บทที่ 4

โครงสร้างของการพิสูจน์

จากการศึกษาปรัชญาทางคณิตศาสตร์ ตลอดจนตรรกศาสตร์พื้นฐานของแต่ละกลุ่ม ก็พอจะมองเห็นความสอดคล้องและความขัดแย้งกันของกลุ่มต่างๆ ดังนี้

1) ตรรกศาสตร์ไม่ว่ากลุ่มตรรกนิยม กลุ่มแบบแผนนิยม กลุ่มสหัชญาณนิยม ต่างก็ใช้กฎการแจงผลตามเหตุ (Modus ponen) ในการอนุมานทั้งสิ้น

2) กลุ่มตรรกนิยม กลุ่มแบบแผนนิยม และกลุ่มสหัชญาณนิยม ยอมรับว่าประพจน์ " ถ้า P แล้ว Q " ถ้าเหตุ P เป็นเท็จ จะได้ประพจน์ " ถ้า P แล้ว Q " เป็นจริงเสมอไม่ว่า Q จะเป็นจริงหรือเท็จก็ตาม

3) ตรรกศาสตร์ของกลุ่มแบบแผนนิยม และตรรกนิยม มีความเป็นอันเดียวกัน ไม่เป็นอิสระจากตรรกศาสตร์ของอรสิโตเติล * เช่นยอมรับกฎการขัดแย้ง กฎการยกเว้นตัวกลาง แต่ตรรกศาสตร์ของกลุ่มสหัชญาณนิยม ไม่ยอมรับกฎทั้งสองข้อนี้ จึงทำให้กลุ่มสหัชญาณนิยมไม่ยอมรับการพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof)

ส่วนบทบาทของกลุ่มสมมุติฐานนิยม ต่อคณิตศาสตร์นั้นมีไม่มากนัก ที่มีก็จะเป็นคณิตศาสตร์เกี่ยวกับดาราศาสตร์ เช่นกลุ่มนี้สังเกตดาวเคราะห์ดวงหนึ่งโคจรรอบดาวฤกษ์ดวงหนึ่ง สังเกตครั้งแรกโคจรเป็นวงรี ครั้งที่สองโคจรเป็นวงรี ครั้งที่สามโคจรเป็นวงรี นักคณิตศาสตร์กลุ่มนี้ก็จะพยายามพิสูจน์ว่า ทางเดินของดาวเคราะห์ดวงนี้รอบดาวฤกษ์ดวงหนึ่งเป็นวงรี โดยไม่ศึกษาเรื่องอื่นมาเกี่ยวข้องเลย

---

* รายละเอียดศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารอ้างอิงเล่มที่ 1 หน้า 1017

จากข้อสรุปดังกล่าว การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่พบในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ปัจจุบัน จะเป็นของกลุ่มแบบแผนนิยม แต่ก็มิได้หมายความว่าไม่ได้ใช้ของกลุ่มตรรกนิยม เพราะตรรกศาสตร์ของทั้งสองกลุ่มนี้เป็นอันเดียวกันตามที่ได้กล่าวมาแล้ว ดังนั้นจึงผสมผสานกันมา และจะเห็นชัดยิ่งขึ้นในวิชาตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ ส่วนการพิสูจน์ของกลุ่มสหัชญาณนิยม ก็พอมีให้พบเห็นบ้าง และกลุ่มนี้ก็มีเหตุผลที่ดีในการที่เขาไม่เห็นด้วยกลุ่มแบบแผนนิยม ดังได้กล่าวมาแล้วพิจารณาเปรียบเทียบการพิสูจน์ของกลุ่มแบบแผนนิยม และกลุ่มสหัชญาณนิยมดังนี้

4.1 <u>เปรียบเทียบการพิสูจน์กลุ่มแบบแผนนิยมกับกลุ่มสหัชญาณนิยม</u>

<u>การพิสูจน์ว่า $\emptyset \subset A$ ของกลุ่มแบบแผนนิยม</u>

<u>นิยามและสัจพจน์ที่ใช้ในการพิสูจน์</u>

ในที่นี้ $\subset$ หมายถึงการเป็นสับเซตรวม กรณีที่เป็นเซตเท่ากันด้วย

และ $\equiv$ หมายถึงก็ต่อเมื่อ (<===>)

<u>สัจพจน์ที่</u> 1 A และ B เป็นเซตสองเซตใดๆ $A \subset B$ หรือ $A \not\subset B$ จะต้องเป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น (กฎยกเว้นตัวกลาง)

<u>นิยามที่</u> 1 $A \subset B \equiv \forall x \, [\, x \in A \dashrightarrow x \in B \,]$

ผลจากนิยามที่ 1

$A \not\subset B \equiv \exists x \, [\, x \in A \wedge x \notin B \,]$

<u>นิยามที่</u> 2 $\emptyset \equiv \forall x \, [\, x \notin \emptyset \,]$

ดังนั้น $x \in \emptyset$ เป็นเท็จ

<u>สัจพจน์ที่</u> 2 ประพจน์ p เป็นจริง และไม่เป็นจริง (เท็จ) ในขณะเดียวกันไม่ได้ (กฎการขัดแย้ง)

<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> จะต้องพิสูจน์ว่า $\emptyset \subset A$

<u>พิสูจน์</u> 1) ให้ $\emptyset$ เป็นเซตว่าง และ A เป็นเซตใดๆ
ดังนั้น $\emptyset \subset A$ หรือ $\emptyset \not\subset A$ เป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่ง
เพียงอย่างเดียวเท่านั้น (สัจพจน์ที่ 1)

2) ถ้า $\emptyset \not\subset A$ เป็นจริง นั่นคือเราได้ว่า

$$\exists x \; [\, x \in \emptyset \wedge x \notin A \,] \qquad \text{เป็นจริง}$$

ทำให้ได้ว่า $x \in \emptyset$ เป็นจริง แต่จากนิยามของ
เซตว่าง $x \in \emptyset$ เป็นเท็จ
นั่นคือ $x \in \emptyset$ เป็นจริง และเท็จพร้อมกัน ซึ่งเป็นไป
ไม่ได้ (สัจพจน์ที่ 2)

