บทที่ 5

การเสนอแนะแนวการเรียนการสอนในชั้นมัธยมศึกษา และอุดมศึกษาตอนต้น

ในการเรียนการสอนเรื่อง การพิสูจน์ในชั้นมัธยมศึกษา เดิมเป็นการพิสูจน์ในวิชาเรขาคณิต ในคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่สาม (ม.3) ของสถาบันส่งเสริม-การสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้นำเอาเรื่องของจำนวนมาบรรจุด้วย ในการสอนเรื่องการพิสูจน์ แต่ก็ยังน้อยมากและเนื้อหาเรขาคณิตก็ถูกตัดทอนไป ทำให้เนื้อหาเรื่องการพิสูจน์ไม่ต่อเนื่องกัน การสอนเรื่องการพิสูจน์โดยใช้เรขาคณิตนั้น การอ้างเหตุผลในแต่ละขั้นตอนเข้าใจได้ง่าย ทั้งยังมีรูปและบางครั้งมีการสร้างช่วยในการพิสูจน์ อาจทำให้เกิดความเคยชิน และยึดเหนี่ยวอยู่กับรูปธรรม จนนำเอาสามัญสำนึกและประสาทสัมผัสไปใช้ในการพิสูจน์ แต่คณิตศาสตร์ปัจจุบันเน้นเรื่องโครง-สร้าง (Structure) คือ สอนคณิตศาสตร์เรื่องต่างๆ เป็นระบบสัจพจน์ (Axiomatic System)

สำหรับการสอนเรื่องการพิสูจน์ต่อไปนี้ ผู้เขียนจะใช้ความรู้เกี่ยวกับระบบจำนวนมาใช้สอน เพราะนักเรียนมีความคุ้นเคยกับระบบจำนวนมา ซึ่งจะทำให้เข้าใจการพิสูจน์ได้ง่าย เมื่อเข้าใจการพิสูจน์ดีพอ จึงนำไปใช้สอนในเรื่องอื่นๆ ได้

ในที่นี้ผู้เขียนจะเสนอการสอนการพิสูจน์ทางตรงควบคู่ ไปกับการพิสูจน์ทางอ้อม จนคุ้นเคยการพิสูจน์ทางอ้อมแล้ว จึงนำไปสู่การพิสูจน์ที่สามารถพิสูจน์แบบทางอ้อมได้เพียงอย่างเดียว ซึ่งผู้เขียนมั่นใจว่า จะเป็นวิธีหนึ่งทำให้นักเรียนนักศึกษา เข้าใจการพิสูจน์ได้ดีขึ้น

ในการที่จะให้เหตุผลว่า ข้อความ " ถ้า P แล้ว Q " ($P \Longrightarrow Q$) เป็นจริง หรือสมเหตุสมผล <u>เรียกว่าการพิสูจน์</u> เช่น ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x และ y เป็นจำนวนคี่แล้ว $x + y$ เป็นจำนวนคู่ " เป็นข้อความที่เป็นจริง

5.1 การพิสูจน์ทางตรง (Direct Proof)

ในการพิสูจน์ทางตรง ส่วนใหญ่จะเป็นการพิสูจน์ข้อความ ซึ่งอยู่ในรูปของ P ===> Q โดยต้องการพิสูจน์ว่า P ===> Q เป็นจริง

ในการแสดงว่า P ===> Q เป็นจริง ต้องแสดงให้เห็นจริงว่า ถ้า P เป็นจริงแล้ว ต้องได้ว่า Q เป็นจริง เพียงกรณีเดียว เพราะถ้า P เป็นเท็จ จะได้ว่า P ===> Q เป็นจริง โดยไม่จำเป็นต้องทราบว่า เป็นจริง หรือเท็จ

ตัวอย่างต่อไปนี้ จะใช้คุณสมบัติพื้นฐานเกี่ยวกับระบบจำนวน ซึ่งนักเรียนคุ้นเคยมาแล้ว มาใช้สอนเรื่องการพิสูจน์ โดยจะกล่าวถึง คุณสมบัติของจำนวนเต็ม คุณสมบัติของจำนวนตรรกยะ และคุณสมบัติของจำนวนจริงเพียงบางอัน เฉพาะที่จะนำมาใช้ในการพิสูจน์เท่านั้น

นักเรียนทราบดีแล้วว่า เซตของจำนวนเต็มคือ

$$I = \{ \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$$

<u>พิจารณาจำนวนเต็มเหล่านี้</u> คือ

0 มีจำนวนเต็ม 0 ซึ่งทำให้ $0 = 2 \times 0$

2 มีจำนวนเต็ม 1 ซึ่งทำให้ $2 = 2 \times 1$

-2 มีจำนวนเต็ม -1 ซึ่งทำให้ $-2 = 2 \times (-1)$

4 มีจำนวนเต็ม 2 ซึ่งทำให้ $4 = 2 \times 2$

-4 มีจำนวนเต็ม -2 ซึ่งทำให้ $-4 = 2 \times (-2)$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

<u>และพิจารณาอีกพวกหนึ่งคือ</u>

1 มีจำนวนเต็ม 0 ซึ่งทำให้ $1 = (2 \times 0) + 1$

-1 มีจำนวนเต็ม -1 ซึ่งทำให้ $-1 = 2 \times (-1) + 1$

3 มีจำนวนเต็ม 1 ซึ่งทำให้ $3 = (2 \times 1) + 1$

-3 มีจำนวนเต็ม -2 ซึ่งทำให้ $-3 = 2 \times (-2) + 1$

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

จึงนิยามจำนวนเต็มคู่ และจำนวนเต็มคี่ได้ดังนี้

<u>นิยามที่</u> 1 สำหรับจำนวนเต็ม x ใดๆ x เป็นจำนวนเต็มคู่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $x = 2k$

ดังนั้นจึงเขียนเซตของจำนวนเต็มคู่ได้ดังนี้

$$E = \{ \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots \}$$

<u>นิยามที่</u> 2 สำหรับจำนวนเต็ม x ใดๆ x เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $x = 2k + 1$

จึงเขียนเซตของจำนวนเต็มคี่ได้ดังนี้

$$O = \{ \ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots \}$$

จึงได้ว่า

$$I = E \cup O \quad \text{และ} \quad E \cap O = \emptyset$$

นั่นคือ <u>เซตของจำนวนเต็มแบ่งออกเป็นจำนวนเต็มคู่ และจำนวนเต็มคี่เท่านั้น ไม่มีจำนวนเต็มใดที่เป็นทั้งจำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่</u>

(ต่อไปจะใช้คุณสมบัติของจำนวนเต็มอันนี้ไปใช้ในการพิสูจน์ด้วย)

