แสดงว่า y ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ จึงแสดงว่ามีทางตัดสินได้

สำหรับทฤษฎีสุดท้ายของแฟร์มาต์ (Fermat) กลุ่มแบบแผนนิยมเห็นว่าเป็นปัญหาที่มีการตัดสินได้ เพราะถ้าทฤษฎีดังกล่าวเป็นอิสระจากระบบสัจพจน์ของจำนวนเต็ม ก็แสดงว่าทฤษฎีนี้มีสิทธิ์ที่จะถูกเลือกเป็น สัจพจน์ของจำนวนเต็มเพิ่มขึ้นอีก เมื่อเป็นสัจพจน์ก็แสดงว่า ได้รับการตัดสินว่ามีหรือไม่มี จำนวนเต็มดังกล่าว แต่ถ้าทฤษฎีนี้ไม่เป็นอิสระกับระบบสัจพจน์ของจำนวนเต็ม ก็แสดงว่ามีทางพิสูจน์ได้ว่ามีหรือไม่มีจำนวนเต็มดังกล่าว จึงแสดงว่ามีทางตัดสินได้

จากเหตุผลที่กล่าวมา จะเห็นว่ากลุ่มแบบแผนนิยมมีเครื่องมือสำคัญที่จะตัดสินปัญหาทางคณิตศาสตร์ คือ ระบบสัจพจน์เพราะว่าระบบสัจพจน์สามารถทดสอบได้ว่าข้อความใดเป็นอิสระหรือไม่อิสระกับระบบ ถ้าทราบว่าเป็นอิสระก็สามารถเลือกข้อความนั้นเป็นสัจพจน์เพิ่มขึ้นอีก จึงแสดงว่าตัดสินได้ แต่ถ้าไม่เป็นอิสระก็แสดงว่ามีทางที่จะพิสูจน์ได้(แต่อาจจะยังไม่มีใครสามารถพิสูจน์ได้เท่านั้น) ซึ่งแสดงว่าสามารถตัดสินได้

ด้วยเหตุที่กลุ่มสหัชญาณนิยม ไม่มีระบบสัจพจน์เป็นเครื่องมือ ซึ่งเสมือนไม่มีกติกาไว้ควบคุมระบบ จึงไม่ทราบจะเอาหลักเกณฑ์อะไรไปตัดสินปัญหา จึงยอมรับว่าปัญหาบางอันยังตัดสินไม่ได้

10) <u>การมีอย่างน้อยหนึ่งในคณิตศาสตร์ต้องสามารถ สร้างให้เห็นได้</u>

(Mathematical existence as constructibility)

กลุ่มสหัชญาณนิยมเห็นว่าทุกสิ่งทุกอย่าง ในคณิตศาสตร์ต้องสามารถสร้างให้เห็นได้ คำว่าสร้างให้เห็นได้ หมายความว่าเริ่มจากอะไรอันหนึ่ง (ซึ่งมีรูปธรรม) ไปสู่อีกอันหนึ่งด้วยกระบวนการ และขั้นตอนจำกัด และชัดแจ้ง ตัวอย่างเช่น

ก. กลุ่มแบบแผนนิยมยอมรับทฤษฎี เวลออร์เดอริ่ง Well - Ordering แซร์เมโล (Zermelo 1871 - 1953) ระบุว่า เซตทุกเซตเป็นเซตลำดับปกติ กลุ่มสัชญาณนิยมเห็นว่า เป็นเรื่องไร้สาระเพราะไม่สามารถสร้างให้เห็นจริงได้ ตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนจริงสามารถนำสมาชิกมาเรียงแถวโดยมีตัวเริ่มต้น และตัวถัดไปได้อย่างไร ถึงแม้จะมีวิธีนำจำนวนตรรกยะมาเรียงแถวดังกล่าวจนหมดแล้ว ต่อด้วยจำนวนอตรรกยะ ก็ยังมีปัญหาว่าจะนำเอาจำนวนอตรรกยะตัวไหนมาเรียงอย่างไร เพราะคนยังรู้จักจำนวนอตรรกยะยังไม่หมดสิ้น และจำนวนจริงบางอันก็ยังพิสูจน์ไม่ได้ว่า เป็นอตรรกยะหรือไม่ เช่น 2^e, 2^π และ π^e เป็นต้น