3) ดังนั้นที่สมมุติให้ $\emptyset \not\subset A$ เป็นจริงเป็นไปไม่ได้

4) จึงได้ว่า $\emptyset \subset A$ เป็นจริง

<u>การพิสูจน์ว่า $\emptyset \subset A$ ของกลุ่มสหัชญาณนิยม</u>

<u>นิยามที่</u> 1 A และ B เป็นเซตใดๆ $A \subset B$ หมายความว่า
สำหรับทุกๆ x ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in B$ เขียนเป็นสัญลักษณ์
สัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ได้ดังนี้

$$A \subset B \equiv \forall x \; [\, x \in A \dashrightarrow x \in B \,]$$

<u>นิยามที่</u> 2 เซตว่างคือ เซตที่ไม่มีสมาชิก เขียนแทนด้วย ϕ หรือ { }
เขียนเป็นสัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์ได้ดังนี้

$$\emptyset \equiv \forall x \; [\, x \notin \emptyset \,]$$

นั่นคือ $x \in \emptyset$ เป็นเท็จ

<u>สิ่งที่ต้องการพิสูจน์</u> จะต้องพิสูจน์ว่า $\emptyset \subset A$

<u>พิสูจน์</u> ให้ ϕ เป็นเซตว่าง และ A เป็นเซตใดๆ

เพราะว่า $\forall x \, [x \in \emptyset \dashrightarrow x \in A]$ เป็นจริงเสมอ

เนื่องจากประพจน์ซึ่งเป็นเหตุ คือ $x \in \emptyset$ เป็นเท็จ

เพราะว่า $\emptyset \subseteq A \equiv \forall x \, [x \in \emptyset \dashrightarrow x \in A]$

นั่นคือ $\emptyset \subset A$ เป็นจริงเสมอ

จากตัวอย่าง จะเห็นว่ากลุ่มสหัชญาณนิยม ยอมรับว่า ถ้าเหตุเป็นเท็จ ผลจะจริงหรือเท็จก็ตาม จะได้ผลสรุปเป็นจริงเสมอ ทำให้สรุปได้ว่า $\forall x \, [x \in \emptyset \dashrightarrow x \in A]$ เป็นจริงเสมอ เพราะ $x \in \emptyset$ เป็นเหตุซึ่งเป็นเท็จ จึงได้ว่า $\emptyset \subset A$ โดยนิยามการเป็นสับเซต

แต่กลุ่มแบบแผนนิยมเห็นว่า เมื่อพิจารณาตามนิยามของการเป็นสับเซต

$$A \subset B \equiv \forall x \, [x \in A \Longrightarrow x \in B]$$

ซึ่งหมายความว่า A เป็นสับเซตของ B ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกๆ x ถ้า x เป็นสมาชิกของ A แล้ว x เป็นสมาชิกของ B คือ สำหรับทุกๆ x ถ้ามี $x \in A$ เป็นจริงแล้วต้องแสดงให้ได้ว่า $x \in B$ ด้วย แต่กรณี ϕ นี้ $x \in \emptyset$ ไม่มีโอกาสเป็นจริง คือ ไม่มี $x \in \emptyset$ จึงไม่ต้องแสดงอะไร เขาเห็นว่านิยามการเป็นสับเซตไม่คลุมกรณีที่ A เป็น ϕ กลุ่มแบบแผนนิยมจึงไม่พอใจในการพิสูจน์ ϕ เป็นสับเซตของทุกๆ เซตของกลุ่มสหัชญาณนิยม เพราะเหมือนไม่ได้ทำอะไรเลย แต่กลุ่มแบบแผนนิยม อาศัยกฎการยกเว้นตัวกลางคือ $A \subset B$ หรือ $A \not\subset B$ ต้องเป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น ดังนั้นผลที่ได้จากนิยามของ $A \subset B$ คือ ถ้า $A \not\subset B$ ก็จะได้ว่า

$$A \not\subset B \equiv \exists x \, [x \in A \wedge x \notin B]$$

ซึ่งอธิบายได้ดังนี้

เพราะว่า นิเสธของ $\forall x [P(x)]$ หรือ $\sim \forall x [P(x)]$ คือ $\exists x [\sim P(x)]$ กรณี $P(x)$ คือ $Q(x) \Longrightarrow R(x)$ จะได้ $\sim P(x)$ คือ $\sim [Q(x) \Longrightarrow R(x)]$ แต่ $\sim [Q(x) \Longrightarrow R(x)]$ คือ $Q(x) \wedge \sim R(x)$ จึงได้ว่า $\sim \forall x [Q(x) \Longrightarrow R(x)]$ คือ $\exists x [Q(x) \wedge \sim R(x)]$ ดังนั้นถ้าแทน $Q(x)$ ด้วย $x \varepsilon A$ และ $R(x)$ ด้วย $x \varepsilon B$ จะได้ $A \not\subset B \equiv \sim \forall x [x \varepsilon A \Longrightarrow x \varepsilon B] \equiv \exists x [x \varepsilon A \wedge x \not\varepsilon B]$ กลุ่มแบบแผนนิยมจึงไปทำการพิสูจน์ว่า

$\emptyset \not\subset A \equiv \exists x [x \varepsilon \emptyset \wedge x \not\varepsilon A]$ เป็นเท็จโดยอาศัย

กฎการขัดแย้ง แล้วมาสรุปว่า $\emptyset \subset A$ เป็นจริงโดยอาศัยกฎการยกเว้นตัวกลาง คือ $\emptyset \subset A$ หรือ $\emptyset \not\subset A$ จะต้องเป็นจริงอย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

แต่กลุ่มสหัชญาณนิยมก็ไม่เห็นด้วยกับการพิสูจน์นี้ เพราะเขาให้เหตุผลว่า การที่รู้ว่า $\emptyset \subset A$ เป็นเท็จก็รู้เพียงเท่านั้น ไม่ได้ทำให้รู้ว่า $\emptyset \subset A$ เป็นจริง เพราะถ้าจะรู้ว่า $\emptyset \subset A$ เป็นจริงก็ต้องพิสูจน์ให้เห็นจริง โดยตัวอย่างเช่นในระบบจำนวน ว่าไม่สามารถสรุปได้เช่น

ถ้า $a + bi$ และ $c + di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน และถ้าสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$a + bi \neq c + di$$