การยกกำลังของจำนวนเต็ม

นักเรียนทราบมาแล้วว่าสัญลักษณ์ ที่แทนจำนวนที่คูณตัวมันเองหลายๆ ครั้ง เช่น

แทน $2 \times 2 \times 2$ ด้วย 2^3

$3 \times 3 \times 3 \times 3$ ด้วย 3^4

จึงนิยามการยกกำลังของจำนวนเต็มได้ดังนี้

นิยามที่ 3 สำหรับจำนวนเต็ม x ใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \qquad (n \text{ ตัว})$$

คุณสมบัติของจำนวนเต็มบางประการ)

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนเต็มแล้ว

1. $a + b$ เป็นจำนวนเต็ม (คุณสมบัติปิดภายใต้การบวก)
   เช่น $2 + 3 = 5$ ซึ่ง 5 เป็นจำนวนเต็ม
2. $a \cdot b$ เป็นจำนวนเต็ม (คุณสมบัติปิดภายใต้การคูณ)
   เช่น 2 และ 3 เป็นจำนวนเต็ม $2 \times 3 = 6$ ซึ่ง 6 เป็นจำนวนเต็ม
3. $a + b = b + a$ (คุณสมบัติสลับที่ภายใต้การบวก)
   เช่น $2 + 1 = 1 + 2$
4. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (คุณสมบัติการจัดหมู่ภายใต้การบวก) เช่น $2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$
5. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (คุณสมบัติการกระจาย)
   เช่น $2 \times (3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$
6. ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ (คุณสมบัติสมมาตร) การเท่ากันดังกล่าว สามารถแทนกันได้ทุกกรณี
7. ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ (คุณสมบัติถ่ายทอด) การเท่ากันดังกล่าว สามารถแทนกันได้ทุกกรณี

8. ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$ (คุณสมบัติของการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน)

9. มีจำนวนเต็ม 0 ซึ่งถ้า a เป็นจำนวนเต็มใดๆ แล้ว $a + 0 = a = 0 + a$ (เอกลักษณ์สำหรับการบวก)

10. ถ้า a เป็นจำนวนเต็มใดๆ จะมีจำนวนเต็ม ซึ่งทำให้ $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ (อินเวอร์ส สำหรับการบวก)

11. ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$ (คุณสมบัติการตัดออกสำหรับการบวก)

12. ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$ (คุณสมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ)

<u>จำนวนตรรกยะ</u>

นักเรียนทราบมาแล้วว่า จำนวนตรรกยะ ประกอบด้วย จำนวนเต็ม และจำนวนเศษส่วน

$\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ และ $\frac{3}{6}$ เป็นเศษส่วนที่มีลักษณะแตกต่างกัน แต่เป็นจำนวนตรรกยะตัวเดียวกัน คือ $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{2}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำที่สุดของ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ และ $\frac{3}{6}$

ส่วนจำนวนเต็ม เช่น 3 ก็มีความหมายเดียวกันกับ จำนวนตรรกยะที่อยู่ในรูปของ $\frac{3}{1}$ หรือ $\frac{6}{2}$ หรือ $\frac{12}{4}$ และ $\frac{3}{1}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

จึงนิยามจำนวนตรรกยะดังนี้

<u>นิยามที่</u> 4 ก. x เป็นจำนวนตรรกยะใดๆ ก็ต่อเมื่อ $x = \frac{a}{b}$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$

ข. $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำที่สุด ก็ต่อเมื่อไม่มีจำนวนเต็มใดๆ

หาร a และ b ได้ลงตัว ยกเว้น ± 1

พิจารณาการเท่ากัน การบวก การคูณ ของเศษส่วน ซึ่งนักเรียนเคยทราบมาแล้ว

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ เพราะ $1 \times 4 = 2 \times 2$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6}$$

$$= \frac{7}{6}$$

$$= \frac{(1)(3) + (2)(2)}{2 \times 3}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1 \times 3}{2 \times 5}$$

$$= \frac{3}{10}$$

<u>นิยามที่</u> 5 สำหรับจำนวนตรรกยะ $\frac{a}{b}$ และ $\frac{c}{d}$

ก. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ก็ต่อเมื่อ $ad = bc$

โดยที่ $ad = bc$ เป็นคุณสมบัติของจำนวนเต็ม

ข. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

โดยที่ $ad + bc$ และ bd เป็นคุณสมบัติของจำนวนเต็ม

ค. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

โดยที่ ac และ bd เป็นคุณสมบัติของจำนวนเต็ม

การเท่ากันใน ก, ข และค สามารถแทนกันได้ทุกกรณี

<u>นิยามที่</u> 6 สำหรับจำนวนตรรกยะ x ใด ๆ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (n ตัว)

<u>คุณสมบัติบางประการของจำนวนตรรกยะ</u>

ถ้า $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ และ $\frac{e}{f}$ เป็นจำนวนตรรกยะใดๆ

1. $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$ (คุณสมบัติการจัดหมู่สำหรับการบวก)

2. มี $\frac{0}{1}$ เป็นจำนวนตรรกยะ สำหรับ $\frac{a}{b}$ เป็นจำนวนตรรกยะใดๆ แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$ (เอกลักษณ์การบวก)

3. ถ้า $\frac{a}{b}$ เป็นจำนวนตรรกยะใดๆ จะต้องมีจำนวนตรรกยะ $-\frac{a}{b}$ ซึ่งทำให้ $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{1}$ (อินเวอร์สการบวก)

4. ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ (คุณสมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน)

<u>จำนวนจริง</u>

นักเรียนทราบแล้วว่า เซตของจำนวนจริงประกอบด้วย จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ จึงนิยามเซตของจำนวนจริงได้ดังนี้

<u>เซตของจำนวนจริง</u> คือ ยูเนียนของเซตของจำนวนตรรกยะ กับ เซตของจำนวนอตรรกยะเท่านั้น

อินเตอร์เซกชันของ เซตของจำนวนตรรกยะ กับเซตของจำนวนอตรรกยะ เป็นเซตว่าง

นั่นคือ ไม่มีจำนวนจริงใด ที่เป็นทั้งจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.1 ต้องการพิสูจน์ว่า

" ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว $x + 2$ เป็นจำนวนเต็มคี่ " เป็นจริง

<u>พิสูจน์</u> ให้ P : x เป็นจำนวนเต็มคี่

Q : $x + 2$ เป็นจำนวนเต็มคี่

(นั่นคือ ต้องการพิสูจน์ $P \Longrightarrow Q$ เป็นจริง)

1.	x เป็นจำนวนเต็มคี่	กำหนดให้ เหตุ P เป็นจริง
2.	$x = 2k + 1$	นิยามที่ 2
3.	$x + 2 = (2k + 1) + 2$	คุณสมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
4.	$x + 2 = 2k + (1 + 2)$	คุณสมบัติการจัดหมู่สำหรับการบวก
5.	$x + 2 = 2k + (2 + 1)$	คุณสมบัติสลับที่ภายใต้การบวก