ข. กลุ่มแบบแผนนิยมพิสูจน์ได้ว่ามีเซตอนันต์ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกมากกว่าจำนวนสมาชิกของจำนวนธรรมชาติ (แต่กลุ่มสหัชญาณนิยมไม่ยอมรับวิธีการพิสูจน์ของกลุ่มนี้ เพราะใช้กฎการยกเว้นตัวกลาง) กลุ่มสหัชญาณนิยมขอให้แสดงให้เห็นจริงโดยชัดแจ้งเป็นรูปธรรมว่า เมื่อนำจำนวนธรรมชาติมาจับคู่กับจำนวนจริงแล้ว มีสมาชิกจำนวนจริงเหลือได้อย่างไร และสมาชิกจำนวนธรรมชาติตัวสุดท้าย ซึ่งจับคู่กับจำนวนจริงมีได้อย่างไร ด้วยเหตุนี้เองกลุ่มสหัชญาณนิยมจึงไม่ยอมรับการมีเซตอนันต์ ซึ่งมีจำนวนสมาชิกมากกว่าจำนวนธรรมชาติ เพราะถือว่าเป็นเพียงความคิดฝันเท่านั้น

ค. กลุ่มแบบแผนนิยมสามารถพิสูจน์ได้ว่า มีจำนวนอดิศัยและจำนวนพีชคณิต แต่กลุ่มสหัชญาณนิยมไม่ยอมรับ

พิจารณา $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$
และให้ $y = 1.4145\ldots5\ldots5\ldots$ โดยที่ 5 แทนที่ทศนิยมตำแหน่งที่ 4, 8, 12, ... ของ $\sqrt{2}$ ปัญหาดังกล่าวนี้คือ ขณะนี้ยังไม่มีใครพอสูจน์ได้ว่า y เป็นจำนวนอดิศัย หรือ จำนวนพีชคณิตจึงมีปัญหาว่า จำนวนอดิศัยบางอันสามารถสร้างให้เห็นได้อย่างไร (เพราะมีจำนวนจริง y ดังกล่าวแล้วยังไม่ทราบว่าเป็นจำนวนอดิศัย หรือจำนวนพีชคณิต)

11) <u>คณิตศาสตร์แต่ละระบบของกลุ่มแบบแผนนิยมเป็นของตายตัวแน่นอน</u>

เพราะกลุ่มแบบแผนนิยม มีสัจพจน์ควบคุมไม่ให้มีการเปลี่ยนแปลง ถ้าเปลี่ยนแปลงก็จะเป็นระบบใหม่ขึ้นมาอีกอันหนึ่ง ดังนั้นรัสเซลล์ จึงเปรียบเทียบคณิตศาสตร์ว่าเป็นรูปปั้นที่สวยงาม แต่ปราศจากชีวิต เพราะว่าคณิตศาสตร์สามารถนำสัจพจน์มาร้อยกรองเพื่อประกอบเป็นทฤษฎีได้อย่างสวยงาม ทฤษฎีที่มีความยากมากก็ยิ่งสวยงามมาก คณิตศาสตร์เป็นนามธรรมที่บริสุทธิ์ ไม่ยึดรูปธรรมอันใดมาเกาะเพื่อช่วยในการพิสูจน์ อาศัยนามธรรมพิสูจน์ความจริงในนามธรรม ได้อย่างสวยงามตัดสินได้อย่างตายตัวแน่นอน ไม่มีความเปลี่ยนแปลง จึงเปรียบเสมือนรูปปั้นซึ่งมีความสวยงามเป็นอมตะ

แต่ในทางตรงกันข้ามคณิตศาสตร์ของกลุ่มสหัชญาณนิยม มีโอกาสเปลี่ยนแปลงได้เสมอ เพราะไม่มีสัจพจน์ควบคุมให้ตายตัวแน่นอน (ละสัจพจน์ไว้ในความเข้าใจของแต่ละคน ซึ่งอาจจะเกิดการเข้าใจไปคนละอย่างก็ได้)

12) <u>คณิตศาสตร์ของกลุ่มสหัชญาณนิยม เป็นอิสระจากตรรกศาสตร์ของอริสโตเติล</u> คือ กลุ่มสหัชญาณนิยมไม่ได้ยึดถือกฎต่อไปนี้เสมอคือ

ก. A ต้องเป็น A (กฎการเป็นเอกภาพ)

