บทที่ 1

บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า "ถ้า (X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซ แล้วทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \dashrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย" แต่บทกลับของทฤษฎีดังกล่าวไม่จริงเสมอไป กล่าวคือ "ถ้าทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \dashrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลายแล้ว (X, d) อาจจะไม่เป็นคอมแพคเมตริกสเปซก็ได้"

ปัญหาเดิมมีอยู่ว่า (X, d) จะต้องมีเงื่อนไขอะไรบ้างจึงจะทำให้บทกลับของทฤษฎีดังกล่าวเป็นจริง Hermann Hueber ได้ตอบปัญหาดังกล่าวแล้วด้วยทฤษฎีต่อไปนี้

" (X, d) เป็นคอมแพคเมตริกสเปซ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. ทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \dashrightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบเสมอต้นเสมอปลาย
2. แต่ละ $\varepsilon > 0$, $\{x \in X / d(x) > \varepsilon\}$ เป็นเซตจำกัด "

(ในที่นี้ $d(x) = \inf \{d(x, y) / y \in X \setminus \{x\}\}$)

เมื่อพิจารณาเงื่อนไขข้อที่ 1 ในทฤษฎีของ Hermann Hueber จะเห็นได้ว่า f ต้องเป็นฟังก์ชันค่าจริงเท่านั้น ปัญหาที่น่าสนใจก็คือ ถ้าเราแทน f ด้วยเมตริกสเปซใดๆ ผลสรุปทฤษฎีของ Hermann Hueber จะยังคงเป็นจริงหรือไม่

คำตอบก็คือ ไม่จริงเสมอไป สิ่งที่น่าคิดต่อไปก็คือ เมตริกสเปซที่จะนำมาแทนที่ R จะต้องมีคุณสมบัติอะไรบ้าง จึงยังคงทำให้ผลสรุปทฤษฎีของ Hermann Hueber เป็นจริง

ดังนั้นในการวิจัยนี้ ก็จะเป็นการตอบปัญหาดังกล่าว โดยจะหาคุณสมบัติของเมตริกสเปซที่นำมาแทน R แล้วยังคงทำให้ผลสรุปทฤษฎีของ Hermann Hueber เป็นจริง

การเรียงลำดับเนื้อหาได้แบ่งออกเป็น 3 บท ในบทที่ 2 กล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่จะนำไปใช้ในบทที่ 3 และบทที่ 4 ได้แก่ ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เมตริกสเปซ โทโพโลจิคัลสเปซ การเป็นคอมแพค คอนเนกเตคสเปซ และเบียโนสเปซ สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีในบทที่ 2 นี้

ผู้เขียนไม่ได้แสดงการพิสูจน์ไว้ ผู้สนใจจะศึกษาได้จากเอกสารอ้างอิงที่เขียนกำกับไว้ ในบทที่ 3 เป็นการศึกษาบทความของ Hermann Hueber [9] โดยละเอียด ซึ่งกล่าวถึง " On Uniform Continuity and Compactness in metric spaces " บทที่ 4 เป็นส่วนสำคัญของงานวิจัยนี้ ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 4 หัวข้อดังนี้

หัวข้อ 4.1 เป็นการให้นิยามของ [0, 1] continuous metric space และพิสูจน์ว่า เมื่อแทน R ด้วย [0, 1] continuous metric space ในทฤษฎีของ Hermann Hueber แล้ว ผลสรุปทฤษฎีของ Hermann Hueber ยังคงเป็นจริง

หัวข้อ 4.2 เป็นการเปรียบเทียบคุณสมบัติของ [0, 1] continuous metric space กับคุณสมบัติอื่นๆ ของเมตริกสเปซ เพื่อช่วยในการตรวจสอบว่าเมตริกสเปซใดบ้างที่เป็น [0, 1] continuous metric space

หัวข้อ 4.3 เป็นการขยายทฤษฎีบางทฤษฎีไปถึง [0, 1] continuous metric space

หัวข้อ 4.4 หาเงื่อนไขอื่นที่นำไปแทนในทฤษฎีของ Hermann Hueber แล้วยังคงทำให้ผลสรุปของทฤษฎีที่ได้ใหม่เป็นจริง