6. $x + 2 = (2k + 2) + 1$ เช่นเดียวกับข้อ 4

7. $x + 2 = 2(k + 1) + 1$ คุณสมบัติการกระจาย

8. $x + 2$ เป็นจำนวนเต็มคี่ $k + 1$ เป็นจำนวนเต็มตามคุณสมบัติปิดภายใต้การบวก และนิยามที่ 2 (ผล Q จริง)

จะเห็นได้ว่า ในการพิสูจน์ให้ เหตุ P จริง แล้วพิสูจน์ได้ว่า ผล Q เป็นจริง คือ พิสูจน์ได้ว่า $P \Longrightarrow Q$ เป็นจริง

5.2 <u>การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect Proof) หรือ การพิสูจน์โดยใช้ข้อขัดแย้ง (Proof by Contradiction)</u>

ในการพิสูจน์ทางอ้อมนั้น เริ่มด้วยสมมุติว่า สิ่งที่ต้องการพิสูจน์เป็นเท็จ นั่นคือ สมมุติว่า นิเสธของมันเป็นจริง แล้วนำไปทำการอนุมาน จนกระทั่งพบข้อความ $R \wedge \sim R$ หรือ ข้อขัดแย้งจึงหยุด แล้วได้ว่าที่สมมุติผลเป็นเท็จนั้น เป็นเท็จ จึงสรุปได้ว่า ผลเป็นจริง เช่น

จะพิสูจน์ว่า ประพจน์ P เป็นจริง ก็สมมุติให้ P เป็นเท็จ หรือ $\sim P$ เป็นจริง แล้วนำไปอนุมานพบข้อความ $Q \wedge \sim Q$ ก็จะได้ P เป็นจริง เพราะว่า $\sim P \wedge (Q \wedge \sim Q) \Longrightarrow P$ เป็นทอโทโลยี (tautology) เมื่อได้ $\sim P \wedge (Q \wedge \sim Q)$ เป็นจริง ก็จะได้ P เป็นจริง โดยกฎการแจงผลตามเหตุ (modus ponen)

ถ้าข้อความที่ต้องการพิสูจน์อยู่ในรูป $P \Longrightarrow Q$ คือ ต้องการพิสูจน์ $P \Longrightarrow Q$ เป็นจริง ก็สมมุติให้ $P \Longrightarrow Q$ เป็นเท็จ จึงทำได้ว่า P เป็นจริง Q เป็นเท็จ หรือ $\sim Q$ เป็นจริง แล้วนำไปทำการอนุมาน

จนพบข้อความ $R \wedge \sim R$ จึงหยุด เพราะพบข้อขัดแย้ง จึงได้ว่า ที่สมมุติ $P \implies Q$ เป็นเท็จนั้น เป็นเท็จ จึงสรุปได้ว่า $P \implies Q$ เป็นจริง การพิสูจน์โดยทั่วไปจะเริ่มที่ $\sim Q$ เป็นจริงเลย

ถ้าข้อความที่ต้องการพิสูจน์ คือ $P \implies Q$ และ $S_1, S_2, \ldots, S_n$ เป็นสัจพจน์ หรือทฤษฎีที่พิสูจน์มาแล้ว การพิสูจน์แบบขัดแย้ง อาจจะอยู่ในลักษณะต่างๆ ดังนี้

ก. $S_1, S_2, \ldots, S_n, P, \sim Q \models R \wedge \sim R$

ข. $S_1, S_2, \ldots, S_n, P, \sim Q \models P \wedge \sim P$

ค. $S_1, S_2, \ldots, S_n, P, \sim Q \models Q \wedge \sim Q$

ง. $S_1, S_2, \ldots, S_n, P, \sim Q \models S_i \wedge \sim S_i$

เมื่อ $S_i \in \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$

นั่นคือ ข้อความ $R \wedge \sim R$ อาจจะเป็น $P \wedge \sim P$ หรือ $Q \wedge \sim Q$ หรือ $S_i \wedge \sim S_i$ ก็ได้

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.2 จากตัวอย่างที่ 1 เป็นการพิสูจน์ทางตรง ในตัวอย่างนี้ จะทำการพิสูจน์แบบทางอ้อม

<u>พิสูจน์</u> P : x เป็นจำนวนเต็มคี่

Q : $x + 2$ เป็นจำนวนเต็มคี่

เราจะพิสูจน์ $P \implies Q$ เป็นจริง โดยการ

สมมุติให้ $P \implies Q$ เป็นเท็จ จึงได้ว่า

P เป็นจริง Q เป็นเท็จ หรือ $\sim Q$ เป็นจริง

จึงใช้ P : x เป็นจำนวนเต็มคี่ เป็นจริง และ

Q : x + 2 เป็นจำนวนเต็มคู่ เป็นจริงไปทำการอนุมาน

1. $x + 2 = 2k$ $\sim$ Q เป็นจริง และนิยามที่ 1

2. $(x + 2) + (-2) = 2k + (-2)$

คุณสมบัติการบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

3. $x + 2 + (-2) = 2k + (-2)$

คุณสมบัติการจัดหมู่ภายใต้การบวก

4. $x + 0 = 2\ k + (-1)$

อินเวอร์สการบวก และคุณสมบัติการกระจาย

5. $x = 2\ k + (-1)$

เอกลักษณ์การบวก

6. x เป็นจำนวนเต็มคู่ $k + (-1)$ เป็นจำนวนเต็ม

ตามคุณสมบัติปิด และนิยามที่ 1

7. x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ จากกำหนดให้ P เป็นจริง

x เป็นจำนวนเต็มคี่ และจากข้อ 6

เกิดข้อขัดแย้ง เพราะไม่มีจำนวนเต็มใดที่เป็นทั้ง

จำนวนเต็มคู่ และจำนวนเต็มคี่

ดังนั้นที่สมมุติ P ===> Q เป็นเท็จ นั้น เป็นเท็จ

จึงได้ว่า P ===> Q เป็นจริง

นั่นคือ " ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคี่แล้ว x + 2 เป็นจำนวนเต็มคี่ "

เป็นจริง

ตัวอย่างต่อไป จะแสดงวิธีพิสูจน์แบบทางตรง และแบบทางอ้อม

เปรียบเทียบกัน โดยจะไม่อธิบายในรายละเอียด

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.3 ต้องการพิสูจน์ว่า

" ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว $x + 2$ เป็นจำนวนเต็มคู่ " จริง