ข. A จะเป็น B และไม่เป็น B ในขณะเดียวกันไม่ได้ (กฎการขัดแย้ง)

ค. A จะต้องเป็น B หรือไม่เป็น B อันใดอันหนึ่ง (กฎการยกเว้นตัวกลาง)

จากที่กล่าวมาในข้อ (6) และข้อ (7) จึงสรุปได้ว่ากลุ่มสหัชญาณนิยมนั้น อิสระจากตรรกศาสตร์ แบบอริสโตเติล แต่ขณะเดียวกันกลุ่มแบบแผนนิยมยึดกฎเกณฑ์นี้ อย่างเคร่งครัด แม้แต่กลุ่มตรรกนิยม ก็ไม่ได้เป็นอิสระจากกฎเกณฑ์ดังกล่าว เพราะสัจพจน์เบื้องต้นของตรรกศาสตร์ของกลุ่มตรรกนิยม ไม่ได้อิสระจากกฎเกณฑ์ดังกล่าว

จากการศึกษาแนวความคิดทางคณิตศาสตร์ของกลุ่มต่างๆ มาพอสังเขป พอที่จะสรุปให้ความเข้ากันได้ และความแตกต่างกันอย่างกว้างๆ ดังนี้

ก. กลุ่มตรรกนิยม กลุ่มแบบแผนนิยม กลุ่มสหัชญาณนิยมใช้เหตุผลเชิงนิรนัย และตรรกศาสตร์เชิงนิรนัยในการพัฒนาคณิตศาสตร์ แต่กลุ่มสมมุติฐานนิยมใช้เหตุผลเชิงอุปนัย และตรรกศาสตร์เชิงอุปนัยในการพัฒนาคณิตศาสตร์

ข. กลุ่มตรรกนิยม และกลุ่มแบบแผนนิยม ต่างก็พยายามจัดคณิตศาสตร์ให้เป็นระบบสัจพจน์ ต่างกันก็เพียงว่ากลุ่มตรรกนิยม พยายามจัดคณิตศาสตร์ให้เป็นระบบสัจพจน์ของตรรกศาสตร์ คือ พยายามทำให้คณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของตรรกศาสตร์ แต่กลุ่มแบบแผนนิยมจัดคณิตศาสตร์ ให้เป็นระบบของคณิตศาสตร์ โดยเริ่มจากนามธรรมของคณิตศาสตร์เรื่องนั้นๆ แล้วอาศัยตรรกศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ทฤษฎีในระบบนั้น

กลุ่มสหัชญาณนิยมไม่มีระบบที่แน่นอน แต่ยึดมั่นอยู่กับรูปธรรมเป็นจุดเริ่มต้น เชื่อว่าคณิตศาสตร์เรื่องนั้น จะมีความหมายต้องสามารถสร้างให้เห็นจริงได้

กลุ่มสมมุติฐานนิยมถือว่า คณิตศาสตร์ คือการทดลองความคิด จึงแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยการทดลองเพื่อทดสอบสมมุติฐานที่ตั้งขึ้นว่าจริงหรือไม่

3.10 <u>อิทธิพลของปรัชญาที่มีต่อปรัชญาทางคณิตศาสตร์</u>

แนวคิดของนักปรัชญาที่มีอิทธิพลต่อแนวคิดทางคณิตศาสตร์ พอจะแบ่งแนวคิดได้สามแนวคือ

1. เหตุผลนิยม (Rationalism)
2. ประจักษ์นิยม (Empiricism)
3. วิจารณ์นิยม (Apriorism)

ซึ่งแนวคิดของนักปรัชญาแต่ละกลุ่มมีดังนี้

1. <u>กลุ่มเหตุผลนิยม</u> นักปรัชญาที่เป็นผู้นำกลุ่มคือ เรอเนเดส์การ์ตส์ (Rene Descartes 1596 - 1650) และกอตต์ฟรีดวิลเฮล์มไลบ์นิตซ์ (Gottfried Wilhelm Leiniz 1646 - 1716) ทั้งสองคนนี้เป็นทั้งนัก-ปรัชญา และนักคณิตศาสตร์