ก็รู้ได้เพียงเท่านั้น (ถ้าใช้ความรู้ระดับชั้นมัธยม) แต่ไม่ได้ทำให้รู้ว่า $a + bi < c + di$ หรือ $a + bi > c+di$ แต่อย่างใด ซึ่งเป็นจุดบกพร่องของการพิสูจน์แบบทางอ้อม และเป็นการให้เหตุผลที่น่าฟังของกลุ่มสหัชญาณนิยม ในการที่ไม่ยอมรับการพิสูจน์ทางอ้อม แต่บางเรื่องกลุ่มสหัชญาณนิยมไม่ยอมรับการพิสูจน์แบบทางอ้อม และกลุ่มสหัชญาณนิยมเองก็ไม่สามารถพิสูจน์เรื่องนั้นได้ ด้วยวิธีการของกลุ่มเขา จึงได้ยอมรับเอาดื้อๆ โดยไม่ต้องทำการพิสูจน์เช่น

การพิสูจน์ว่า ไม่มีจำนวนเฉพาะ (Prime number) ที่ใหญ่ที่สุด กลุ่มแบบแผนนิยมพิสูจน์แบบทางอ้อมดังนี้

ให้ทฤษฎีนี้เป็นเท็จ ดังนั้น

สมมุติให้ มีจำนวนเฉพาะ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (จำกัด)

พิจารณา $N = 1 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots p_n$

จะเห็นได้ว่า N หารด้วย p_1 ไม่ลงตัวเพราะเศษเป็น 1 และทำนองเดียวกัน N ไม่สามารถหารลงตัวด้วย p_i สำหรับ i ใดๆ ดังนั้น N จะต้องเป็นจำนวนเฉพาะอีกจำนวนหนึ่ง หรือไม่ ก็เป็นจำนวนประกอบที่สามารถหารลงตัวด้วย จำนวนเฉพาะอื่นอีก นอกเหนือจาก $p_1, p_2, \ldots, p_n$ คือ มีจำนวนเฉพาะอื่นอีกนอกเหนือจาก $p_1, p_2, \ldots, p_n$ จึงทำให้เกิดการขัดแย้ง จึงสรุปได้ว่า ไม่มีจำนวนเฉพาะที่มากที่สุด

4.2 การพิสูจน์แบบต่างๆ

1. การพิสูจน์ทางตรง (Direct Proof)

การพิสูจน์ทางตรง เป็นการพิสูจน์ข้อความ ซึ่งมักจะอยู่ในลักษณะ P===>Q คือ ต้องการพิสูจน์ว่า P ===> Q เป็นจริง

เมื่อพิจารณาข้อความ P ===> Q เป็นจริง เราทราบแล้วว่า ถ้า P เป็นเท็จก็จะได้ P ===> Q เป็นจริงทันที โดยไม่จำเป็นต้องทราบว่า Q จริง หรือเท็จ แต่ถ้า P เป็นจริง ต้องแสดงให้เห็นว่า Q ต้องเป็นจริงด้วย จึงจะได้ P ===> Q เป็นจริง ดังนั้นการพิสูจน์ว่า P ==>Q เป็นจริง จึงมีงานที่จะทำเพียงอันเดียว คือ กำหนดให้ P เป็นจริง เป็นเหตุ แล้วพยายามนำเหตุผลมาอ้างหาผลสรุปว่า Q เป็นจริงด้วย

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x และ y เป็นจำนวนคู่แล้ว $x + y$ เป็นจำนวนคู่ " เป็นข้อความที่เป็นจริง

<u>พิสูจน์</u> (1) กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนคู่ เป็นจริง ดังนั้น โดยนิยามของจำนวนคู่ได้ว่า $x = 2m$ และ$y = 2n$ โดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็ม

(2) จาก (1) $x + y = 2m + 2n$

และ $x + y = 2(m + 2)$ โดยคุณสมบัติการกระจาย

(3) $x + y$ เป็นจำนวนคู่ เพราะว่า $m + n$ เป็นจำนวนเต็ม ตามคุณสมบัติปิดภายใต้การบวกของจำนวนเต็ม และนิยามของจำนวนคู่ จึงสรุปได้ตามความต้องการ

จะเห็นได้ว่า ในการพิสูจน์ให้ P แทน x และ y เป็นจำนวนคู่เป็นจริงแล้ว เราก็แสดงได้ว่า Q แทน $x + y$ เป็นจำนวนคู่เป็นจริง ก็เสร็จสิ้นการพิสูจน์ P ===> Q เป็นจริง

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว x^2 เป็นจำนวนคู่ด้วย " เป็นข้อความที่เป็นจริง

<u>พิสูจน์</u> (1) กำหนดให้ x เป็นจำนวนคู่เป็นจริง โดยนิยามของจำนวนคู่ จะได้ $x = 2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

(2) จาก (1) โดยนิยามของการคูณของจำนวนเต็ม ได้ว่า $x^2 = 4n^2 = 2(2n^2) = 2m$ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็มอันหนึ่งซึ่ง $m = 2n^2$

(3) จาก (2) $x^2 = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม โดยนิยามของจำนวคู่ ได้ว่า x^2 เป็นจำนวนคู่ จึงได้สิ่งที่ตองการพิสูจน์

ในแผนการพิสูจน์ข้างบน เราให้ P แทน x เป็นจำนวนคู่ Q แทน x^2 เป็นจำนวนคู่ แล้วดำเนินการพิสูจน์โดยให้เหตุ P เป็นจริง แล้วอาศัยนิยาม และคุณสมบัติของจำนวนเต็ม เป็นเหตุให้สรุปผลออกมาได้ว่า Q เป็นจริง จึงเป็นการจบการพิสูจน์

4.2.2 <u>การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่</u>

(Proof by Using Contrapositive)

บางกรณีที่ไม่สามารถพิสูจน์ทางตรงได้ว่า P ===> Q เป็นจริง หรือ พิสูจน์ยากกว่า ก็เลี่ยงไปพิสูจน์ ~ Q ===> ~ P เป็นจริงแทน ซึ่งสามารถทำการพิสูจน์ แบบเดียวกับพิสูจน์ทางตรง เมื่อสามารถพิสูจน์ได้ว่า ~ Q ===> ~ P เป็นจริง ก็สรุปได้เลยว่า P ==> Q เป็นจริง เพราะว่า P ===> Q สมมูลย์กับ ~ Q ===> ~ P หรือ (P ===> Q) <===> (~ Q ===> ~ P) เป็นทอโทโลยี (Tautology)

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว x เป็นจำนวนคี่ด้วย "

<u>การพิสูจน์</u> ข้อความดังกล่าวให้เป็นจริง โดยพิสูจน์ทางตรงลำบากกว่า จึงเลี่ยงไปพิสูจน์ข้อความแย้งสลับที่แทนคือ " ถ้า x เป็นจำนวนคู่แล้ว x^2 เป็นจำนวนคู่ด้วย" ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังตัวอย่างที่ 2