<u>วิธีที่</u> 1 <u>พิสูจน์แบบทางตรง</u>

1.	x เป็นจำนวนเต็มคู่	เหตุเป็นจริง
2.	$x = 2k$	นิยามที่ 1
3.	$x + 2 = 2k + 2$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากันคุณสมบัติ
4.	$x + 2 = 2(k + 1)$	คุณสมบัติการกระจาย
5.	$x + 2$ เป็นจำนวนเต็มคู่	$k + 1$ เป็นจำนวนเต็มตามคุณสมบัติปิดภายใต้การบวก และนิยามที่ 1

<u>วิธีที่</u> 2 <u>พิสูจน์แบบทางอ้อม</u>

1.	$x + 2$ เป็นจำนวนเต็มคี่	ผลเป็นเท็จ และคุณสมบัติของจำนวนเต็ม
2.	$x + 2 = 2k + 1$	นิยามที่ 2
3.	$(x + 2) + (-2) = (2k + 1) + (-2)$	บวกด้วยจำนวนเท่ากัน
4.	$x + [2 + (-2)] = 2k + [1 + (-2)]$	คุณสมบัติการจัดหมู่
5.	$x + 0 = 2k + [(-2) + 1]$	อินเวอร์สการบวกและการสลับที่
6.	$x = [2k + (-2)] + 1$	การจัดหมู่
7.	$x = 2k + (-1) + 1$	การกระจาย

8. x เป็นจำนวนเต็มคี่ | $k + (-1)$ เป็นจำนวนเต็ม, นิยามที่ 2

9. x เป็นจำนวนเต็มคู่ และ x เป็นจำนวนเต็มคี่ เกิดข้อขัดแย้ง | จากเหตุเป็นจริง และข้อ 8 ไม่มีจำนวนเต็มใดเป็นทั้งจำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

จึงสรุปว่า " ถ้า x เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว $x + 2$ เป็นจำนวนเต็มคู่ " เป็นจริง

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.4 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x และ y เป็นจำนวนเต็มคู่แล้ว $x + y$ เป็นจำนวนเต็มคู่ " เป็นจริง

<u>วิธีที่ 1</u> <u>พิสูจน์แบบทางตรง</u>

1. x และ y เป็นจำนวนคี่ กำหนดให้เหตุเป็นจริง
2. $x = 2k + 1$ และ $y = 2m + 1$ นิยามที่ 2
3. $x + y = (2k + 1) + (2m + 1)$ การเท่ากันแทนกันได้
4. $x + y = (2k + 2m) + (1 + 1)$ การสลับที่ และการจัดหมู่
5. $x + y = 2(k + m) + 2$ การกระจาย
   $= 2(k + m + 1)$
6. $x + y$ เป็นจำนวนเต็มคู่ $k + m + 1$ เป็นจำนวนเต็ม และนิยามที่ 1

<u>วิธีที่ 2</u> <u>พิสูจน์แบบทางอ้อม</u>

1.	$x + y$ เป็นจำนวนเต็มคี่	ผลเป็นเท็จ และคุณสมบัติของจำนวนเต็ม
2.	$x + y = 2n + 1$	นิยามที่ 2
3.	$x = 2k + 1,\ y = 2m + 1$	เหตุเป็นจริง และนิยามที่ 2
4.	$x + 2m + 1 = 2n + 1$	การเท่ากันแทนกันได้
5.	$x + 2m = 2n$	การตัดออกภายใต้บวก
6.	$x + 2m + (-2m) = 2n + (-2m)$	บวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน
7.	$x + [2m + (-2m)] = 2n + (-2m)$	การจัดหมู่
8.	$x + 0 = 2n + (-2m)$	อินเวอร์สการบวก
9.	$x = 2n + (-2n)$	เอกลักษณ์การบวก
10.	$x = 2[n + (-m)]$	การกระจาย
11.	x เป็นจำนวนเต็มคู่	$n + (-m)$ เป็นจำนวนเต็ม และนิยามที่ 1
12.	x เป็นจำนวนเต็มคี่ และ x เป็นจำนวนเต็มคู่	จากข้อ 3 และข้อ 12
	เกิดข้อขัดแย้ง	ไม่มีจำนวนเต็มใดเป็นทั้งจำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

ดังนั้นสมมุติ $x + y$ เป็นจำนวนเต็มคี่ เป็นเท็จ

นั่นคือ $x + y$ เป็นจำนวนเต็มคู่

5.3 การพิสูจน์โดยใช้ข้อความแย้งสลับที่

(Proof by Using Contrapositive)

ในกรณีที่การพิสูจน์ P ===> Q โดยตรงทำได้ยาก ก็ทำการเลี่ยงไปพิสูจน์ข้อความ ∼ Q ===> ∼ P แทน เมื่อพิสูจน์ได้ว่า ∼ Q ===> ∼ P จริง ก็สรุปได้ทันทีว่า P ===> Q เป็นจริง เพราะว่า P ===>Q สมมูลย์กับ ∼ Q ===> ∼ P จึงใช้แทนกันได้

ตัวอย่างที่ 5.5 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคู่ " เป็นจริง

พิสูจน์

วิธีที่ 1 พิสูจน์แบบทางตรง

ให้ P : x^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

Q : x เป็นจำนวนเต็มคู่

∼ P : x^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

∼ Q : x เป็นจำนวนเต็มคี่

จะทำการพิสูจน์ ∼ Q ===> ∼ P โดยการพิสูจน์ทางตรง

1.	x เป็นจำนวนเต็มคี่	เหตุ ∼ Q เป็นจริง
2.	$x = 2k + 1$	นิยามที่ 3
3.	$x^2 = (2k + 1)(2k + 1)$	นิยามที่ 4 และการแทนค่า
4.	$x^2 = 4k^2 + 4k + 1$	การกระจาย
5.	$x^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$	ให้ $m = 2k^2 + 2k$ ซึ่งเป็น
	$= 2m + 1$	จำนวนเต็มตามคุณสมบัติปิดการคูณ

6. x^2 เป็นจำนวนเต็มคี่ นิยามที่ 3 ($\sim P$ เป็นจริง)

แสดงว่า $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ เป็นจริง จึงได้ $P \Longrightarrow Q$ เป็นจริง จึงสรุปได้ว่า " ถ้า x^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคู่ " เป็นจริง

<u>วิธีที่ 2</u> <u>พิสูจน์แบบทางอ้อม</u>

1.	x เป็นจำนวนเต็มคี่	ผลเป็นเท็จ และคุณสมบัติของจำนวนเต็ม
2.	$x = 2m + 1$	นิยามที่ 2
3.	$x^2 = (2m + 1)(2m + 1)$	นิยามที่ 3
4.	$x^2 = 4m^2 + 4m + 1$	การกระจาย
5.	$x^2 = 2(2m^2 + 2m) + 1$	การกระจาย
	$= 2k + 1$	ให้ $k = 2m^2 + 2m$ ซึ่งเป็นจำนวนเต็ม ตามคุณสมบัติปิดภายใต้บวก และคูณ
6.	x^2 เป็นจำนวนเต็มคี่	นิยามที่ 2
7.	x^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ และเป็นจำนวนเต็มคี่	จากเหตุเป็นจริง และข้อ 6
	เกิดการขัดแย้ง	ไม่มีจำนวนเต็มใดเป็นทั้งจำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