ปรัชญาแบบเหตุผลนิยมเริ่มมาตั้งแต่สมัยโสเครติสพลาโต และอริสโตเติล แต่มาเสื่อมลงเมื่อสมัยศาสนาเป็นใหญ่ปรัชญาในยุคศาสนาเป็นใหญ่ยึกหลักว่า เหตุผลขึ้นอยู่กับศรัทธาคือ เชื่อเสียก่อนแล้วจึงจะเข้าใจ จะรู้ดีหรือบรรลุถึงความจริงก็ต่อเมื่อศรัทธาเสียก่อน แล้วจึงจะรู้ว่าอะไรเป็นความจริง จนถึงสมัยเดส์การ์ตส์ ศาสนาเป็นใหญ่ก็ได้เสื่อมลง ความคิดแบบเหตุผลนิยม จึงได้เริ่มฟื้นฟูขึ้นมาอีก เดส์การ์ตส์ มีความเห็นว่าเหตุผลเท่านั้น ที่จะให้ความจริงได้ เขามีหลักว่าให้สงสัยทุกอย่างที่จะสงสัยได้ จนกระทั่งไม่สงสัยอะไรอีกแล้ว จึงเชื่อสิ่งนั้น

แนวคิดของกลุ่มเหตุผลนิยม มีลักษณะเด่นพอสรุปได้ดังนี้

ก. ความรู้ที่แท้จริง ได้มาจากการใช้ความคิดอย่างมีเหตุผล ไม่ใช่ได้มาจากการสังเกตข้อเท็จจริงที่เกิดขึ้น ไม่ใช่ได้มาจากประสบการณ์ ซึ่งเรียกว่าได้มาจากภายนอก แต่ความรู้ได้มาจากภายในคือ ความคิดที่มีเหตุ จากแนวความคิดอันนี้ เป็นการแสดงว่าการศึกษาไม่ใช่เป็นการแสวงหาความรู้ แต่เป็นกิจกรรมการดึงเอาความรู้ที่มีอยู่แล้วในจิตให้ปรากฏขึ้นมาเท่านั้น

ข. กลุ่มเหตุผลนิยมเชื่อว่า ความจริงเป็นของตายตัวแน่นอนไม่เปลี่ยนแปลง ไม่ใช่เป็นเพียงน่าจะเป็นหรืออาจจะเป็นเท่านั้น

ค. ประสบการณ์จะต้องได้รับการตีความโดยเหตุผล หรือจะต้องได้รับการคิดอย่างมีเหตุผลเสียก่อน แล้วจึงรับไว้เป็นความรู้

ง. กลุ่มเหตุผลนิยม ยอมรับหลักเบื้องต้นของอริสโตเติล

จ. กลุ่มเหตุผลนิยม มีความเชื่อว่าทฤษฎีเป็นจริงทั้งหลายมีฐานรองรับและประกันความเป็นจริงของทฤษฎีนั้นได้ โดยอาศัยสัจพจน์ การค้นหาสัจพจน์เพื่อประกันความจริงนั้นทำได้โดยการตั้งข้อสงสัย แล้วพยายามขจัดความสงสัยให้หมดไปเรื่อยๆ จนถึงความคิดอันหนึ่ง ซึ่งไม่สงสัยอีกแล้ว และเชื่อในความคิดดังกล่าวว่าเป็นสัจพจน์ ด้วยความคิดเช่นนี้ กลุ่มนี้จึงยอมรับว่า จำเป็นต้องมีความจริงขั้นมูลฐานเพื่อเป็นเหตุให้เกิดความจริงใหม่เรียกว่าผล

2. <u>กลุ่มประจักษ์นิยมหรือประสบการณ์นิยม</u>

นักปรัชญาที่เป็นผู้นำกลุ่มคือ เบคอน (Bacon 1561 - 1626)และจอห์นลอค (John Locke 1632 - 1704) กลุ่มนี้มีความเห็นค้านกับกลุ่มเหตุผลนิยม โดยเห็นว่าจิตมนุษย์นั้นเริ่มต้น ด้วยความว่างเปล่า จิตได้รับความคิดต่างๆ จากประสบการณ์ ไม่เห็นด้วยกับกลุ่มเหตุผลนิยม ที่ว่าความคิดติดตัวมาตั้งแต่กำเนิด กลุ่มนี้แบ่งประสบการณ์ออกเป็นสองแบบ คือ ประสบการณ์ทางประสาทสัมผัส ซึ่งได้แก่ประสาทสัมผัสทั้งห้า เรียกว่าประสบการณ์ภายนอก และอีกอันหนึ่งคือ ประสบการณ์ทางจิตใจได้แก่การคิดทบทวน เรียกว่าประสบการณ์ภายใน กลุ่มนี้มีความเชื่อว่าความรู้เกิดจากประสบการณ์ภายนอก และประสบการณ์ภายใน