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว x เป็นจำนวนคู่ด้วย

ข้อความแย้งสลับที่ของประโยคนี้คือ " ถ้า x เป็นจำนวนคี่แล้ว x^2 เป็นจำนวนคี่"

<u>พิสูจน์</u> 1) ให้ x เป็นจำนวนคี่ โดยนิยามของจำนวนคี่จะได้ว่า $x = 2n + 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

(2) $x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$

$= 2(2n^2 + 2n) + 1$

โดยนิยามของการคูณ และคุณสมบัติการกระจาย

(3) x^2 เป็นจำนวนคี่ เพราะว่า $2n^2 + 2n$ เป็นจำนวนเต็ม

2. <u>การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof)</u>

<u>หลักการในการพิสูจน์</u>

บางครั้งการพิสูจน์ข้อความ P ===> Q เป็นจริง ไม่สามารถพิสูจน์ได้โดยอาศัยการพิสูจน์แบบทางตรง ดังที่กล่าวมา จึงต้องหาทางพิสูจน์โดยทางอื่น เริ่มด้วย พิจารณาว่า P ===> Q เป็นประพจน์จึงต้องเป็นจริง หรือเท็จ อย่างใดอย่างหนึ่ง

เมื่อพิจารณากรณีที่ P ===> Q เป็นเท็จ จะเห็นว่ามีกรณีเดียว คือ P เป็นจริง Q เป็นเท็จ

ดังนั้นเมื่อสมมุติว่า P===> Q เป็นเท็จก็จะได้ P เป็นจริง และ Q เป็นเท็จ จึงมีผลให้ P เป็นจริง และ $\sim$ Q เป็นจริง

จากข้อความ P เป็นจริงแล้ว $\sim$ Q เป็นจริง ก็นำไปทำการอนุมาน หาข้อความ $S \wedge \sim S$ โดยอาศัยการพิสูจน์ทางตรงก็สามารถสรุปได้ว่า ($P \wedge \sim Q$ เป็นจริง)===> ($S \wedge \sim S$ เป็นจริง) สมเหตุสมผล หรือเป็นจริง

แต่ (S ∧ ∼ S เป็นจริง) เป็นไปไม่ได้ นั่นคือ (S ∧ ∼ S เป็นจริง) เป็นเท็จ จึงมีผลให้ ∼ (S ∧ ∼ S เป็นจริง) เป็นจริงโดย โดยกฎการอนุมานก็จะได้

(P ∧ ∼ Q เป็นจริง) ===> (S ∧ ∼ S เป็นจริง)

∼ (S ∧ ∼ S เป็นจริง) |==== ∼ (P ∧ ∼ Q เป็นจริง)

จึงได้ ∼ (P ∧ ∼ Q เป็นจริง) เป็นจริง

จึงได้ (P ∧ ∼ Q เป็นจริง) เป็นเท็จ

แต่ (P ∧ ∼ Q) <===> ∼ (P ===> Q)

นั่นคือ (P ∧ ∼ Q เป็นจริง) <===> { ∼ (P ===> Q) เป็นจริง }

แต่ { ∼ (P ===> Q) เป็นจริง } <===> {(P ===> Q) เป็นเท็จ }

นั่นคือ (P ∧ ∼ Q) เป็นจริง) <===> {(P ===> Q) เป็นเท็จ }

จึงได้ (P ∧ ∼ Q เป็นจริง) เป็นเท็จ เป็นข้อความเดียวกัน

กับ {(P ===> Q) เป็นเท็จ } เป็นเท็จ

จึงแสดงว่าที่สมมุติว่า P ===> Q เป็นเท็จนั้นเป็นเท็จ

จึงสรุปได้ว่า P ===> Q เป็นจริง

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x^2 เป็นเลขคู่แล้ว x จะเป็นเลขคู่ด้วย "

<u>พิสูจน์</u> (1) สมมุติให้ " ถ้า x^2 เป็นเลขคู่แล้ว x เป็นเลขคู่ " เป็นเท็จ

ก็ได้ " x^2 เป็นเลขคู่ และ x ไม่เป็นเลขคู่ " เป็นจริง

(2) จาก (1) ก็จะได้ x เป็นเลขคี่

(3) จาก (2) และนิยามของเลขคี่ก็จะได้ $x = 2n + 1$

โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม

(4) จาก (3) และนิยามการคูณของจำนวนเต็มก็จะได้

$$x^2 = (2n + 1)^2$$
$$= 4n^2 + 4n + 1$$
$$= 2(2n^2 + 2n) + 1$$
$$= 2m + 1 \quad \text{โดยที่ } m \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$
$$\text{ซึ่ง } m = 2n^2 + 2n$$

(5) จาก (4) และนิยามของเลขคี่ก็จะได้ x^2 เป็นเลขคี่

(6) จาก (5) x^2 ไม่เป็นเลขคู่

(7) จาก (6) และ (1) ก็จะได้ข้อความ $R \wedge \sim R$ คือ " x^2 เป็นเลขคู่ และ x^2 ไม่เป็นเลขคู่ " จึงพบข้อขัดแย้ง จึงทำให้ที่สมมุติ " ถ้า x^2 เป็นเลขคู่แล้ว x เป็นเลขคู่ เป็นเท็จนั้น เป็นไปไม่ได้ จึงแสดงว่า " ถ้า x^2 เป็นเลขคู่แล้ว x เป็นเลขคู่ " เป็นจริง

โดยปกติการพิสูจน์ แบบทางอ้อมจะนิยมเริ่มขั้นที่ (2) โดยละขั้นที่ (1) ไว้ในฐานที่เข้าใจ และเมื่อได้ข้อขัดแย้งก็สรุปได้ว่าที่สมมุติไว้ (2) ไม่จริง จึงสรุปว่าที่ต้องการพิสูจน์ จริง

4.2.4 <u>การพิสูจน์ว่าเท็จโดยอาศัยตัวอย่างค้าน</u>

(Disproof by Counter example)

ส่วนใหญ่มักจะพบว่า ต้องการพิสูจน์ข้อความหรือ ผลสรุปเป็นจริง แต่การพิสูจน์ที่กล่าวถึงนี้ เป็นการพิสูจน์ว่าเป็นเท็จ การพิสูจน์แบบนี้มีความสำคัญมาก ในคณิตศาสตร์สมัยใหม่ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการพิสูจน์ ผลการคาดคะเนต่างๆ ในทางคณิตศาสตร์ ว่าที่คาดคะเนไว้เป็นเท็จ