ดังนั้นที่สมมุติ x เป็นจำนวนเต็มคี่ จึงเป็นเท็จ

นั่นคือ x เป็นจำนวนเต็มคู่

สรุปได้ว่า ถ้า x^2 เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว x เป็นจำนวนเต็มคู่ เป็นจริง

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.6 ต้องการพิสูจน์ว่า " ไม่มีจำนวนตรรกยะใด ที่ยกกำลังสองแล้วได้ 2 " เป็นจริง

<u>พิสูจน์</u> <u>แบบทางอ้อม</u>

ให้ P : ไม่มีจำนวนตรรกยะใด ที่ยกกำลังสองแล้วได้ 2

1. สมมุติให้มีจำนวนตรรกยะ $\frac{a}{b}$ ซึ่งเป็นเศษส่วนอย่างต่ำที่ทำให้ $(\frac{a}{b})^2 = 2$ (a และ b เป็นจำนวนเต็ม, $b \neq 0$) — $\sim P$ เป็นจริง

2.	$\frac{a^2}{b^2} = 2$	นิยามที่ 6 และจากข้อ 1, การคูณตรรกยะ
3.	$a^2 = 2b^2$	นิยามที่ 5 ข.
4.	a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่	b^2 เป็นจำนวนเต็มและ นิยามที่ 1
5.	a เป็นจำนวนเต็มคู่	พิสูจน์แล้วตัวอย่าง 5.5
6.	$a = 2m$	นิยามที่ 1
7.	$(2m)^2 = 2b^2$	จากข้อ 3 การเท่ากันแทนกันได้
8.	$4m^2 = 2b^2$	นิยามที่ 3

9.	$2m^2 = b^2$	การตัดภายใต้การคูณ
10.	b^2 เป็นจำนวนเต็มคู่	เช่นเดียวกับข้อ 4
11.	b เป็นจำนวนเต็มคู่	เช่นเดียวกับข้อ 5
12.	$\frac{a}{b}$ ไม่เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ	จากข้อ 6 และข้อ 11 ต่างก็มี 2 เป็นตัวประกอบ

จึงขัดแย้งกับที่สมมุติว่า $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

ดังนั้น จึงไม่มีจำนวนตรรกยะใด ที่ยกกำลังสองแล้วได้ 2

การพิสูจน์ข้างต้นก็คือ การพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะนั่นเอง

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.7 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า x เป็นจำนวนตรรกยะ y เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $y - x$ เป็นจำนวนอตรรกยะ " เป็นจริง

<u>พิสูจน์</u> <u>แบบทางอ้อม</u>

1.	ให้ $y - x$ เป็นจำนวนตรรกยะ	ผลเป็นเท็จ และนิยามจำนวนจริง
2.	$y - x = \frac{c}{d}$	นิยามที่ 4 ก.
3.	$x = \frac{a}{b}$	นิยามที่ 4 ก. กำหนดให้
4.	$y - \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	การเท่ากัน และแทนกันได้
5.	$y + (-\frac{a}{b}) + \frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$	การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน

6. $y + \left[\left(\frac{-a}{b}\right) + \frac{a}{b}\right] = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ การจัดหมู่

7. $y + \frac{0}{1} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ อินเวอร์สการบวก

8. $y = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ เอกลักษณ์การบวก

9. $y = \frac{bc + ad}{db}$ นิยามที่ 5 ข.

10. y เป็นจำนวนตรรกยะ นิยามที่ 4 ก

ขัดแย้งที่กำหนดให้ y เป็นจำนวนอตรรกยะ เพราะว่าไม่มีจำนวนจริงใด ที่เป็นทั้งจำนวนตรรกยะ และอตรรกยะ

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.8 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มแล้ว ถ้ามีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $x + a = b$ แล้ว มีจำนวนเต็ม x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น " เป็นจริง

<u>เหตุ</u> a และ b เป็นจำนวนเต็ม และมีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $x + a = b$

<u>ผลสรุป</u> มีจำนวนเต็ม x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

<u>พิสูจน์</u> <u>แบบทางอ้อม</u>

1. ให้มีจำนวนเต็ม x_1 และ x_2 ผลเป็นเท็จ ซึ่ง $x_1 \neq x_2$ ที่ทำให้

   i) $x_1 + a = b$

   ii) $x_2 + a = b$

2. $x_1 + a = x_2 + a$ จำนวนเท่ากันแทนกันได้

3. $x_1 = x_2$ การตัดออกภายใต้บวก

4. $x_1 \neq x_2$ และ $x_1 = x_2$ จากข้อ 1 และ 3

เกิดการขัดแย้ง

ดังนั้นจึงมีจำนวน x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น
ที่ทำให้ $x + a = b$

5.4 <u>การพิสูจน์ทางอ้อมในคณิตศาสตร์เรื่องอื่นๆ</u>

เมื่อเข้าใจวิธีการพิสูจน์ทางอ้อมดีแล้ว ก็สามารถนำไปใช้พิสูจน์เรื่องอื่นๆ ในคณิตศาสตร์ได้ ดังตัวอย่างต่อไป

<u>ตัวอย่างที่</u> 5.9 ต้องการพิสูจน์ว่า " จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ จะต้องเป็นจำนวนอตรรกยะ "

<u>พิสูจน์</u> 1. ให้ x เป็นจำนวนที่เขียนอยู่ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำ และ x เป็นจำนวนตรรกยะ

2. ดังนั้นจาก 1 $x = \frac{a}{b}$ เมื่อ a , b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$

3. x เป็นจำนวนที่เขียนอยู่ในรูปทศนิยมซ้ำ จึงขัดแย้งที่กำหนดให้

นั่นคือ จำนวนที่เขียนอยู่ในรูปทศนิยมไม่ซ้ำเป็นจำนวนอตรรกยะ

(ในตัวอย่างที่ 5.9 และตัวอย่างต่อไป ผู้เขียนสมมุติว่ามีความรู้ในเรื่องนั้นๆมาแล้ว)