นักปรัชญาซึ่งมีแนวความคิดตามอิทธิพลของ เบคอน และจอห์นลอค ได้แก่ เดวิดฮูม (David Hume 1711 - 1776) เจ.เอส.มิล (J.S.Mill 1806-1873) และดิวอี้ (Dewey 1859 - 1952)

กลุ่มประจักษ์นิยมหรือประสบการณ์นิยมนั้นมีความคิดเห็น หลายแบบเกือบเป็นตรงกันข้ามกับกลุ่มเหตุผลนิยม เช่น

ก. ความรู้มาจากประสบการณ์ หรือการปะทะกับสิ่งแวดล้อม

ข. ความรู้เป็นของไม่แน่นอน เป็นเพียงแต่พอเป็นไปได้เท่านั้น

ค. ความจริงไม่จำเป็นต้องตายตัวแน่นอน อาจจะเป็นเพียงลักษณะว่าน่าน่าจะเป็นจริงก็ได้

ง. ไม่สนใจกับหลักเบื้องต้นของอริสโตเติล

จ. มีเหตุไม่จำเป็นต้องมีผล และการที่ปรากฏการที่เกิดนำมาก่อนแล้วมีปรากฏการณ์อื่นเกิดตามมา ปรากฏการณ์อันแรกไม่จำเป็นต้องเป็นเหตุของปรากฏการณ์อันหลัง และปรากฏการณ์อันหลัง ไม่จำเป็นต้องเป็นผลของปรากฏการณ์อันแรก

3. กลุ่มวิจารณ์นิยม นักปรัชญาที่เป็นผู้นำกลุ่มคือ อิมแมนนวลคานต์ (Immanual Kant 1724 - 1804) คานต์ ยึดแนวปรองดองระหว่างพวกเหตุผลนิยม และประสบการณ์นิยม ถือว่า ความรู้เกิดจากทั้งเหตุผลซึ่งมีมาแต่กำเนิด และเกิดจากประสบการณ์ด้วย คานต์แยกว่า ประสบการณ์เป็นวัตถุดิบที่จะหลอมเป็นความรู้ ส่วนเหตุผลทำหน้าที่เป็นแบบ (ใช้หลอมวัตถุดิบ) ของความรู้ที่มีมาแต่กำเนิด เมื่อ คานต์ ได้ปรองดองเช่นนี้จึงทำให้เกิดการปรองดองในหลักการอื่นๆ ด้วย ซึ่งทำให้แนวความคิดของกลุ่มนี้ไม่มีอะไรเป็นของตนเองเพียงแต่เอาความคิดของคนอื่นมาประสมประสานกัน

เมื่อพิจารณาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ของกลุ่มตรรกนิยม และแบบแผนนิยม ก็จะเห็นได้ว่าเป็นแนวคิด ซึ่งได้รับอิทธิพลมาจากปรัชญาของกลุ่มเหตุผลนิยม คณิตศาสตร์ของทั้งสองกลุ่มนี้ เริ่มต้นจากนามธรรม และสัจพจน์ ก็ยิ่งเห็นได้ชัดว่าความรู้ได้มาจากความคิดอย่างมีเหตุผล ตามปรัชญาของกลุ่มเหตุผลนิยม

ส่วนแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของกลุ่ม สมมุติฐานนิยมนั้น จะเห็นได้ว่าเป็นอันเดียวกับกลุ่มประสบการณ์นิยมโดยตลอด เพราะความรู้ได้จากประสบการณ์ทั้งคู่

และแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ของกลุ่มสหัชญาณนิยม จะเห็นได้ว่า มีส่วนสอดคล้องกับกานต์ เพราะคณิตศาสตร์ของกลุ่มนี้ มีแนวคิดบางตอนเหมือนกลุ่มประสบการณ์นิยม และบางตอนเหมือนกลุ่มเหตุผลนิยม และคณิตศาสตร์ของกลุ่มสหัชญาณ เริ่มต้นด้วยรูปธรรมควบคู่ไปกับเหตุผล จึงแสดงว่าเหมือนกานต์