การพิสูจน์ข้อความ $\forall x\ P(x)$ ว่าเป็นเท็จ ก็คือต้องแสดงว่า

$\sim \forall x\ P(x)$ ว่าเป็นจริง แต่

$\sim \forall x\ P(x)$ สมมูลย์กับ $\exists x \sim P(x)$

นั่นคือ ต้องแสดงว่า $\exists x \sim P(x)$ เป็นจริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 ต้องการพิสูจน์ว่า "ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกแล้ว $x^2 \geq x$ " เป็นเท็จ

การพิสูจน์ คือ การหาตัวอย่างมาขัดแย้งดังนี้

" มีจำนวนจริงบวก x (อย่างน้อยหนึ่งตัว) ซึ่ง $x = \frac{1}{2}$

และ $x^2 < x$ คือ $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ "

จึงแสดงว่า " สำหรับทุก x ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $x^2 \geq x$ " เป็นเท็จ

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 การคาดคะเนของ แฟร์มาต์ (Fermat conjector) กล่าวว่า " ทุกๆ จำนวน F_n ที่อยู่ในรูป $2^m + 1$ โดยที่ $m = 2^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกรวมทั้งศูนย์ เป็นจำนวนเฉพาะ" ข้อความดังกล่าวนี้ นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ แฟร์มาต์ คาดคะเนไว้ว่าเป็นจริง

พิจารณาตรวจสอบสำหรับ n บางค่าของ $F_n = 2^m + 1$

เมื่อ $n = 0$ $F_0 = 2 + 1 = 3$

$n = 1$ $F_1 = 2^2 + 1 = 5$

$n = 2$ $F_2 = 2^4 + 1 = 17$

$n = 3$ $F_3 = 2^8 + 1 = 257$

$n = 4$ $F_4 = 2^{16} + 1 = 65,537$

จะเห็นว่า ทุกกรณีของ n ที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 4 , F_n เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นจึงมีความเชื่ออย่างมากว่า การคาดคะเนเป็นจริง แต่นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส ชื่อ ออยเลอร์ (Euler (1707 - 1783)) สามารถพิสูจน์ได้ว่าเป็นเท็จ โดยยกตัวอย่างมาค้านดังนี้

มีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง n = 5 และ $F_5 = ((2)^2)^5 + 1$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะว่า

$$\begin{aligned} F_5 &= (2)^{2^5} + 1 \\ &= 2^{32} + 1 \\ &= 4,294,967,297 \\ &= 641 \times 6,700,417 \end{aligned}$$

ซึ่ง F_5 สามารถหารด้วย 641 ลงตัว จึงทำให้การคาดคะเนของแฟร์มาต์ผิดไป เพราะตัวอย่างค้านเพียงตัวอย่างเดียว

4.3.5 <u>การพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่ง (Proof of Existency)</u>

การพิสูจน์มีอย่างน้อยหนึ่ง มีความจำเป็นมากในคณิตศาสตร์ระดับสูง เพราะการพิสูจน์ดังกล่าว เป็นการยืนยันว่าเหตุการณ์นั้นมีจริงเสียก่อน เพื่อจะได้ดำเนินการศึกษาต่อไปได้ เช่นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อเกาส์ (Gauss) ได้เคยพิสูจน์ไว้แล้วว่า สมการโพลิโนเมียล จะต้องมีรากของสมการอย่างน้อยหนึ่งอัน คือ

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_o = 0$ โดยที่ $a_o, a_1, a_2, \ldots$

a_n เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $a_n \neq 0$ และ $n = 1,2,3,...$ สมการดังกล่าวนี้จะต้องมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งตัว หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งว่า จะต้องมีจำนวนเชิงซ้อน x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่งสอดคล้องกับสมการดังกล่าว *

หลักการในการพิสูจน์มีอย่างน้อยหนึ่ง คือ การพิสูจน์ข้อความ $\exists x\ P(x)$ เป็นจริง ในการดำเนินการพิสูจน์จำเป็นต้องหามาให้ได้ว่า ในเอกภพสัมพันธ์ของ x ต้องมี x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่งสอดคล้องกับ $P(x)$ เช่นต้องการพิสูจน์ว่า " มีจำนวนจริง x อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่ง $x^2 = x$ " เป็นจริง

การพิสูจน์ก็สามารถทำได้ โดยการหาจำนวนจริงดังกล่าวมา คือ $x = 1$ ก็จะได้ $1^2 = 1$

การพิสูจน์ดังกล่าวนี้ ได้ถูกนำมาใช้ในระบบสัจพจน์ของเซต ระบบสัจพจน์ของจำนวน ซึ่งจะอยู่ในรูปของการยกตัวอย่างการมีปรากฏขึ้นก่อนมีการนิยาม หรืออยู่ในรูปทฤษฎีนำก่อนที่จะมีทฤษฎีบทต่อไป และการพิสูจน์ดังกล่าวนี้ บางครั้งถูกเห็นว่าไม่เป็นการพิสูจน์

---

* รายละเอียดการพิสูจน์ ศึกษาได้จาก

Caurant and Robbins 1941 PP. 101, 269

4.2.6 การพิสูจน์ว่าเป็นไปไม่ได้ที่จะเกิดขึ้น(Proof of Impossible)

ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ บางปัญหานักคณิตศาสตร์ได้พยายามหาทางแก้ปัญหาเหล่านั้นเสียนาน โดยลืมหาทางพิสูจน์ว่าปัญหาดังกล่าวนั้น ไม่มีทางแก้ได้ ดังตัวอย่างเช่น

ปัญหาการแบ่งมุมออกเป็นสามส่วนเท่ากัน โดยใช้วงเวียนและไม้บรรทัด ปัญหาอันนี้นักคณิตศาสตร์ได้พยายามหาทางแบ่งมาเป็นเวลาหลายพันปี จนกระทั่งนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อแกลัวร์ (Galois) (1811 - 1832) สามารถพิสูจน์ได้ว่า " ไม่มีวิธีทั่วไปสำหรับแบ่งมุมออกเป็นสามส่วนเท่ากันได้ โดยอาศัยไม้บรรทัด และวงเวียน " *