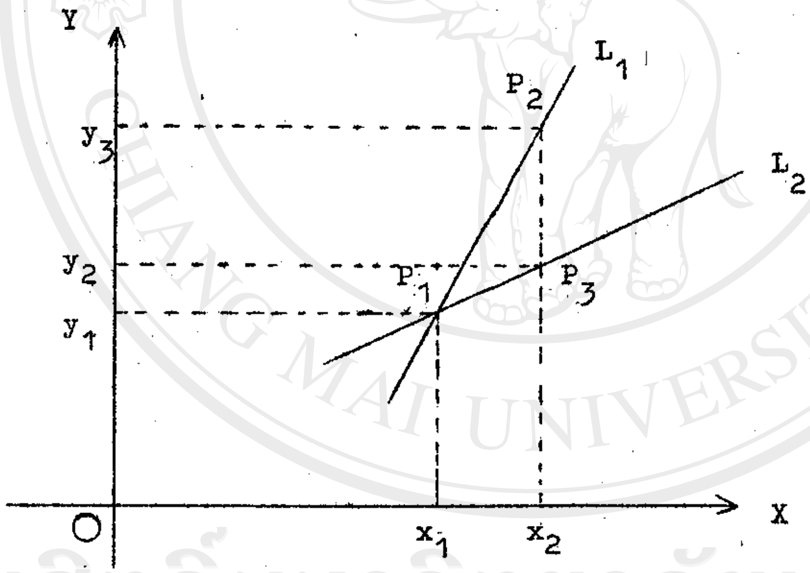
<u>ตัวอย่างที่</u> 5.10 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีความชันเท่ากันแล้ว เส้นตรงทั้งสองต้องขนานกัน "

<u>กำหนดให้</u> L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นใดๆ และมีความชัน m_1, m_2 ตามลำดับ

<u>จะต้องพิสูจน์ว่า</u> L_1 ขนานกับ L_2

<u>พิสูจน์</u> สมมุติให้ L_1 ไม่ขนานกับ L_2

ดังนั้นให้ L_1 ตัดกับ L_2 ที่จุด $P_1(x_1, y_1)$ และให้ $P_2(x_2, y_3)$ และ $P_3(x_2, y_2)$ เป็นจุดบน L_1 และ L_2 ตามลำดับ



ดังนั้นจะได้ $m_1 = \dfrac{y_3 - y_1}{x_2 - x_1}$ และ

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

เนื่องจาก $y_3 \neq y_2$ ดังนั้น $\frac{y_3 - y_1}{x_2 - x_1} \neq \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

จึงทำให้ $m_1 \neq m_2$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ $m_1 = m_2$

ดังนั้นที่สมมุติ L_1 ไม่ขนานกับ L_2 จึงเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ ถ้า $m_1 = m_2$ แล้ว L_1 จะขนานกับ L_2

ตัวอย่างที่ 5.11 ต้องการพิสูจน์ว่า " ถ้า A และ B เป็นเซตใดๆ แล้ว $(A \cap B) - B = \emptyset$ "

พิสูจน์ 1. ให้ $(A \cap B) - B \neq \emptyset$

2. จะมี $x \in (A \cap B) - B$ โดยนิยามของ $\emptyset$

3. จาก 2 จะได้ว่า $x \in (A \cap B)$ และ $x \notin B$ โดยนิยามของ $(A - B)$

4. จาก 3 ได้ว่า $x \in A$ และ $x \in B$ และ $x \notin B$ โดยนิยามของ $(A \cap B)$

5. จาก 4 เกิดขัดแย้ง $x \in B$ และ $x \notin B$

ดังนั้นที่สมมุติ $(A \cap B) - B \neq \emptyset$ จึงเป็นเท็จ

นั่นคือ $(A \cap B) - B = \emptyset$

ตัวอย่างที่ 5.12

ทฤษฎี ก. สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างก็ไม่เท่ากับ $\bar{0}$

$\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $a \neq 0$ ที่ทำให้

$\bar{u} = a\bar{v}$

ต้องการพิสูจน์ว่า " สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างก็ไม่เท่ากับ $\bar{0}$ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ ถ้า $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$ แล้ว จะได้ว่า $a = 0$ และ $b = 0$

<u>พิสูจน์</u>

1. ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ต่างก็ไม่เท่ากับ $\bar{0}$ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$
2. สมมุติให้ $a \neq 0$
3. กำหนดให้ $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$ จึงได้ $a\bar{u} = -b\bar{v}$
   และ $\bar{u} = -\frac{b}{a}\bar{v}$
4. เนื่องจาก $\bar{u} \neq \bar{0}$ และ $a \neq 0$ ดังนั้น $-\frac{b}{a}\bar{v} \neq \bar{0}$

   จะได้ $-\frac{b}{a} \neq 0$
5. จากทฤษฎี ก. เมื่อ $\bar{u} \neq \bar{0}$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, $\frac{b}{a} \neq 0$

   และ $\bar{u} = -\frac{b}{a}\bar{v}$ จึงได้ว่า $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$

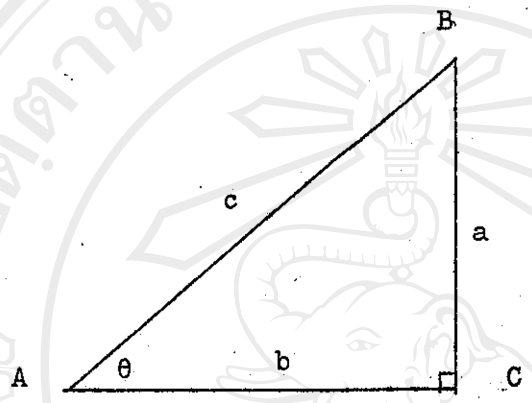
   ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดให้ว่า $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$
   ดังนั้นที่สมมุติ $a \neq 0$ จึงเป็นเท็จ
   นั่นคือ $a = 0$
6. ในทำนองเดียวกัน ถ้าสมมุติ $b \neq 0$ ก็จะได้ข้อขัดแย้ง
   ดังนั้นจึงได้ $b = 0$
   นั่นคือสำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างก็ไม่เท่ากับ $\bar{0}$ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$ ถ้า $a\bar{u} + b\bar{v} = \bar{0}$ แล้ว $a = 0$
   และ $b = 0$

5.5 ข้อควรระมัดระวังในการสอนเรื่องการพิสูจน์

1) ต้องไม่ให้การพิสูจน์นั้น เป็นการวนแบบงูกินหาง ดังตัวอย่างเช่น

<u>ตัวอย่างที่</u> ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

โดยมีมุม C เป็นมุมฉากแล้ว $a^2 + b^2 = c^2$



<u>พิสูจน์</u> ให้ $B\hat{A}C = \theta$

ดังนั้นได้ $\sin\theta = \frac{a}{c}$

จึงได้ว่า $a^2 = c^2 \sin^2\theta$ .....(1)

และ $\cos\theta = \frac{b}{c}$

จึงได้ว่า $b^2 = c^2 \cos^2\theta$ .....(2)

(1) + (2) $a^2 + b^2 = c^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta$

$= c^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

ดังนั้น $a^2 + b^2 = c^2$

ในการพิสูจน์ข้างต้นใช้ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
ซึ่งสูตรนี้ได้มาจากการที่ ถ้า $\triangle$ ABC เป็น $\triangle$ มุมฉาก โดยมีมุม C
เป็นมุมฉาก จากทฤษฎีปีทาโกรัส ในวิชาเรขาคณิต จะได้ว่า

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ดังนั้น $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ (เอา $c^2 \neq 0$ หารทั้งสองข้าง)

จึงได้ว่า $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
จะเห็นได้ว่า ในวิชาตรีโกณมิติของสามเหลี่ยมมุมฉาก
ใช้ $a^2 + b^2 = c^2$ ไปอ้างในการพิสูจน์
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ แต่ในตัวอย่างที่
ใช้ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ไปใช้อ้างในการพิสูจน์ $a^2 + b^2 = c^2$
จึงเป็นการวนแบบงูกินหาง

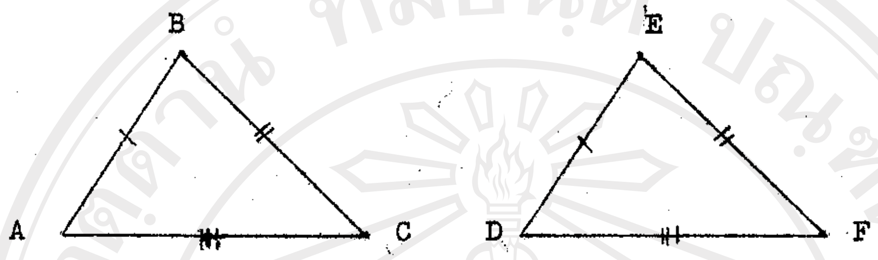
สำหรับการพิสูจน์ที่ถูกต้อง โดยไม่ใช้ตรีโกณมิติไปอ้าง ศึกษาได้จาก เรขาคณิตยูคลิด ในทฤษฎีของปีทาโกรัส

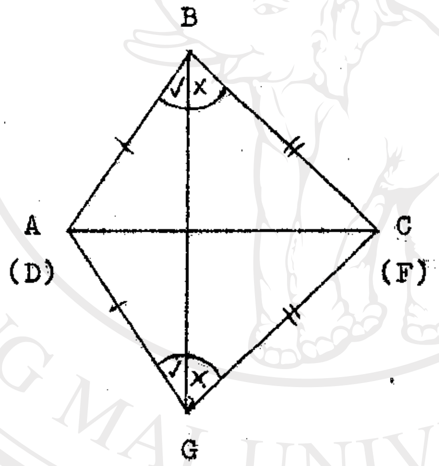
แนวทางการแก้ปัญหาเรื่องการวนคือ ต้องเข้าใจในโครงสร้างของเรื่องนั้นๆ ก่อน โดยโครงสร้างก็จะประกอบด้วย อนิยาม นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎี โดยเรื่องที่เราต้องการพิสูจน์ มีสิ่งเหล่านี้มาก่อนอย่างไรบ้าง หรือมีคุณสมบัติเบื้องต้นอะไรบ้าง ที่จะนำมาใช้อ้างในการพิสูจน์ได้ โดยใช้สิ่งที่มีมาก่อนเท่านั้น ไปใช้อ้างก็จะไม่เกิดการวนในเรื่องนั้นๆ

2) ต้องไม่นำสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ มาใช้อ้างในการพิสูจน์ เช่น

<u>ตัวอย่าง</u> ซึ่งเป็นการพิสูจน์ในเรขาคณิตแบบเก่า

<u>ทฤษฎี</u> ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสามคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้เท่ากันทุกประการ (ด้าน-ด้าน-ด้าน)





<u>กำหนดให้</u> ABC และ DEF เป็นสามเหลี่ยมสองรูปที่มี $AB = DE$, $BC = EF$ และ $AC = DF$

<u>จะต้องพิสูจน์ว่า</u> $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

<u>สร้าง</u> $AG = DE$, $CG = EF$

พิสูจน์ 1 AB = AG , BC = GC ,

1.	AB = AG , BC = GC, AC = DF	กำหนดให้ และสร้าง
2.	$\overline{AC}$ ทับ $\overline{DF}$ ได้สนิท	AC = DF
3.	ลาก BG	สร้าง
4.	$D\hat{B}G = D\hat{G}B$	มุมตรงกันข้ามด้านที่เท่ากัน
5.	$F\hat{B}G = F\hat{G}B$	ทำนองเดียวกับข้อ 4
6.	$D\hat{B}F = D\hat{G}F$	ข้อ 4 + ข้อ 5
7.	$\triangle ABC \cong \triangle ACG$	ด.ม.ด.
8.	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	$\triangle ACG \cong \triangle DEF$ โดยสร้าง

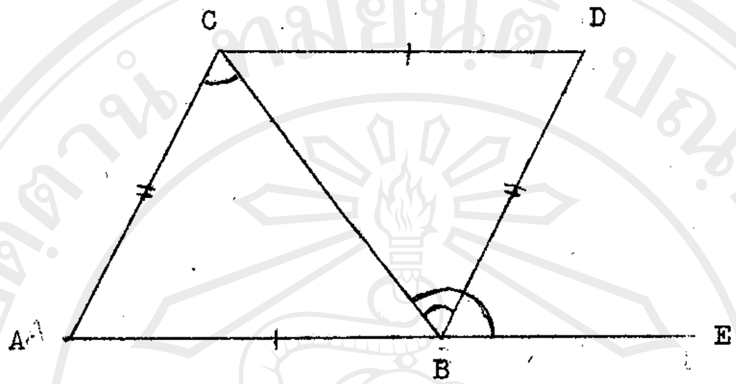
จากการพิสูจน์ทฤษฎีข้างต้น จะเห็นได้ว่า ผิดอย่างชัดแจ้ง เพราะว่า ในการพิสูจน์ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ โดยสร้าง $\triangle ACG \cong \triangle DEF$
แล้วทำการพิสูจน์ $\triangle ABC \cong \triangle ACG$
แล้วสรุปว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$
ในการพิสูจน์ข้างต้นได้ยอมรับ $\triangle ACG \cong \triangle DEF$ โดยการสร้าง ซึ่งตัวทฤษฎีต้องการพิสูจน์สิ่งนี้อยู่ จึงเป็นการนำเอาสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ไปใช้อ้างในการพิสูจน์ โดยใช้สามัญสำนึก และประสาทสัมผัส ยอมรับการเท่ากันของ $\triangle ACG$ กับ $\triangle DEF$ โดยตาเห็น