ตัวอย่างที่เป็นปัญหาที่นักเรียนในชั้นมัธยมได้พบคือ "ไม่มีจำนวนตรรกยะ x ซึ่ง $x^2 = 2$ " หรือการพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

กรีกสมัยก่อน ปีทาโกรัส (Pythagorus ประมาณ 540 ปี ก่อน ค.ศ.) มีความเชื่อว่า จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ จึงทำให้เชื่อว่ามีจำนวนจริง x ซึ่ง $x^2 = 2$ ได้ด้วย จนกระทั่งกลุ่มปีทาโกรัสเองได้พิสูจน์ว่า เป็นไปไม่ได้ ที่จะมีจำนวนตรรกยะ x ซึ่ง $x^2 = 2$ และเรียกจำนวน x ซึ่ง $x^2 = 2$ ว่าเป็นจำนวนอตรรกยะ ดังมีรายละเอียดในการพิสูจน์ดังนี้

ให้ (1) $x = \frac{a}{b}$, a , b เป็นจำนวนเต็มบวกและ

ห.ร.ม.ของ a และ b เท่ากับ 1

$b \neq 0$

---

*รายละเอียดศึกษาเพิ่มเติมได้จากเอกสารภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ เรื่อง คู่มือประกอบหน่วยการเรียนการสอน MATH 795(II) ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2524

(2) ดังนั้น $\frac{a^2}{b^2} = 2$ และได้ $a^2 = 2b^2$

(3) จาก (2) a^2 เป็นเลขคู่ ดังนั้น a เป็นเลขคู่ด้วย

(4) จาก (3) ให้ $a = 2c$, c เป็นจำนวนเต็ม

(5) จาก (2) โดยการแทนค่าของ $a = 2c$ จะได้ $(2c)^2 = 2b^2$

จึงได้ $2c^2 = b^2$

(6) ดังนั้นจึงได้ว่า b^2 เป็นเลขคู่ ทำให้ได้ว่า b เป็นเลขคู่

(7) จาก (3) และ (6) ดังนั้น 2 จึงเป็น ห.ร.ม.ของ a และ b จึงขัดแย้งกับที่เราให้ว่า ห.ร.ม.ของ a และ b เท่ากับ 1

(8) ดังนั้นที่สมมุติว่ามีจำนวนตรรกยะ $x = \frac{a}{b}$ ซึ่ง $x^2 = 2$ จึงเป็นเท็จ

นั่นคือ ไม่มีจำนวนตรรกยะใด ซึ่ง $x^2 = 2$

หรือกล่าวว่า $\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

อีกตัวอย่างหนึ่ง คือ ปัญหาซึ่งนักคณิตศาสตร์ ได้หลงคิดมานานคือ การหาสูตรทั่วไปเพื่อหารากของสมการโพลิโนเมียลกำลังต่างๆ เพราะทราบว่า สมการโพลิโนเมียลกำลังสอง

$ax^2 + bx + c = 0$ มีสูตรทั่วไป คือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

จึงทำให้มีการพยายามหารากของสมการในรูป

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_o = 0$ ควรจะได้ $x = ?$

ปัญหาดังกล่าวนี้ ได้มีนักคณิตศาสตร์ชาวนอร์เวย์ชื่อ นีลส์เฮนริกอาเบล (Niels Henrik Abel 1802 - 1829) สามารถพิสูจน์ได้ว่าไม่มีสูตรทั่วไปในการหารากของสมการโพลิโนเมียลดังกล่าว ซึ่งมีกำลังมากกว่าสี่ * ผลจากการพิสูจน์ดังกล่าวนี้ มีผลให้ไม่สามารถหาสูตร ของรากทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) ซึ่งมีออร์เดอร์ (order) ตั้งแต่ห้าขึ้นไปได้

หลักการในการพิสูจน์ว่า เป็นไปไม่ได้ที่จะเกิดขึ้นคือ การพิสูจน์ว่า

$\sim \exists x\ P(x)$ เป็นจริง หรือ $\forall x\ P(x)$ เป็นเท็จ

นั่นเอง คือ $\exists x\ P(x)$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งขึ้นในระบบ

จึงทำให้ $\exists x\ P(x)$ เป็นเท็จ จึงได้ว่า $\sim \exists x\ P(x)$ เป็นจริง

4.2.7 <u>การพิสูจน์โดยการกำจัดกรณีที่ไม่ต้องการออก</u>

<u>หลักการในการพิสูจน์</u>

สมมุติว่าต้องการพิสูจน์ว่า $P \Longrightarrow A$ เป็นจริง แต่ทราบมาก่อนแล้วว่า $P \Longrightarrow (A \vee B)$ เป็นจริง และ $P \Longrightarrow \sim B$ เป็นจริง ก็สามารถหาทางพิสูจน์ โดยอาศัยกฎการอนุมานดังนี้คือ

เนื่องจากการพิสูจน์ว่า $P \Longrightarrow A$ เป็นจริง มีงานที่จะต้องทำคือ ถ้า P เป็นจริง ต้องแสดงให้ได้ว่า A เป็นจริง

จากเหตุ P เป็นจริง และ $P \Longrightarrow \sim B$ เป็นจริง ทำให้ได้ว่า $\sim B$ เป็นจริง (กฎการแจงผลตามเหตุ) เขียนเป็นสัญลักษณ์

ดังนี้ $P,\ P \Longrightarrow \sim B \models\!\!=\!= \sim B$

และ P เป็นจริง และ $P \Longrightarrow (A \vee B)$ เป็นจริง ก็ได้ $A \vee B$

---

* รายละเอียดศึกษาเพิ่มเติมได้จาก เอกสารภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ เรื่อง คู่มือประกอบหน่วยการเรียนการสอน MATH 795 (II) ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2524

เป็นจริงทำนองเดียวกัน $P, P \Longrightarrow (A \vee B) \models A \vee B$

จาก $\sim B$ เป็นจริง และ $A \vee B$ เป็นจริง จึงได้ว่า B เป็นเท็จ

ดังนั้น A เป็นจริง $\sim B, A \vee B \models A$

จึงสรุปได้ว่า ถ้า P เป็นจริงแล้ว A เป็นจริงด้วย

นั่นคือ $P \Longrightarrow A$ เป็นจริง

ในทำนองเดียวกัน เมื่อทราบว่า $P \Longrightarrow (A \vee B \vee C \ldots \vee S)$ เป็นจริง และทราบว่า $P \Longrightarrow \sim B$, $P \Longrightarrow \sim C, \ldots, P \Longrightarrow \sim S$ ต่างก็เป็นจริง ก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า $P \Longrightarrow A$ เป็นจริงได้เช่นเดียวกัน