สำหรับวิธีที่ถูกต้องคือ พิสูจน์ให้ได้ว่า

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ดังตัวอย่างที่ 1 ในบทที่ 2

<u>อีกตัวอย่างหนึ่ง</u>

ในสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงกันข้าม



<u>สิ่งที่กำหนดให้</u> ให้ $\triangle ABC$ มี $C\hat{B}E$ เป็นมุมภายนอก

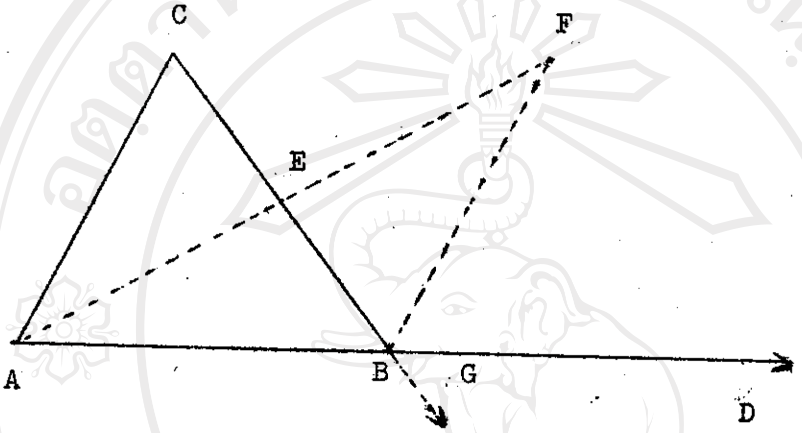
<u>สิ่งที่จะต้องพิสูจน์</u> จะต้องพิสูจน์ว่า $C\hat{B}E > A\hat{C}B$

<u>สร้าง</u> ใช้ B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี AC และ
ใช้ C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี AB เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด D ลาก CD และ BD

<u>พิสูจน์</u>

1.	$\triangle ABC \cong \triangle BDC$	1.	AC = BD , AB = CD , BC = BC
2.	$A\hat{C}B = C\hat{B}D$	2.	จากข้อ 1
3.	$C\hat{B}E > C\hat{B}D$	3.	สิ่งที่เห็นจริง
4.	$C\hat{B}E > A\hat{C}B$	4.	จากข้อ 2 และ 3

ในการพิสูจน์ทฤษฎีดังกล่าว ใช้เหตุผลว่า $\widehat{CBE} > \widehat{CBD}$ เพราะ $\widehat{CBD}$ เป็นส่วนย่อยของ $\widehat{CBE}$ เพราะเห็นด้วยตาว่า BD อยู่ระหว่าง BC กับ BE จึงมีข้อคิดตามมาว่า น่าจะเห็นได้เช่นเดียวกันว่า $\widehat{CBE} > \widehat{ACB}$ ซึ่งเมื่อพิจารณาโดยถ่องแท้แล้ว ต้องพิสูจน์ว่า BD อยู่ระหว่าง BC กับ BE ดังการพิสูจน์ของเรขาคณิตของยูคลิด ตามแนวสัจพจน์ของฮิลเบิร์ต ดังนี้



กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $< CBD$ เป็นมุมภายนอก ซึ่ง $\overrightarrow{BD}$ เป็นรังสีตรงกันข้ามของ $\overrightarrow{BA}$

จะต้องพิสูจน์ว่า $m < CBD > m < BAC$

และ $m < CBD > m < ACB$

พิสูจน์

1. ให้ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{CB}$ และใน $\overrightarrow{AE}$ มี F ซึ่ง A.E.F และ $\overline{AE} \cong \overline{EF}$ (โดยทฤษฎีของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้น ท .33)

2. ใน $\triangle$ ACE กับ $\triangle$ FBE มี

$\overline{AE} \cong \overline{EF}$ (ข้อ 1)

$\angle$ CEA $\cong$ $\angle$ BEF (มุมประกอบเส้นของมุมที่มีขนาดเท่ากัน ท.26)

$\overline{CE} \cong \overline{EB}$ (ข้อ 1)

โดยสัจพจน์ 13 (S. A. S) จะได้ $\triangle$ ACE $\cong$ $\triangle$ FBE

3. ดังนั้น $\angle$ ACE $\cong$ $\angle$ EBF

4. เนื่องจาก E ε $\overrightarrow{BC}$ เพราะฉะนั้น C และ F อยู่ข้างเดียวกันของ $\overleftrightarrow{BD}$

5. เนื่องจาก D, A อยู่คนละข้างของ $\overleftrightarrow{BC}$ และ F, A อยู่คนละข้างของ $\overleftrightarrow{BC}$ ด้วย เพราะฉะนั้น D, F อยู่ข้างเดียวกันของ $\overrightarrow{BC}$

6. จากนิยามของจุดที่อยู่ภายใน (นิยามที่ 11) และรังสีที่อยู่ระหว่าง(นิยามที่ 12) จะได้ $\overrightarrow{BD}$. $\overrightarrow{BF}$. $\overrightarrow{BC}$

7. จากนิยามการมากกว่าของมุม (นิยามที่ 17) จะได้

m < CBD > m < CBF

8. จากข้อ 3, 7 โดยทฤษฎีเงื่อนไขการเปรียบเทียบมุม(ท.23)

จะได้ m < CBD > m < ACB

9. พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับข้อ 1 - 8 จะได้ m < ABG > m < BAC

แต่ m < CBD = m < ABG

ดังนั้น m < CBD > m < BAC ด้วย

<u>หมายเหตุ</u> เพื่อให้เข้าใจสัญลักษณ์ที่ใช้ในการพิสูจน์ ตามความหมายที่ใช้ จึงขยายความดังนี้

$m\angle CBD$	แทน	ขนาดของมุม CBD
$\overline{CB}$	แทน	ส่วนของเส้น CB
$\overrightarrow{AE}$	แทน	รังสี AE
$\overleftrightarrow{AF}$	แทน	เส้น AF ซึ่งมีจุด A , F อยู่ในเส้นดังกล่าว
$A \cdot E \cdot F$	แทน	จุด E อยู่ระหว่างจุด A กับจุด F
$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BC}$	แทน	รังสี BF อยู่ระหว่างรังสี BD กับรังสี BC

ส่วน นิยาม สัจพจน์ และทฤษฎีที่นำมาใช้อ้าง ศึกษารายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก

พัฒนาการเรขาคณิตของยูคลิดตามแนวสัจพจน์ของ ฮิลเบิร์ต และแนวการสอนในระดับมัธยมศึกษา การค้นคว้าแบบอิสระเชิงวิทยานิพนธ์ วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต สาขาการสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 2524