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า xy เป็นจำนวนคี่ แล้ว x และ y ต่างก็เป็นจำนวนคี่ "

<u>พิสูจน์</u> (1) กำหนดให้

P : xy เป็นจำนวนคี่

A : x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคี่

B : x เป็นจำนวนคี่ และ y เป็นจำนวนคู่

C : x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคี่

D : x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคู่

(2) จาก (1) และจากความน่าจะเป็นของการคูณจำนวนเต็มก็จะได้ $P \Longrightarrow (A \vee B \vee C \vee D)$ เป็นจริง

(3) จากเหตุ P เป็นจริง

(4) จาก (2) และ (3) โดยใช้กฎการอนุมาน

$P, P \Longrightarrow (A \vee B \vee C \vee D) \models A \vee B\ C \vee D$

(5) จาก (3) และคุณสมบัติการคูณจำนวนเต็ม สรุปได้ว่าเมื่อ P จริง B, C, D ต้องเป็นเท็จ จึงได้ $\sim B, \sim C, \sim D$ ต่างก็เป็นจริง

(6) จาก (4) และ (5) ก็จะเป็นไปตามกฎการอนุมาน

$\sim D, A \vee B \vee C \vee D \models\!=\!=\!= A \vee B \vee C$

$\sim C, A \vee B \vee C \models\!=\!=\!= A \vee B$

$\sim B, A \vee B \models\!=\!=\!= A$

(7) จาก (3) และ (6) ได้ว่า $P \Longrightarrow A$ เป็นจริง

ในการพิสูจน์โดยทั่วไป เมื่อได้ขั้นที่ (5) คือ B, C, D ต่างก็เป็นเท็จ ก็สรุปว่า A เป็นจริงได้เลย

4.2.8 การพิสูจน์โดยยกทุกกรณี (Proof by Case)

หลักการในการพิสูจน์

สมมุติว่าต้องการพิสูจน์ $P \Longrightarrow Q$ เป็นจริง และทราบมาก่อนแล้วว่า $P \Longrightarrow (A \vee B)$, $A \Longrightarrow Q$ และ $B \Longrightarrow Q$ ต่างก็เป็นจริง ก็จะได้

$$A \Longrightarrow Q \text{ , } B \Longrightarrow Q \models\!=\!= (A \vee B) \Longrightarrow Q$$

$$P \Longrightarrow (A \vee B) \text{ , } (A \vee B) \Longrightarrow Q \models\!=\!= P \Longrightarrow Q$$

ตัวอย่าง ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว $x^2 + x$ จะต้องเป็นเลขคู่ "

พิสูจน์ (1) กำหนดให้

P : x เป็นจำนวนเต็ม

Q : $x^2 + x$ เป็นเลขคู่

A : x เป็นเลขคู่

B : x เป็นเลขคี่

(2) จาก (1) P ===> A V B เป็นจริง ตามคุณสมบัติของจำนวนเต็ม

(3) จากคุณสมบัติของเลขคู่ ถ้า x เป็นเลขคู่ แล้วจะได้ x^2 เป็นเลขคู่ และ $x^2 + x$ เป็นเลขคู่ด้วย

(4) จากคุณสมบัติของเลขคี่ ถ้า x^2 เป็นเลขคี่ จะได้ x เป็นเลขคี่ และ $x^2 + x$ เป็นเลขคู่

(5) จาก (3) และ (4) ก็จะได้ A ===> Q และ B ===> Q เป็นจริง จึงได้ A V B ===> Q เป็นจริง

(6) จาก (1) และ (5) ก็จะได้

P ===> (A V B) , (A V B) ===> Q |=== P ===> Q

(7) จึงแสดงว่า P ===> Q เป็นจริงตามต้องการ

สำหรับการพิสูจน์โดยทั่วไปแล้ว เมื่อได้ขั้นที่ (2), (3) และ (4) ก็สรุปได้เลยว่า ทฤษฎีนี้เป็นจริง

4.2.9 <u>การพิสูจน์เงื่อนไขไปกลับ (Biconditional Proof)</u>

<u>หลักการในการพิสูจน์</u>

ในบางครั้ง ต้องการพิสูจน์ข้อความซึ่งอยู่ในรูป P<===> Q แต่เราทราบว่า

(P<===>Q) <===> (P ===> Q) $\wedge$ (Q ===> P)

ดังนั้นในการดำเนินการพิสูจน์ จึงทำการพิสูจน์ P ===> Q และพิสูจน์ Q ===> P ซึ่งการพิสูจน์ดังกล่าวก็ดำเนินการพิสูจน์ โดยวิธีการที่กล่าวมาข้างต้น

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการพิสูจน์ว่า " x เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ $x + 2$ เป็นเลขคู่ " เป็นจริง

<u>วิธีทำ</u> เราต้องพิสูจน์ว่า

ก. ถ้า x เป็นเลขคู่ แล้ว $x + 2$ เป็นเลขคู่

ข. ถ้า $x + 2$ เป็นเลขคู่ แล้ว x เป็นเลขคู่

<u>พิสูจน์</u> ก.

1) ให้ x เป็นเลขคู่ ดังนั้นจะได้ $x = 2m$, m เป็นจำนวนเต็ม โดยนิยามของเลขคู่

2) จาก (1) $x + 2 = 2m + 2$

$= 2(m + 1)$ คุณสมบัติของการกระจาย

3) จาก (2) $x + 2$ เป็นเลขคู่ เพราะว่า $(m + 1)$ เป็นจำนวนเต็ม

ข.

1) ให้ $x + 2$ เป็นเลขคู่ ดังนั้น $x + 2 = 2n$, n เป็นจำนวนเต็ม

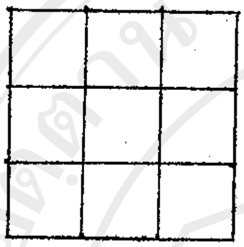
2) จาก (1) $x = 2n - 2 = 2(n - 1)$

3) จาก (2) x เป็นเลขคู่ เพราะ $(n - 1)$ เป็นจำนวนเต็ม

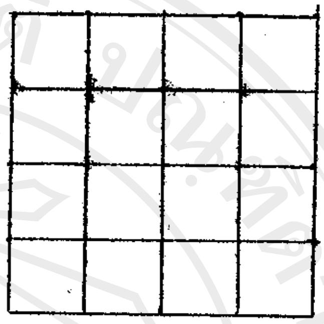
นั่นคือ " x เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ $x + 2$ เป็นเลขคู่ " เป็นจริง

<u>พิจารณาปัญหาต่อไปนี้</u>

ให้หา จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในแต่ละรูปต่อไปนี้



ก. 3 x 3



ข. 4 x 4

และจะมีสี่เหลี่ยมจัตุรัสกี่รูปใน รูป 8 x 8

พิจารณา รูป ก. จะเห็นได้ว่ามีจัตุรัสขนาด 1 x 1 จำนวน 9 รูป

จัตุรัสขนาด 2 x 2 จำนวน 4 รูป

จัตุรัสขนาด 3 x 3 จำนวน 1 รูป

ดังนั้น รูป ก (3 x 3) จะมีจัตุรัสทั้งหมด $3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$ รูป

รูป ข (4 x 4) จะได้ว่ามีจัตุรัสขนาด 1 x 1 จำนวน 16 รูป

จัตุรัสขนาด 2 x 2 จำนวน 9 รูป

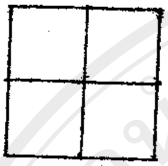
จัตุรัสขนาด 3 x 3 จำนวน 4 รูป

จัตุรัสขนาด 4 x 4 จำนวน 1 รูป

ดังนั้นรูป ข. (4 x 4) จะมีจัตุรัสทั้งหมด $4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 30$ รูป

ดังนั้นในรูปขนาด 8 x 8 น่าจะมีจัตุรัสทั้งหมด $8^2 + 7^2 + \ldots + 1^2 = 204$ รูป

และในรูปขนาน $n \times n$ จะมีจัตุรัสทั้งหมด $n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1^2$ หากว่า ที่สรุปผลโดยการคาดคะเนดังกล่าวเป็นจริง ก็สามารถบอกได้ว่าในรูป 2x2 จะมีจัตุรัสอยู่ $2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$



และในรูป 5x 5 จะมีจัตุรัสอยู่

25 + 16 + 9 + 4 + 1 รูป

ปัญหา คือ จะหาคำตอบว่า ใน $n \times n$ รูปจะมีสี่เหลี่ยมจัตุรัสอยู่เท่ากับ $n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 2 + 1$ รูป ซึ่งคือ การหาค่าของ Σn^2 นั่นเอง

<u>พิจารณา</u>

n	1	2	3	4	5	6	...
$1 + 2 + 3 + \cdots + n$	1	3	6	10	15	21	...
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$	1	5	14	30	55	91	...

หาอัตราส่วน

n	1	2	3	4	5	6	...
$\dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{1 + 2 + \cdots + n}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	...

หรือจะเขียนอัตราส่วนใหม่เป็น $\frac{3}{3}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{9}{3}$ $\frac{11}{3}$ $\frac{13}{3}$ ...

จึงเกิดการคาดคะเนว่า

$$\frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{1 + 2 + \cdots + n} = \frac{2n+1}{3}$$

ดังนั้นจึงได้ว่า $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

เพราะว่า $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$

ขั้นต่อไปคือ การพิสูจน์ให้เห็นจริงว่า

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

สำหรับ n ซึ่งเป็นจำนวนธรรมชาติ จึงทำให้เกิดการพิสูจน์ โดยอาศัยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์

4.2.10 <u>การพิสูจน์โดยอาศัยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์</u>
(Proof by Mathematical Induction)

จากที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าบางครั้ง จำเป็นต้องพิสูจน์ข้อความ $\forall n\, P(n)$ เป็นจริงโดยที่ n มีเอกภพสัมพัทธ์ เป็นจำนวนธรรมชาติ และไม่สามารถนำวิธีการพิสูจน์แบบที่กล่าวมาข้างต้นมาใช้ได้

<u>ตัวอย่างที่</u> 1 ต้องการพิสูจน์ว่า

$$P(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

เป็นจริง สำหรับทุกๆ จำนวนธรรมชาติ n

<u>พิสูจน์</u> พิจารณา

$$P(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2} \quad \text{เป็นจริง}$$

$$P(2) = 1 + 2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}$$ เป็นจริง

$$P(3) = 1 + 2 + 3 = 6 = \frac{3(3+1)}{2}$$ เป็นจริง

$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$

$$P(k) = 1 + 2 + 3 + \ldots + k$$

$$= \frac{k(k+1)}{2}$$ หรือไม่

ปัญหานี้มีทางทดสอบได้ก็โดย

ถ้าสมมุติว่า $P(k) = \frac{k(k+1)}{2}$ เป็นจริง

ก็น่าจะมีผลทำให้ $P(k+1) = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}$ เป็นจริงด้วย

แต่

$$P(k+1) = P(k) + k + 1$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$= k(k+1) + 2(k+1)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}}{2}$$

นั่นคือ ถ้า $P(k)$ เป็นจริงแล้ว มีผลบังคับให้ $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

โดยมีกระบวนการเป็นดังนี้

$$P(1) \models\!=\!=\!= P(2)$$

$$P(2) \models\!=\!=\!= P(3)$$

$$P(3) \models\!=\!=\!= P(4)$$

$$\vdots$$

$$P(k) \models\!=\!=\!= P(k+1)$$

$$\vdots$$

จึงพอสรุปเป็นหลักการในการพิสูจน์ เป็นขั้นตอนดังนี้

1) ต้องแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง
2) เมื่อให้ $P(k)$ เป็นจริง ต้องแสดงว่า $P(k)$ มีผลบังคับให้ $P(k + 1)$ เป็นจริงด้วย

เมื่อ เป็นจริงทั้ง (1) และ (2) ก็สรุปว่าเป็นจริงทุกจำนวนธรรมชาติ

<u>ตัวอย่างที่</u> 2 ต้องการพิสูจน์ว่า

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $P(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(1) $P(1) = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$ เป็นจริง

(2) ให้ $P(k) = 1^2 + 2^2 + \dots + k^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$ เป็นจริง

ต้องแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย คือแสดงว่า

$$P(k+1) = \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

เพราะว่า $P(k+1) = P(k) + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\quad 2k^2 + k + 6k + 6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\quad 2k^2 + 7k + 6}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}$$

แสดงว่า $P(k)$ มีผลบังคับให้ $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้นจึงเป็นจริง ทุกจำนวนธรรมชาติ n

คือ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ จริง